

Corrigé-type de l'examen

Exercice 1 (ACP, 12 pts)

La matrice de corrélation associée au tableau de donné est

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0.474 & -0.171 \\ 0.474 & 1 & 0.514 \\ -0.171 & 0.514 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres normés de la matrice R associés aux valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ sont:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0.434 \\ 0.748 \\ x \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 0.738 \\ y \\ -0.673 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} z \\ -0.662 \\ t \end{pmatrix},$$

avec $x, y \geq 0$.

1) Rappelons que $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$. Donc

$$(0.434)^2 + (0.748)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{0.25214} \Rightarrow \mathbf{x = 0.502}, \text{ car } x \geq 0,$$

et

$$(0.738)^2 + y^2 + (-0.673)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 2.427 \times 10^{-3} \Rightarrow \mathbf{y = 0.049}, \text{ car } y \geq 0.$$

En outre nous avons $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$. Donc

$$\langle u_3, u_2 \rangle = 0.738 \times z - 0.662 \times 0.049 - 0.673 \times t = 0$$

et

$$\langle u_3, u_1 \rangle = 0.434 \times z - 0.662 \times 0.748 + 0.502 \times t = 0.$$

La solution de ce système est $\mathbf{t = 0.530}$, $\mathbf{z = 0.527}$.

Les composantes principales associées à cette analyse sont:

| c_1 | c_2 | c_3 |
|--------|--------|--------|
| 0.836 | b | 0.112 |
| -1.763 | 0.314 | 0.059 |
| 2.2 | -1.418 | 0.356 |
| 0.988 | 0.25 | 0.289 |
| -0.737 | 0.702 | 0.512 |
| -0.271 | 1.828 | 0.166 |
| -2.009 | -2.111 | 0.01 |
| a | 0.205 | -0.415 |
| 0.447 | c | -1.091 |

2) Rappelons aussi que les composantes principales sont centrées. Donc

$$0.836 - 1.763 \cdot 2.2 + 0.988 - 0.737 - 0.271 - 2.009 + a + 0.447 = 0,$$

ce qui donne $\mathbf{a = 0.309}$. De même

$$b + 0.314 - 1.418 + 0.25 + 0.702 + 1.828 - 2.111 + 0.205 + c = 0,$$

ce qui implique

$$b + c = 0.23. \tag{1}$$

En outre les composantes principales sont non corrélées entre elles, ainsi donc $cov(c_2, c_1) = 0$. En d'autres termes

$$\begin{aligned} & 0.836 \times b + (-1.763) \times 0.314 + 2.2 \times (-1.418) + 0.988 \times 0.25 + (-0.737) \times 0.702 \\ & + (-0.271) \times 1.828 + (-2.009) \times (-2.111) + 0.309 \times 0.205 + 0.447 \times c \\ & = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$0.836b + 0.447c = 0.1346. \quad (2)$$

La solution du système (1, 2) donne $\mathbf{b} = \mathbf{0.081}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{0.148}$.

3) Les variances des composantes principales égales aux respectives valeurs propres.

$$\begin{aligned} \text{var}(c_1) &= \frac{1}{9} \left((0.836)^2 + (-1.763)^2 + (2.2)^2 + (0.988)^2 + (-0.737)^2 \right. \\ & \quad \left. + (-0.271)^2 + (-2.009)^2 + (\mathbf{0.309})^2 + (0.447)^2 \right) \\ &= 1.619 = \lambda_1. \end{aligned}$$

Par la même la manière, on trouve $\text{var}(c_2) = 1.170 = \lambda_2$. La trace de la matrice $R = 3$ et d'un autre côté égale à la somme des ces valeurs propres, donc: $1.619 + 1.170 + \lambda_3 = 3$, ce qui résulte $\lambda_3 = 0.211$.

4) Les axes principaux associés à cette ACP sont respectivement: $E_i = \text{vect}\{u_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

5) Les pourcentage d'inerties expliquées par les deux premiers axes principaux sont:

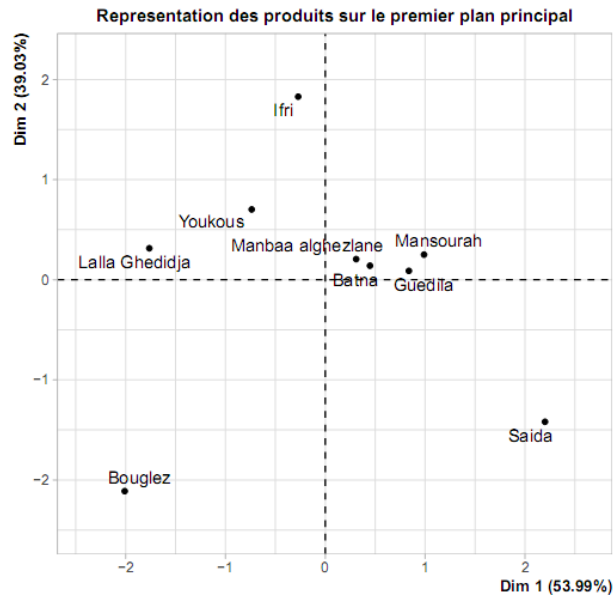
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \% = \frac{1.619}{1.619 + 1.170 + 0.211} \% = 53.99\%$$

et

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \% = \frac{1.170}{1.619 + 1.170 + 0.211} \% = 39.03\%,$$

respectivement. Ainsi le pourcentage d'inertie expliquée par le premier plan principal est $(54 + 39) \% = 89\%$. Ce qui signifie que la représentation des produits sur ce plan est presque parfaite.

6) Représentation des neuf produits sur le premier plan principal (1, 2) :



Discussion: on remarque que les deux produits "Manbaa alghezlane" et "Batna" ont presque la même structure en termes des trois minéraux "calcium", "magnésium" et "sodium". La même remarque pour les deux produits "Mansourah" et "Ghedila". Tandis que les autres produits ne possèdent pas la même structure en termes de ces trois minéraux.

Exercice 2 (AFC, 8 pts)

1. *Etant donné un tableau dont les lignes représentent les classes d'âges et les colonnes représentent les types de loisirs. Nous avons affaire à une:*(1pt)

- a) analyse factorielle des correspondances (AFC). ✓
- c) analyse en composante principale (ACP).

2. **La matrice associée au tableau des profils-lignes (PL) est:**(1pt)

- a) carrée; b) symétrique. (n'est pas forcément carrée ni symétrique)

3. **La représentation d'AFC associée à un tableau de contingence (10×2), se fait dans un repère à:**(1pt)

- a) deux dimensions; b) ✓ une dimension; c) dix dimensions.

4. **Les éléments de la matrice des fréquences théoriques sont:**(1pt)

- a) $n_i.n_j/n$; b) ✓ $n_i.n_j/n^2$.

5. **Les deux variables associées à un tableau de contingence sont:**(1pt)

- a) indépendantes; b) dépendantes; c) ✓ pas nécessairement.

6. **La matrice $V_r M_r$ est:**(1pt)

- a) inversible; b) ✓ n'est pas inversible c) pas nécessairement.

7. **La matrice A_r est:**(1pt)

- a) inversible; b) n'est pas inversible c) ✓ pas nécessairement.

8. **Le centre de gravité g_r est:**(1pt)

- a) ✓ centré; b) n'est pas centré; c) pas nécessairement.