المحور الثالث: التحليل بالمركبات الأساسية PCA

التحليل بالمركبات الأساسية ($Principal\ Component\ Analysis$) هو تقنية إحصائية تهدف إلى تقليل الأبعاد مع الحفاظ على أكبر قدر ممكن من التباين، وذلك من خلال تحويل مجموعة من المتغيرات المترابطة فيما بينها إلى مجموعة من المتغيرات الجديدة غير المترابطة، تعرف بالمركبات الأساسية (المكونات الرئيسية).

1. خطوات تطبيق التحليل بالمركبات الأساسية

1.1. توحيد (تطبيع) البيانات $Data\ Normalization$

نلجأ إلى توحيد البيانات في حال كانت هذه البيانات غير متجانسة من حيث وحدات القياس أو كانت تتفاوت في المدى. توجد عدة طرق لتوحيد البيانات، أشهرها:

- **التوحيد المعياري:** أي باستخدام الوسط الحسابي والانحراف المعياري، تهدف هذه الطريقة إلى تحويل كل متغير بحيث يصبح وسطه الحسابي 0 وانحرافه المعياري 1. وذلك من خلال تطبيق العلاقة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{X_{cr}} = \frac{\boldsymbol{X - \mu}}{\boldsymbol{\sigma}}$$

حيث:

X: البيانات الأصلية

X_{cr}: البيانات بعد التحويل

μ: المتوسط الحسابي لـ X

σ: الانحراف المعياري لـ X

مثال 01: لتكن مصفوفة البيانات الأصلية لثلاث متغيرات X_1،X_2 و X_3 على التوالي، كما يلي:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1.5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3.5 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة الممركزة X_c**

$$X_c = X - \mu$$

$$\mu_1 = \bar{X}_1 = \frac{\sum X}{n} = \frac{14}{4} = 3.5, \quad \mu_2 = 4.375, \quad \mu_3 = 2.625$$

$$X_c = \begin{pmatrix} -1.5 & -1.375 & -1.125 \\ 0.5 & 0.625 & 0.375 \\ -0.5 & -0.875 & -0.625 \\ 1.5 & 1.625 & 1.375 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة المعيارية X_{cr}**

$$X_{cr} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{n}} = 1.118, \quad \sigma_2 = 1.192, \quad \sigma_3 = 0.96$$

$$X_{cr} = \begin{pmatrix} -1.34 & -1.15 & -1.17 \\ 0.45 & 0.52 & 0.39 \\ -0.45 & -0.73 & -0.65 \\ 1.34 & 1.36 & 1.43 \end{pmatrix}$$

2.1. إيجاد المصفوفات الأساسية للتحليل

تعد المصفوفات الأساسية أدوات مهمة في التحليل الإحصائي متعدد الأبعاد وخاصة في تقنية التحليل بالمركبات الرئيسية، تهتم هذه المصفوفات بتمثيل العلاقات بين المتغيرات المختلفة في مجموعة البيانات، حيث تعتبر وسيلة لفهم مدى التباينات أو الارتباطات بين المتغيرات. هناك نوعان أساسيان من المصفوفات التي سنستخدمها في تحليل PCA:

1.2.1. مصفوفة التباينات $Covariance\ Matrix$: هي مصفوفة مربعة متناظرة، تتمثل عناصرها في التباينات المشتركة بين كل زوج من المتغيرات، تكون من الشكل:

$$V = \Sigma = \begin{pmatrix} V(x_1) & \cdots & Cov(x_1, x_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(x_k, x_1) & \cdots & V(x_k) \end{pmatrix}$$

حيث:

k: عدد المتغيرات $i = \overline{1, k}$

$V(x_i)$: تباين المتغير x_i. يحسب بالعلاقة التالية:

$$V(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \mu)^2}{n}$$

$Cov(x_i, x_{i+h})$: التباين المشترك بين x_i و x_{i+h}. يحسب بالعلاقة التالية:

$$Cov(x_i, x_{i+h}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \mu)(x_{(i+h)j} - \mu)}{n}$$

n: عدد المشاهدات $j = \overline{1, n}$

h: عدد حقيقي.

يمكن حساب مصفوفة التباينات انطلاقا من مصفوفة البيانات الأصلية، بالعلاقة التالية:

$$V = X_c^T . P . X_c = \frac{1}{n} X_c^T . X_c$$

حيث:

X: مصفوفة البيانات الأصلية.

X_c: مصفوفة البيانات الممركزة:

$$X_c = X - \mu$$

X_c^T: المصفوفة الممركزة المنقولة.

