Corrigé détaillé

Série de TD 04 d'analyse combinatoire

Dans chaque exercice, on justifie la méthode choisie :

— **Permutation** : on prend tous les objets et l'ordre compte.

— **Arrangement** : on ne prend pas tous les objets et l'ordre compte.

— **Combinaison** : on ne prend pas tous les objets et l'ordre ne compte pas.

— **Principe multiplicatif** : l'expérience se fait en plusieurs étapes indépendantes.

— **Combinaison avec répétition** : on choisit sans ordre et la répétition est autorisée.

— **Étoiles et barres** : pour compter les solutions entières naturelles d'une somme.

Formules utiles :

$$n!, \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \qquad C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$n^p, \qquad \binom{n+p-1}{p}$$

Exercice 1

Calculer :

$$3!, \quad 5!, \quad 7!, \quad \frac{6!}{4!}, \quad \frac{8!}{2!6!}$$

Ici, il n'y a pas de choix combinatoire à faire : on applique simplement la définition de la factorielle et les simplifications algébriques.

$$3! = 6, \qquad 5! = 120, \qquad 7! = 5040$$

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$$

$$\frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 28$$

Réponse :

$$6, \quad 120, \quad 5040, \quad 30, \quad 28$$

Exercice 2

Combien peut-on former de mots de 3 lettres distinctes avec A, B, C, D, E ?

Justification : on choisit **3 lettres parmi 5**, donc on ne prend pas tout l'ensemble. De plus, l'ordre compte : par exemple $ABC \neq BAC$. Donc on utilise un **arrangement**.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Réponse :

$$60$$

Exercice 3

Combien peut-on former de nombres de 4 chiffres distincts avec $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Justification : on choisit **4 chiffres parmi 6**, donc on ne prend pas tout. L'ordre compte, car $1234 \neq 4321$. C'est donc un **arrangement** sans répétition.

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Réponse :

$$360$$

Exercice 4

Combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur une étagère ?

Justification : on range **tous les 6 livres**. Comme on prend tous les objets et que l'ordre compte, c'est une **permutation**.

$$6! = 720$$

Réponse :

$$720$$

Exercice 5

Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots **TABLE** puis **MAMAN** ?

1) TABLE
Justification : on utilise toutes les lettres du mot, et l'ordre compte. Comme toutes les lettres sont différentes, c'est une **permutation simple**.

$$5! = 120$$

2) MAMAN
Justification : on utilise toutes les lettres, donc c'est encore une permutation, mais avec répétitions :

— M apparaît 2 fois,

— A apparaît 2 fois.

Donc :

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{120}{4} = 30$$

Réponse :

$$TABLE : 120 \qquad MAMAN : 30$$

Exercice 6

Dans une classe de 12 étudiants, on choisit un président, un vice-président et un secrétaire.

Justification : on choisit 3 personnes parmi 12, donc on ne prend pas tout le groupe. L'ordre compte, car les rôles sont différents. Par exemple, choisir A président et B secrétaire n'est pas la même chose que B président et A secrétaire. Donc c'est un **arrangement**.

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

Réponse :

1320

Exercice 7

Dans un groupe de 15 personnes, combien de comités de 4 personnes peut-on former ?

Justification : on choisit 4 personnes parmi 15, mais dans un comité les rôles ne sont pas précisés. Donc l'ordre ne compte pas. C'est une **combinaison**.

$$C_{15}^{4} = \frac{15!}{4!11!} = 1365$$

Réponse :

1365

Exercice 8

Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet :

1. sans répétition,
2. avec répétition ?

1) Sans répétition
Justification : on choisit 4 lettres parmi 26, et l'ordre compte. Donc c'est un **arrangement**.

$$A_{26}^{4} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358800$$

2) Avec répétition
Justification : chaque place peut être choisie indépendamment parmi 26 lettres. On applique le **principe multiplicatif** :

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4 = 456976$$

Réponse :

358800 456976

Exercice 9

Combien de codes secrets de 5 chiffres peut-on former :

1. si la répétition est autorisée,
2. si la répétition n'est pas autorisée ?

1) Répétition autorisée
Justification : un code comporte 5 positions, et chaque position peut être remplie par l'un des 10 chiffres. On applique le **principe multiplicatif** :

$$10^5 = 100000$$

2) Répétition interdite
Justification : on choisit 5 chiffres parmi 10, et l'ordre compte dans le code. Donc c'est un **arrangement** :

$$A_{10}^{5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

Réponse :

100000 30240

Exercice 10

On lance 3 pièces de monnaie. Combien de résultats possibles existe-t-il ? Écrire tous les cas.

Justification : chaque pièce a 2 issues possibles : Pile ou Face. Les lancers sont indépendants. On applique le **principe multiplicatif** :

$$2^3 = 8$$

Les cas possibles sont :

$$PPP,\ PPF,\ PFP,\ PFF,\ FPP,\ FPF,\ FFP,\ FFF$$

Réponse :

8

Exercice 11

On lance 2 dés. Combien de résultats possibles existe-t-il ? Combien de résultats donnent une somme égale à 7 ?

