

**Corrigé-type de l'examen**

**Exercice 1 (ACP, 12 pts)**

1) La somme de la diagonale de la matrice  $R$  est égale à 3, donc la somme des valeurs propres vaut 3. Ainsi

$$\lambda_3 = 3 - (1.619 + 1.17) = 0.211.$$

2) La matrice de corrélation est:

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0.474 & -0.171 \\ 0.474 & 1 & x \\ -0.171 & x & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } x \geq 0.$$

On sait que le déterminant de  $R$  est égale au produit de ces valeurs propres, ce qui implique que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0.474 & -0.171 \\ 0.474 & 1 & x \\ -0.171 & x & 1 \end{vmatrix} = 1.619 \times 1.17 \times 0.211 = 0.399,$$

ce qui donne  $-x^2 - 0.162x + 0.746 = 0.399 \Leftrightarrow x^2 + 0.162x - 0.347 = 0$ . Les deux solutions de cette équation sont:  $x_1 = 0.513$  et  $x_2 = -0.675$ . Comme  $x \geq 0$ , alors  $x = 0.513$ , par conséquent

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.474 & -0.171 \\ 0.474 & 1 & 0.513 \\ -0.171 & 0.513 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de corrélations des trois types de minéraux (centrés-réduits) avec les composantes principales est:

$$M := \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline \text{Calcium} & 0.552 & 0.799 & 0.235 \\ \text{Magnésium} & 0.952 & 0.024 & -0.303 \\ \text{Sodium} & 0.637 & -0.728 & 0.248 \end{array}.$$

3) On note par  $u_1 := (u_{11}, u_{12}, u_{13})^t$  le premier vecteur propre de la matrice  $R$  associé à  $\lambda_1 = 1.619$ . Nous avons

$$\text{Cor}(X_1, c_k) = \sqrt{\lambda_k} u_{1k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

avec  $X_1 \equiv \text{Calcium}$ . Ce qui implique que

$$u_{1k} = \frac{\text{Cor}(X_1, c_k)}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ainsi

$$u_{11} = \frac{0.552}{\sqrt{1.619}}, \quad u_{12} = \frac{0.799}{\sqrt{1.17}}, \quad u_{13} = \frac{0.235}{\sqrt{0.211}},$$

ce qui donne

$$u_{11} = 0.433, \quad u_{12} = 0.738, \quad u_{13} = 0.511,$$

par conséquent

$$u_1 := (0.433, 0.738, 0.511)^t.$$

4) Nous avons  $\sum_{k=1}^3 \text{Cor}^2(X_j, c_k) = 1$ , pour chaque  $j = 1, 2, 3$ , Donc  $\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \text{Cor}^2(X_j, c_k) = 3$ .

5) Pour la représentation graphique, nous avons en plus besoin des pourcentage d'inerties expliquées par les deux premiers axes principaux:

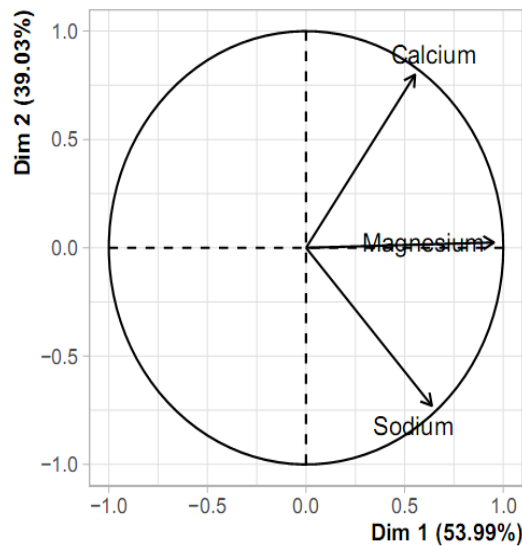
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \% = \frac{1.619}{1.619 + 1.170 + 0.211} \% = 53.99\%$$

et

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \% = \frac{1.170}{1.619 + 1.170 + 0.211} \% = 39.03\%,$$

respectivement, ainsi le pourcentage d'inertie expliquée par le premier plan principal est, approximativement, égale à  $(54 + 39) \% = 89\%$ . Le cercle de corrélation représentant les trois minéraux est donnée par:

Cercle de corrélation: représentation des minéraux



#### Discussion:

- 1) Le calcium et le sodium sont presque orthogonaux, ce qui signifie que ces deux minéraux sont non corrélés entre eux.
- 2) Les normes des trois minéraux sont presque égales à l'unité ( $= 1$ ), ce qui explique que ces derniers sont parfaitement représentés dans le premier plan principal. Autrement dit, leurs corrélations avec la troisième composante principale  $c_3$  sont nulles.
- 3) Le magnésium est fortement corrélé avec  $c_1$  et non corrélé avec  $c_2$ .
- 4) Le magnésium a une corrélation positive modérée avec le calcium et une corrélation négative modérée avec le sodium.

#### Exercice 2 (AFC, 08 pts)

1. Les valeurs propres de la matrice  $V_r M_r$  sont: (1pt)  
a) distinctes; b) strictement positives; c)  $\leq 1$ .
2. La plus grande valeur propre de la matrice  $A_r$  représente: (1pt)  
a) L'inertie expliquée par le premier axe principal. (fausse)  
b) L'inertie par rapport au premier axe principal. (fausse)
3. Les éléments de la matrice des profils-lignes sont: (1pt)  
a)  $n_{ij}/n_i$ ; b)  $n_{ij}/n_{.j}$ .
4. Les colonnes de la matrice des profils-lignes sont: (1pt)  
a) indépendants; b) corrélés. (les deux fausses)
5. Les valeurs propres de la matrice  $M_r V_r M_r$  sont: (1pt)  
a) distinctes; b) pas nécessairement. (car  $M_r V_r M_r$  est symétrique)
6. La valeur observée de la statistique de khi-deux: (1pt)  
a) implique l'indépendance ou la dépendance des deux variables. (fausse)  
b) implique la corrélation des deux variables. (fausse)
7. Le centre de gravité  $g_r$  est un vecteur propre de la matrice  $A_r$  associé à la valeur propre: (1pt)  
a) 0; b) 1.
8. Peut-on réaliser des cercles de corrélations en AFC? (1pt)  
a) oui; b) non.