سلسلة تمارين رقم 5

التمرين الأول:

لتكن الجملة التالية

$$(S)\begin{cases}-x+2y-z=1\\ 5x-2z=-1\\ 3y+2z=4\end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجملة ثم أوجد الحلول بطريقة كرامر

التمرين الثاني:

لتكن الجملة التالية

$$(S)\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x+z=-1\\ 2x+y-z=2\end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجملة ثم أوجد الحلول بطريقة المقلوب

(

التمرين الرابع:

لتكن الجملة التالية

$$(S)\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\ x+(\lambda+1)y+z=1\\ x+y+(\lambda+1)z=1\end{cases}$$

أكتب الشكل المصفوفي للجملة

أوجد القيم λ التي من أجلها تكون الجملة التالية لكرامر

من أجل $\lambda=0$ ادرس الجملة

التمرين الخامس:

لتكن المصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{pmatrix};A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

سماقجي محمد الهادي
سلسلة تمارين الخاصة بالسنة الاولى علوم اقتصادية و علوم التسيير

أوجد القيم الذاتية في $\mathbb{R}$و الاشعة الذاتية

تمرين السادس:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

أحسب الجداء $A.D$ ثم حل الجملة $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

حـل سلسلـة تمـاريـن رقـم 5

حل التمرين الاول:

تذكير: تكون الجملة جملة كرامر إذا وفقط إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة و محددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} -x+2y-z=1 \\ 5x-2z=-1 \\ 3y+2z=4 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

من الواضح ان المصفوفة A مربعة بقي ان نحسب محددها:

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-41 \neq 0$$

المصفوفة مربعة و محددها غير معدوم و بالتالي الجملة هي لكرامر.

حل الجملة:

تذكير: إذا كانت الجملة لكرامر فهي تملك حل وحيد يحسب بالطريقة التالية:

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}; i=1,\dots,n$$

حيث x_i هي المجاهيل أما Δ فهو محدد المصفوفة المرافقة للجملة و Δ_{x_i} هو محدد المصفوفة المرافقة للجملة لكن باستبدال العمود رقم i بالشعاع B في كل مرة.

و عليه فإن حلول الجملة المعطاة هي:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}; z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

يكفي حساب المحددات التالية:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-3;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-36; \Delta_z=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-28$$

و منه الحلول هي:

$$x=\frac{-3}{-41}=\frac{3}{41};; y=\frac{-36}{-41}=\frac{36}{41}; z=\frac{-28}{-41}=\frac{28}{41}$$

و من تم مجموعة الحلول هي: $S=\left\{\left(\frac{3}{41},\frac{36}{41},\frac{28}{41}\right)\right\}$.

حل التمرين الثاني:

تذكير: تكون الجملة جملة قابلة للحل بطريقة المقلوب إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة و محددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=-1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1 \neq 0$$

المصفوفة مربعة و محددها غير معدوم و بالتالي الجملة تقبل حل وحيد نستعمل في هذا التمرين طريقة المقلوب في حلها و هو معطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \Leftrightarrow X=A^{-1}B$$

أي نقوم بحساب A^{-1} ثم إجراء الجداء $A^{-1}B$

حساب A^{-1}:

لدينا:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(com(A)\right)^{T}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

بقي الان حساب فقط الجداء $A^{-1}B$ فنحصل على الحل المطلوب:

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

و من تم مجموعة الحلول هي: $S=\{(1,-3,-3)\}$.

حل التمرين الثالث:

ة.