Nombre total de résultats
Justification : chaque dé a 6 faces, et les deux lancers sont indépendants. Principe multiplicatif :

$$6 \times 6 = 36$$

Somme égale à 7
Les couples possibles sont :

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

Il y en a 6.
Réponse :

$$36 \qquad 6$$

Exercice 12

Dans une promotion de 10 garçons et 8 filles, combien de groupes de 5 étudiants peut-on former contenant :

1. exactement 2 filles,
2. exactement 3 garçons,
3. au moins 1 fille ?

1) Exactement 2 filles
Justification : on choisit :

- 2 filles parmi 8 : combinaison,
- 3 garçons parmi 10 : combinaison.

Puis on multiplie les deux choix indépendants :

$$C_8^2 \times C_{10}^3 = 28 \times 120 = 3360$$

2) Exactement 3 garçons
Même raisonnement :

$$C_{10}^3 \times C_8^2 = 3360$$

3) Au moins 1 fille
Justification : on compte :

$$\text{tous les groupes de 5} - \text{groupes sans fille}$$

$$C_{18}^5 - C_{10}^5 = 8568 - 252 = 8316$$

Réponse :

$$3360, \qquad 3360, \qquad 8316$$

Exercice 13

Combien de solutions entières naturelles a l'équation

$$x + y + z = 6$$

Justification : on cherche le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que la somme vaut 6. C'est un problème classique de **répartition** ou de **solutions entières naturelles**. On utilise la méthode des **étoiles et barres** :

$$\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

Réponse :

$$28$$

Exercice 14

Combien de solutions entières naturelles a l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

Justification : même idée que l'exercice précédent. On répartit 8 unités entre 4 variables naturelles. Méthode des **étoiles et barres** :

$$\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$$

Réponse :

$$165$$

Exercice 15

Développer en utilisant le binôme de Newton :

$$(a+b)^4 \qquad \text{puis} \qquad (x+2)^5$$

Justification : on demande explicitement un développement par le **binôme de Newton** :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Alors :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Et :

$$(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Réponse :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Exercice 16

Vérifier la relation de Pascal :

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1} \qquad \text{et} \qquad \binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

Justification : il faut simplement calculer les deux membres de chaque égalité.

$$\binom{6}{2} = 15, \qquad \binom{5}{2} = 10, \qquad \binom{5}{1} = 5$$

Donc :

$$15 = 10 + 5$$

Puis :

$$\binom{7}{3} = 35, \qquad \binom{6}{3} = 20, \qquad \binom{6}{2} = 15$$

Donc :

$$35 = 20 + 15$$

Réponse : les deux relations sont vérifiées.

Exercice 17

Montrer que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

puis vérifier cette égalité pour $n = 8,\ p = 3$.

Justification : on part de la formule générale :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Or le produit au dénominateur est symétrique, donc :

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{n-p}$$

Vérification :

$$\binom{8}{3} = 56, \qquad \binom{8}{5} = 56$$

Réponse :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$$

Exercice 18

Un restaurant propose 3 entrées, 5 plats et 4 desserts. Combien de menus différents peut-on composer ?

Justification : le choix d'un menu se fait en **3 étapes indépendantes** :

— choisir une entrée,

— choisir un plat,

— choisir un dessert.

On applique donc le **principe multiplicatif** :

$$3 \times 5 \times 4 = 60$$

Réponse :

$$60$$

Exercice 19

Combien de façons peut-on choisir 6 bonbons parmi 3 parfums différents si la répétition est autorisée ?

Justification :

— on choisit des bonbons parmi 3 types,

— l'ordre ne compte pas,

— la répétition est autorisée.

Donc on utilise une **combinaison avec répétition** :

$$\binom{n+p-1}{p}$$

avec $n = 3$ et $p = 6$, donc :

$$\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$$

Réponse :

$$28$$

Exercice 20

Dans une bibliothèque de 9 livres différents, combien de façons peut-on choisir 3 livres puis les ranger ?

Justification :

- on choisit 3 livres parmi 9,
- puis on les range,
- donc l'ordre final compte.

Comme on ne prend pas tous les livres mais que l'ordre compte, c'est un **arrangement**.

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

On peut aussi raisonner en deux étapes :

$$C_9^3 \times 3! = 84 \times 6 = 504$$

Réponse :

$$504$$

Résumé final

1) $6,\ 120,\ 5040,\ 30,\ 28$
2) 60
3) 360
4) 720
5) $120,\ 30$
6) 1320
7) 1365
8) $358800,\ 456976$
9) $100000,\ 30240$
10) 8
11) $36,\ 6$
12) $3360,\ 3360,\ 8316$
13) 28
14) 165
15) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
    $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
16) relations vérifiées
17) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p},\ \binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$
18) 60
19) 28
20) 504