P: مصفوفة الأوزان:

$$P = \frac{1}{n} I_n$$

n: عدد المشاهدات.

- **حساب مصفوفة التباينات للمثال 01:**

$$V = X_c^T . P . X_c$$

$$V = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 & -0.5 & 1.5 \\ -1.375 & 0.625 & -0.875 & 1.625 \\ -1.125 & 0.375 & -0.625 & 1.375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1.5 & -1.375 & -1.125 \\ 0.5 & 0.625 & 0.375 \\ -0.5 & -0.875 & -0.625 \\ 1.5 & 1.625 & 1.375 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1.25 & 1.313 & 1.063 \\ 1.313 & 1.422 & 1.141 \\ 1.063 & 1.141 & 0.922 \end{pmatrix}$$

2.2.1. مصفوفة الارتباطات $Correlation\ Matrix$: هي مصفوفة مربعة متناظرة، عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1، أما باقي العناصر فتتمثل في معاملات الارتباطات بين كل زوج من المتغيرات. تكون من الشكل:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r_{x_1,x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{x_k,x_1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

حيث:

k: عدد المتغيرات $i = \overline{1,k}$

$r_{x_i,x_{i+h}}$: معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين x_i وx_{i+h}. يحسب بالعلاقة التالية:

$$r_{x_i,x_{i+h}} = \frac{Cov(x_i,x_{i+h})}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_{i+h}}}$$

يمكن حساب مصفوفة الارتباطات انطلاقا من مصفوفة البيانات الأصلية، بالعلاقة التالية:

$$R = X_{cr}^T.P.X_{cr} = \frac{1}{n}X_{cr}^T.X_{cr}$$

حيث:

X_{cr}: المصفوفة المعيارية (المختصرة):

$$X_{cr} = \frac{X-\mu}{\sigma_X}$$

X_{cr}^T: المصفوفة المختصرة المنقولة.

P: مصفوفة الأوزان:

$$P = \frac{1}{n}I_n$$

n: عدد المشاهدات.

- حساب مصفوفة الارتباطات للمثال 01:

$$R = X_{cr}^T.P.X_{cr}$$

$$R=\begin{pmatrix}-1.34 & 0.45 & -0.45 & 1.34\\ -1.15 & 0.52 & -0.73 & 1.36\\ -1.17 & 0.39 & -0.65 & 1.43\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1.34 & -1.15 & -1.17\\ 0.45 & 0.52 & 0.39\\ -0.45 & -0.73 & -0.65\\ 1.34 & 1.36 & 1.43\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0.984 & 0.990\\ 0.984 & 1 & 0.996\\ 0.990 & 0.996 & 1\end{pmatrix}$$

ملاحظة: في حالة البيانات المتجانسة، أي نفس وحدات القياس وتقارب في الانحرافات بين المتغيرات $\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} < 5\right)$، نعتمد على مصفوفة التباينات في تطبيق PCA، وفي حالة البيانات غير المتجانسة نعتمد على مصفوفة الارتباطات في تطبيق PCA.

3.1. حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

1.3.1. حساب القيم الذاتية

في تحليل المكونات الرئيسية، القيم الذاتية تمثل أهمية المركبات الأساسية ومدى مساهمتها في تفسير التباين الكلي للبيانات، حيث كل قيمة ذاتية تعبر عن مقدار التباين في البيانات الذي يشرحه هذا المكون، كلما كانت القيمة الذاتية أكبر، كان المكون أكثر أهمية في تفسير التباين. يتم حساب القيم الذاتية انطلاقا من مصفوفة التباينات أو مصفوفة الارتباطات، من خلال إيجاد حلول للمعادلات التالية:

$$P_V(\lambda)= det(V-\lambda I)=0$$

أو

$$P_R(\lambda)=det(R-\lambda I)$$

ملاحظة: في حالة الاعتماد على مصفوفة التباينات فإن مجموع القيم الذاتية يساوي مجموع التباين في البيانات الأصلية (التباين الكلي= العطالة الإجمالية= القصور الكلي= $Inertie$):

$$Inertie=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=\sum_{i=1}^{k}V(x_i)$$

وفي حالة الاعتماد على مصفوفة الارتباطات فإن مجموع القيم الذاتية يساوي عدد القيم الذاتية ويساوي عدد المتغيرات في البيانات الأصلية:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = k$$

- **مثال 02:** لتكن مصفوفة التباينات V ومصفوفة الارتباطات R، كما يلي:

