Analyse combinatoire

Combinatorics

Cours bilingue : Français – English

Contenu du document

Définition, règles de dénombrement, factorielle, permutations, arrangements, combinaisons,
propriétés des combinaisons, binôme de Newton, combinaisons avec répétition, méthode de choix de la bonne formule, schéma final et exemples pratiques.

Module :Statistiques descriptives et probabilités
Niveau : Licence 1
Année universitaire : 2025–2026
Auteur : Rahmani Naceur

April 14, 2026

Contents

1. Définition / Definition

Definition / Définition 1.1: Analyse combinatoire / Combinatorics

Français : L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques qui permet de compter le nombre de façons de choisir, ranger, organiser ou répartir des objets.
English: Combinatorics is the branch of mathematics that allows us to count the number of ways to choose, arrange, organize, or distribute objects.

Example / Exemple 1.1: Exemple simple / Simple example

Choisir 2 étudiants parmi 5.
Choose 2 students from 5.

2. Règles fondamentales de dénombrement / Basic Counting Rules

2.1. Principe additif / Addition Rule

Definition / Définition 2.1: Principe additif / Addition Rule

Français : Si une action peut être réalisée de m façons et une autre de n façons, sans chevauchement, alors le nombre total de possibilités est

$$m + n$$

English: If one action can be done in m ways and another in n ways, with no overlap, then the total number of possibilities is

$$m + n$$

Example / Exemple 2.1: Exemple / Example

On choisit soit 4 stylos, soit 3 cahiers :

$$4 + 3 = 7$$

We choose either 4 pens or 3 notebooks:

$$4 + 3 = 7$$

2.2. Principe multiplicatif / Multiplication Rule

Definition / Définition 2.2: Principe multiplicatif / Multiplication Rule

Français : Si une expérience se déroule en plusieurs étapes indépendantes, on multiplie les nombres de choix.
English: If an experiment is performed in several independent steps, we multiply the numbers of choices.

Example / Exemple 2.2: Exemple / Example

Former un code avec 2 lettres puis 3 chiffres :

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10$$

Form a code with 2 letters followed by 3 digits:

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10$$

3. Factorielle / Factorial

Definition / Définition 3.1: Factorielle / Factorial

Français : La factorielle de n, notée $n!$, est définie par

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

avec

$$0! = 1.$$

English: The factorial of n, denoted by $n!$, is defined by

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

with

$$0! = 1.$$

Example / Exemple 3.1: Exemple / Example

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

4. Permutations / Permutations

Definition / Définition 4.1: Permutation

Français : Une permutation est un rangement de tous les objets. Pour n objets distincts, le nombre de permutations est

$$P_n = n!$$

English: A permutation is an ordering of all objects. For n distinct objects, the number of permutations is

$$P_n = n!$$

Example / Exemple 4.1: Exemple / Example

Ranger 3 livres A, B, C :

$$3! = 6$$

Ordres possibles / Possible orderings:

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA$$

Remark / Remarque 4.1: Idée essentielle / Key idea

Français : Dans une permutation, on utilise tous les objets et l'ordre compte.
English: In a permutation, we use all objects and order matters.

5. Arrangements / Arrangements

Definition / Définition 5.1: Arrangement

Français : Un arrangement est un choix ordonné de p objets parmi n.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

English: An arrangement is an ordered selection of p objects from n.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Example / Exemple 5.1: Exemple / Example

Choisir 2 lettres parmi A, B, C, D avec ordre :

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

Choose 2 letters from A, B, C, D where order matters:

$$A_4^2 = 12$$

6. Combinaisons / Combinations

Definition / Définition 6.1: Combinaison / Combination

Français : Une combinaison est un choix de p objets parmi n, sans tenir compte de l'ordre.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

English: A combination is a selection of p objects from n, without considering order.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Example / Exemple 6.1: Exemple / Example

Choisir 2 étudiants parmi 4 :

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Choose 2 students from 4:

$$C_4^2 = 6$$

Remark / Remarque 6.1: Comparaison / Comparison

Français : Arrangement : l'ordre compte. Combinaison : l'ordre ne compte pas.
English: Arrangement: order matters. Combination: order does not matter.

7. Tableau récapitulatif / Summary Table

Français	English	Formule / Formula
Permutation : on range tous les objets	Permutation: arrange all objects	$n!$
Arrangement : ordre important	Arrangement: order matters	$\frac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison : ordre non important	Combination: order does not matter	$\frac{n!}{p!(n-p)!}$

8. Propriétés des combinaisons / Properties of Combinations

8.1. Symétrie / Symmetry

Property / Propriété 8.1: Symétrie / Symmetry

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Français : Choisir p objets revient à laisser $n-p$ objets.
English: Choosing p objects is equivalent to leaving out $n-p$ objects.

Example / Exemple 8.1: Exemple / Example

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

8.2. Relation de Pascal / Pascal's Rule

Property / Propriété 8.2: Relation de Pascal / Pascal's Rule

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Example / Exemple 8.2: Exemple / Example

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 6 + 4 = 10$$

9. Binôme de Newton / Binomial Theorem

Definition / Définition 9.1: Binôme de Newton / Binomial Theorem

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Example / Exemple 9.1: Exemple / Example

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

10. Combinaisons avec répétition / Combinations with Repetition

Definition / Définition 10.1: Combinaisons avec répétition / Combinations with Repetition

Français : Si on choisit p objets parmi n types avec répétition autorisée, alors

$$\binom{n+p-1}{p}$$

English: If we choose p objects from n types with repetition allowed, then

$$\binom{n+p-1}{p}$$

Example / Exemple 10.1: Exemple / Example

Choisir 4 bonbons parmi 3 parfums :