(

:

((

1

الان نكتب المصفوفة الموسعة ي $(A|B)$:

ر

8
5
2

(

نقوم بضرب السطر الاول في العدد -2 ثم ن ى اس ر ا اني و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثاني, ثم نضرب السطر الاول في العدد -3 و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثالث, ثم نضرب السطر الاول في العدد -4 و نضيفه للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الرابع فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -11\\ 0 & -6 & 2 & -22\\ 0 & -6 & 1 & -1\end{array}\right)$$

الان نضرب السطر الثالث في العدد -1 و نضيفه للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الثاني من السطر الرابع:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -11\\ 0 & -6 & 2 & -22\\ 0 & 0 & -1 & -11\end{array}\right)$$

نلاحظ جيدا أن السطر الثاني و الثالث متساويان و بالتالي نضرب السطر الثاني في العدد -1 و نضيفه للسطر الرابع نجد:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -11\\ 0 & -6 & 2 & -22\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

نلاحظ امران:

أحدهما هو ان: $rg(A)=rg(A|B)$

و الامر الثاني أن رتبة المصفوفة يساوي عدد المجاهيل

نتيجة: نستنتج ان الجملة تملك حلا وحيدا.

نكتب الجملة المكافئة للجملة

$$(S)\sim\begin{cases}x+y-z=8\\ -z=-11\\ -6y+2z=-22\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد ان: $z=11$ نعوض في المعادلة الثالثة نجد ان $y=\frac{11}{2}$ ثم نعوض القيمتين في المعادلة الاولى فنجد $x=\frac{27}{2}$

و بالتالي فإن مجموعة الحلول هي: $\left\{\left(\frac{27}{2},\frac{11}{2},11\right)\right\}$.

$$(S)\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x-2y+z=3\\ 3x-y=5\end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

د

ر

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

الان نكتب المصفوفة الموسعة و التي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الاول في العدد $2-$ ثم نضيفه الى السطر الثاني و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثاني, ثم نضرب السطر الاول في العدد $3-$ و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثالث, فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

الان نضرب السطر الثاني في العدد $1-$ و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الثاني من السطر الثالث:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نلاحظ جيدا أن السطر الثاني و الثالث متساويان و بالتالي نضرب السطر الثاني في العدد $1-$ و نضيفه للسطر الرابع نجد:

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نلاحظ ان: $rg(A) \neq rg(A|B)$

نتيجة: نستنتج ان الجملة مستحيلة و بالتالي فهي لا تملك حلا.

$$(S) \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 6y - 5z = 7 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \\ 5x + 10y - 8z = 12 \end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S) \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 10 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

الان نكتب المصفوفة الموسعة و التي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 12 \end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الاول في العدد $3-$ ثم نضيفه الى السطر الثاني و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثاني, ثم نضرب السطر الاول في العدد $2-$ و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الثالث, ثم نضرب السطر الاول في

العدد -5 و نضيفه للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الاول من السطر الرابع فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)$$

الان نضرب السطر الثاني في العدد -1 و نضيفه للسطر الثالث و هذا كي ينعدم العنصر الثالث من السطر الثالث و نضرب السطر الثاني في العدد -2 و نضيفها للسطر الرابع و هذا كي ينعدم العنصر الثالث من السطر الرابع فنجد في النهاية:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

نلاحظ امران:

أحدهما هو ان: $rg(A) = rg(A|B)$

و الامر الثاني أن رتبة المصفوفة اقل من عدد المجاهيل.

نتيجة: نستنتج ان الجملة تملك عددا غير منتهي من الحلول.

عدد المجاهيل الحرة هو $n - rg(A) = 3 - 2 = 1$

نكتب الجملة المكافئة للجملة

$$(S)\sim\begin{cases}x + 2y - 2z = 2\\ z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 4\\ z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4 - 2y\\ z = 1\end{cases}$$

و بالتالي فإن مجموعة الحلول هي: $S = \{(,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4 - 2y \wedge z = 1\}$.

حل التمرين الرابع:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

حساب الجداء $A.D$

$$AD = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow D = A^{-1}$$

استنتاج حل الجملة $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

$$(S)\begin{cases}2x + y - z = 1\\ 2y + z = 2\\ 5x + 2y - 3z = 3\end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X} = A^{-1}B$$

و بالتالي:

$$\mathrm{X} = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 3\\ -4\end{pmatrix}$$

و منه مجموعة الحلول هي: $S = \{(-3,3,-4)\}$.