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

- حساب القيم الذاتية بالاعتماد على مصفوفة التباينات:

$$P_V(\lambda) = \det(V - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) - 1] - (4-\lambda) = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4-\lambda)[(2-\lambda)(4-\lambda) - 2] = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 6] = 0$$

$$4 - \lambda = 0 \leftrightarrow \lambda = 4$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0$$

- لحل معادلة من الدرجة الثانية، نحسب المميز Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 36 - 24 = 12$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\lambda = 4.73 \qquad \lambda = 1.27$$

يمكن كتابة القيم الذاتية في شكل مصفوفة تعرف بمصفوفة القيم الذاتية، كما يلي:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 4.73 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1.27 \end{pmatrix}$$

- التباين الكلي يساوي : $Inertie = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 4.73 + 4 + 1.27 = 10$

- حساب القيم الذاتية بالاعتماد على مصفوفة التباينات:

$$P_R(\lambda) = \det(R - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 1-\lambda & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P_R(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0.3 \\ 0.3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0.9\begin{vmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P_R(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - (0.3)^2] - 0.9(0.9(1-\lambda) = 0$$

$$P_R(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - (0.3)^2 - (0.9)^2] = 0$$

$$P_R(\lambda) = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 0.1] = 0$$

$$1-\lambda = 0 \leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0.1 = 0$$

- لحل معادلة من الدرجة الثانية، نحسب المميز Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0.1 = 3.6, \quad \sqrt{\Delta} \approx 1.9$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 1.9}{2}$$

$$\lambda = 0.05 \qquad \lambda = 1.95$$

يمكن كتابة القيم الذاتية في شكل مصفوفة تعرف بمصفوفة القيم الذاتية، كما يلي:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1.95 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$Inertie = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1.95 + 1 + 0.05 = 3$$

2.3.1. إيجاد المتجهات الذاتية

يتم إيجاد المتجهات الذاتية انطلاقا من مصفوفة التباينات أو مصفوفة الارتباطات، من خلال إيجاد حلول للمعادلات التالية:

$$(V - \lambda I)\vec{u} = 0$$

أو

$$(R - \lambda I)\vec{u} = 0$$

حيث:

$\vec{u}$: متجه ذاتي غير صفري عدد عناصره (بعده) يساوي عدد المتغيرات k:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

- بالاعتماد على مصفوفة التباينات في المثال 02، يمكن إيجاد المتجهات الذاتية كما يلي:
- **المتجه الذاتي الأول:**

$$(V-\lambda_1 I)\vec{u}_1=0$$

$$\begin{pmatrix}4-4.73 & 1 & 0\\ 1 & 2-4.73 & 1\\ 0 & 1 & 4-4.73\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0.73 & 1 & 0\\ 1 & -2.73 & 1\\ 0 & 1 & -0.73\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-0.73x+y=0\\ x-2.73y+z=0\\ y-0.73z=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=1.37y\\ z=1.37y\end{cases}\rightarrow x=z=1.37y$$

بالتعويض قيمة x و في المعادلة الثانية نتحصل على $x=y=z=0$، في هذه الحالة نفرض أن $y=1$، ونحسب قيم x وz: $x=z=1.37$، ومنه الشعاع الذاتي الأول يكتب من الشكل:

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1.37\\ 1\\ 1.37\end{pmatrix}$$

طويلة الشعاع:

$$\|\vec{u}_1\|=\sqrt{1.37^2+1^2+1.37^2}=2.18$$

الشعاع الذاتي الموحد الأول:

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{1.37}{2.18}\\ \frac{1}{2.18}\\ \frac{1.37}{2.18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.628\\ 0.460\\ 0.628\end{pmatrix}$$

- **المتجه الذاتي الثاني:**

$$(V-\lambda_2 I)\vec{u}_2=0$$

$$\begin{pmatrix}4-4 & 1 & 0\\ 1 & 2-4 & 1\\ 0 & 1 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x-2y+z=0\end{cases}\rightarrow\{x+z=0\rightarrow x=-z$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

طويلة الشعاع:

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

الشعاع الذاتي الموحد الثاني:

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$

- **المتجه الذاتي الثالث:**

$$(V - \lambda_3 I)\vec{u}_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-1.27 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1.27 & 1 \\ 0 & 1 & 4-127 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.73 & 1 & 0 \\ 1 & 0.73 & 1 \\ 0 & 1 & 2.73 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2.73x + y = 0 \\ x + 0.73y + z = 0 \\ y + 2.73z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -0.37y \\ z = -0.37y \end{cases} \rightarrow \{x = z = -0.37$$