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Choose 4 candies from 3 flavors:

$$\binom{6}{4} = 15$$

11. Comment reconnaître la bonne formule / How to Choose the Right Formula

Remark / Remarque 11.1: Méthode / Method

Français : Pour choisir la bonne formule, il faut poser trois questions :

1. Est-ce qu'on prend tous les objets ?
2. Est-ce que l'ordre compte ?
3. Est-ce que la répétition est autorisée ?

English: To choose the correct formula, ask three questions:

1. Do we use all the objects?
2. Does order matter?
3. Is repetition allowed?

11.1. Cas 1 / Case 1

Definition / Définition 11.1: Tous les objets / All objects

$$n!$$

11.2. Cas 2 / Case 2

Definition / Définition 11.2: Pas tous les objets + ordre important / Not all objects + order matters

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

11.3. Cas 3 / Case 3

Definition / Définition 11.3: Pas tous les objets + ordre non important / Not all objects + order does not matter

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

11.4. Cas 4 / Case 4

Definition / Définition 11.4: Répétition autorisée / Repetition allowed

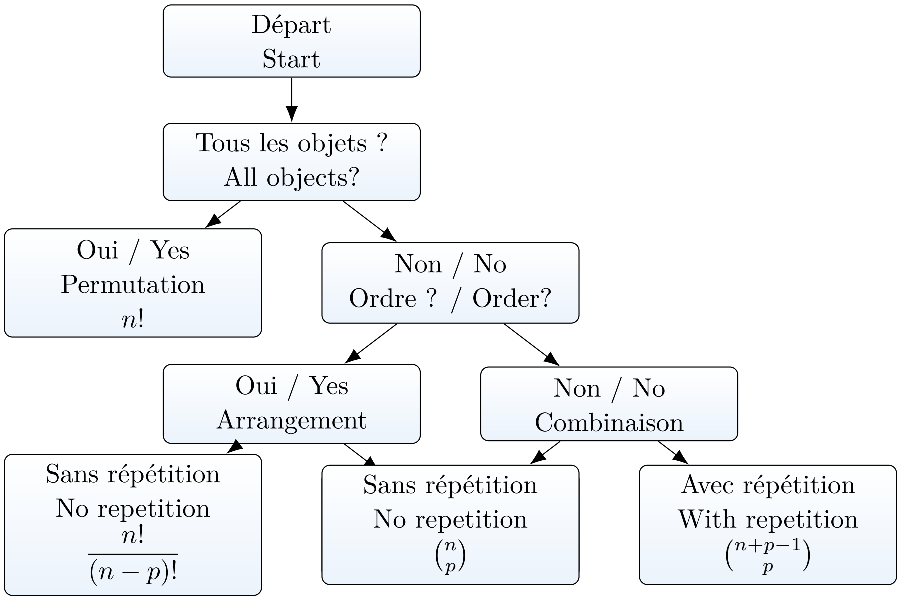
Ordre + répétition / Order + repetition:

$$n^p$$

Sans ordre + répétition / Without order + repetition:

$$\binom{n+p-1}{p}$$

12. Schéma final / Final Decision Diagram



13. Quelques exemples pratiques / Some Practical Examples

13.1. Code secret / Secret code

Example / Exemple 13.1: Exemple pratique 1 / Practical example 1

Question : Combien de codes de 4 chiffres peut-on former ?
Question: How many 4-digit codes can be formed?

Réponse / Answer :

$$10^4 = 10000$$

13.2. Comité / Committee

Example / Exemple 13.2: Exemple pratique 2 / Practical example 2

Question : Combien de comités de 3 personnes peut-on former parmi 8 personnes ?
Question: How many 3-person committees can be formed from 8 people?

Réponse / Answer :

$$\binom{8}{3} = 56$$

13.3. Président et secrétaire / President and secretary

Example / Exemple 13.3: Exemple pratique 3 / Practical example 3

Question : Combien de façons de choisir un président et un secrétaire parmi 7 personnes ?
Question: How many ways can we choose a president and a secretary from 7 people?

Réponse / Answer :

$$A_7^2 = 7 \times 6 = 42$$

13.4. Anagrammes / Anagrams

Example / Exemple 13.4: Exemple pratique 4 / Practical example 4

Question : Combien d'anagrammes du mot **MAMAN** ?
Question: How many anagrams of the word **MAMAN**?

Le mot contient 5 lettres avec répétitions : M deux fois et A deux fois.

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

13.5. Choix d'un menu / Menu choice

Example / Exemple 13.5: Exemple pratique 5 / Practical example 5

Question : Un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Combien de menus différents peut-on former ?
Question: A restaurant offers 3 starters, 4 main courses, and 2 desserts. How many different menus can be formed?

Réponse / Answer :

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

14. Résumé final / Final Summary

Résumé en français

- **Permutation** : on range tous les objets.
- **Arrangement** : on choisit avec ordre.
- **Combinaison** : on choisit sans ordre.
- **Avec répétition** : on utilise une formule spéciale.
- Les trois questions essentielles sont :
  - prend-on tous les objets ?
  - l'ordre compte-t-il ?
  - la répétition est-elle autorisée ?

Final summary in English

- **Permutation**: arrange all objects.
- **Arrangement**: choose with order.
- **Combination**: choose without order.
- **With repetition**: use a special formula.
- The three essential questions are:
  - do we use all objects?
  - does order matter?
  - is repetition allowed?

Formules essentielles / Essential formulas

$$n!, \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \qquad C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$n^p, \qquad \binom{n+p-1}{p}$$

Fin du document / End of document