نفس حالة الشعاع الأول، وعليه نفرض $y = 1$، ونحسب x وz:

$$x = z = -0.37$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -0.37 \\ 1 \\ -0.37 \end{pmatrix}$$

طويلة الشعاع:

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{(-0.37)^2 + 1^2 + (-0.37)^2} = 1.13$$

الشعاع الذاتي الموحد الثالث:

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-0.37}{1.13} \\ \frac{1}{1.13} \\ \frac{-0.37}{1.13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.325 \\ 0.888 \\ -0.325 \end{pmatrix}$$

- مصفوفة المتجهات الذاتية:

$$u = \begin{pmatrix} 0.629 & -0.707 & -0.325 \\ 0.460 & 0 & 0.888 \\ 0.628 & 0.707 & -0.325 \end{pmatrix}$$

4.1. اختيار عدد المركبات الرئيسية

إن اختيار عدد المركبات الرئيسية خطوة مهمة في تحليل PCA، حيث يتم تحديد عدد المكونات نظرا إلى نسبة التباين الذي يفسره كل محور. توجد عدة طرق ومعايير لاختيار عدد المركبات الرئيسية:

1.4.1. قاعدة نسبة التباين المفسر

نحسب نسبة التباين المفسر بالعلاقة التالية:

$$Expained\ Variance\ Ratio = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i}$$

نرتب القيم الذاتية ترتيبا تنازليا، في جدول من الشكل:

الجدول 01: جدول نسب التباين المفسر

	$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_2}$	$\boldsymbol{F_3}$	…	$\boldsymbol{F_k}$	$\boldsymbol{\Sigma}$
القيم الذاتية	λ_1	λ_2	λ_3	…	λ_k	$\sum \lambda_i$
نسب التباين المفسر	$\frac{\lambda_1}{\sum \lambda_i}$	$\frac{\lambda_2}{\sum \lambda_i}$	$\frac{\lambda_3}{\sum \lambda_i}$	…	$\frac{\lambda_k}{\sum \lambda_i}$	1
النسب التراكمية	$\frac{\lambda_1}{\sum \lambda_i}$	$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum \lambda_i}$	$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\sum \lambda_i}$	…	$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_k}{\sum \lambda_i}$	_

نحدد عدد المركبات التي تفسر على الأقل نسبة تباين 70%، وذلك بالبحث في النسب التراكمية عن النسبة 70% أو الأقرب إليها بالزيادة.

مثال: تشكيل جدول نسب التباين المفسر للمثال 02:

الجدول 02: جدول نسب التباين المفسر للمثال 02

	F_1	F_2	F_3	المجموع
القيم الذاتية	4.73	4	1.27	10
نسب التباين المفسر	$\frac{4.73}{10} = 0.473$	$\frac{4}{10} = 0.4$	$\frac{1.27}{10} = 0.127$	1
النسب التراكمية	0.473	0.873	1	$-$

2.4.1. قاعدة كايزر $Kaiser\ Criterion$

- **قاعدة كايزر التقليدية:** تنص على الاحتفاظ بالمركبات الرئيسية ذات القيم الذاتية الأكبر من 1 $\lambda_i > 1$، تستخدم في حالة كانت مصفوفة الارتباطات هي المصفوفة الأساسية التحليل.
- **قاعدة كايزر المعدلة (متوسط القيم الذاتية):** تنص على الاحتفاظ بالمركبات الرئيسية ذات القيم الذاتية الأكبر من متوسط القيم الذاتية $\lambda_i > \bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{k}$$

حسب جدول القيم الذاتية فإن:

$$\bar{\lambda} = \frac{10}{3} = 3.33$$

وعليه عدد المركبات الرئيسية هو 02، لأن: $\lambda_1 > \bar{\lambda}$ و $\lambda_2 > \bar{\lambda}$.

3.4.1. مخطط القيم الذاتية $Scree\ Plot$

مخطط القيم الذاتية هو تمثيل بياني يستخدم في تحليل المركبات الرئيسية، حيث يتم تمثيل القيم الذاتية على المحور العمودي والمركبات على المحور الأفقي، يهدف المخطط إلى إبراز أهمية المركبات بناء على قيمها الذاتية.

يتم اختيار عدد المركبات وفقا لنقطة الانحناء (المرفق)، التي يتغير فيها المنحنى من انحدار حاد إلى مسار أفقي نسبي. حيث يتم الاحتفاظ بالمركبات قبل نقطة الانحناء كمركبات رئيسية. يتم تمثيل القيم الذاتية بمخطط من الشكل التالي: