Chapitre 4

Détermination des surfaces

4.1 Introduction :

L'une des opérations importantes en topographie est le calcul des surfaces en vue d'un certain partage. Pour cela, on peut utiliser deux méthodes de calcul :

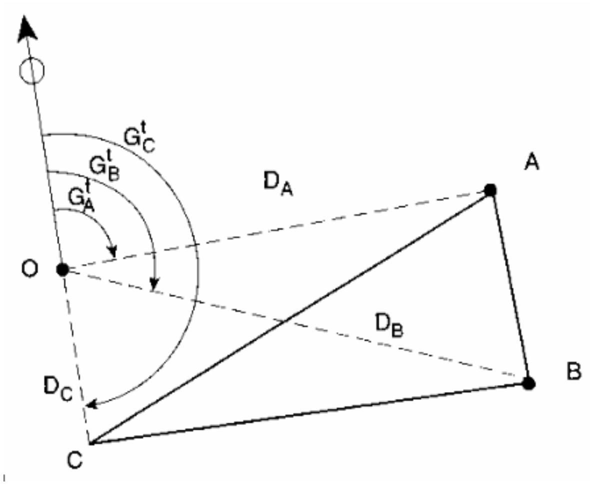
- Le calcul par coordonnées polaire ou par coordonnées rectangulaires.

Le choix de l'une ou l'autre des deux méthodes dépend de la méthode de levé utilisée.

4.2 Calcul par coordonnées polaires

Soit la figure 4.1 ci-après :

Fig. 4.1 : Calcul par coordonnées polaires



D_A, D_B, D_C représentent les distances entre la station O et les points levés ;
G^t_A, G^t_B, G^t_C représentent les gisements correspondants ;

La surface du triangle ABC sera égale à :

$$ABC = OAB + OBC - OAC$$

$$ABC = ½[(D_A×D_B×\sin(G^t_B - G^t_A)]+ ½[(D_B×D_C×\sin (G^t_C - G^t_B)]-½ [(D_A×D_C×\sin (G^t_C - G^t_A)]$$

$$ABC = ½[D_A×D_B×\sin (G^t_B - G^t_A)] + D_B×D_C×\sin (G^t_C - G^t_B)] - D_A×D_C×\sin (G^t_A - G^t_C)]$$

D’une manière générale, on peut écrire :

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \; D_i \times D_{i+1} \times \sin(G_{i+1} - G_i)\right]$$
$$\text{avec } i = 1, 2, 3 \ldots n$$

Exemple 1 :

Soit à calculer la surface du quadrilatère représenté à la figure 4.2, en utilisant le calcul par coordonnées polaires.

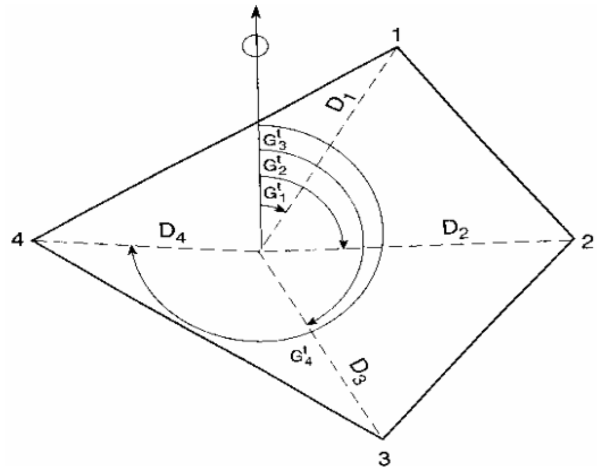


Fig. 4.2 : exemple de calcul par coordonnées polaires

Distances : D1 = 32.30 m ;
D2 = 49.32 m ;
D3 = 42.14 m ;
D4 = 53.39 m

G^t_1 = 49.12 gr ; G^t_2 = 98.07 gr ; G^t_3 = 131.52 gr ; G^t_4 = 311.10 gr

Solution :

$G^t_2 - G^t_1 = 98.07 - 49.12 = 48 .95$ gr

$G^t_3 - G^t_2 = 131.52 - 98.07 = 33.45$ gr

$G^t_4 - G^t_3 = 311.10 - 131.52 = 179.58$ gr

$G^t_1 - G^t_4 = (49.12 - 311.10) + 400 = 138.02$ gr

$32.30 × 49.32 × \sin 48.95 = 1107.72\ m^2$

$49.32 \times 42.14 \times \sin 33.45 = 1042.47\ m^2$

$42.14 \times 53.39 \times \sin 179.58 = 709.34\ m^2$

$53.39 \times 32.30 \times \sin 138.02 = 1425.99\ m^2$

$2S = 1107.72 + 1042.47 + 709.34 + 1425.99 = 4285.52\ m^2$

$S = 4285.52/2 = 2142.76\ m^2$

4.3 Calcul par coordonnées rectangulaires

Soit la parcelle de terrain représentée à la figure (4.3). Si l'on projette les points 1, 2, 3 sur les axes x et y et si l'on calcule la surface du triangle de sommets 1, 2, 3, on trouve :

$$S = 1/2[(X_2-X_1) \times (Y_2+Y_1)] + [1/2\ (X_3-X_2) \times (Y_2+Y_3)] - [1/2(X_3-X_1) \times (Y_1+Y_3)]$$

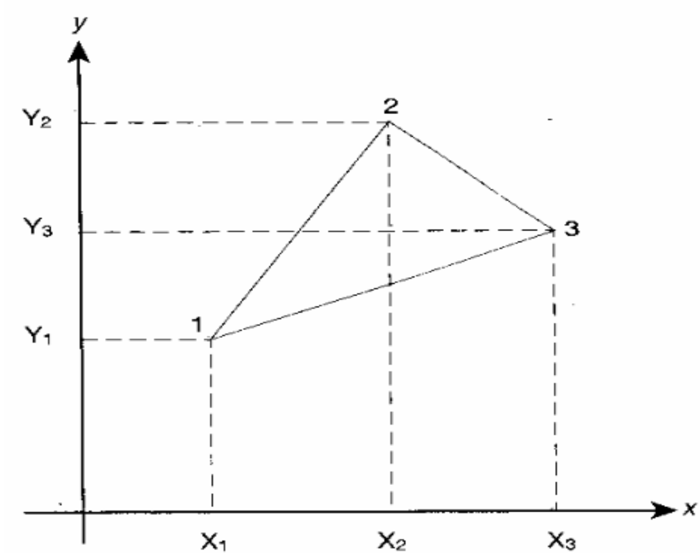


Fig. 4.3 : Calcul par coordonnées rectangulaires

On obtient :

$$S = ½\ [Y_1(X_2-X_3) + Y_2\ (X_3-X_1) + Y_3(X_1-X_2)]$$

Ou encore, d'une autre manière :

$$S = ½\ [X_1(Y_3-Y_2) + X_2\ (Y_1-Y_3) + X_3(Y_2-Y_1)]$$

Ainsi, d'une manière générale, on aura les formules suivantes :

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_{i+1} - X_{i-1})\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_{i+1} - Y_{i-1})\right]$$

Avec i = 1, 2, 3 … n

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})\right]$$

Avec i = 1, 2, 3 … n

Exemple 2 :

Soit le triangle de sommets 1, 2, 3 de coordonnées respectives :

1(222.64 m, 224.70 m), 2(444.33 m, 628.25 m), 3(650.33 m, 455.70 m)

On demande de calculer la surface délimitée par ce triangle

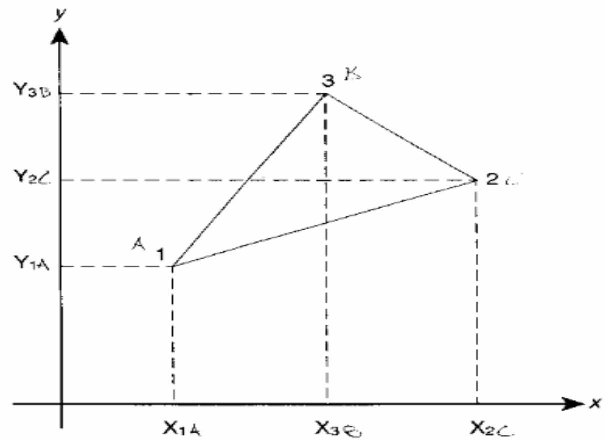


Fig. 4.4 : Exemple de calcul d'une surface par coordonnées rectangulaires

$S = ½ [Y_1(X_2-X_3) + Y_2 (X_3-X_1) + Y_3(X_1-X_2)]$

$S = ½ [224.70 (444.33 - 650.33) +628.25 (6$

$S = 121383.91/2 = 60691.95\ m^2$

Ou ; $S = 1/2[X_1(Y_3-Y_2) + X_2(Y_1-Y_3) + X_3(Y_2-Y$

$S = 1/2[222.64×(455.70 - 628.25) + 444.3$
$224.70)]$

$S = 121383.91/2 = 60691.95\ m^2$

Exercice 4.1

1. Calculez la surface de la parcelle de terrain en forme de triangle dont les coordonnées des sommets sont les suivantes :

A (122.50 m, 130.70 m), B (221.32 m, 452.75 m), C (621.21 m, 250.25 m)

2. Calculez la surface de la parcelle de terrain en forme de triangle en utilisant la méthode de calcul par coordonnées polaires.

Les données sont les suivantes :

Distances : D1 = 46.50 m ; D2 = 90.43 m ; D3 = 30.20 m

Gisements : $G^t_1 = 70$ gr ; $G^t_2 = 150$ gr ; $G^t_3 = 330$ gr

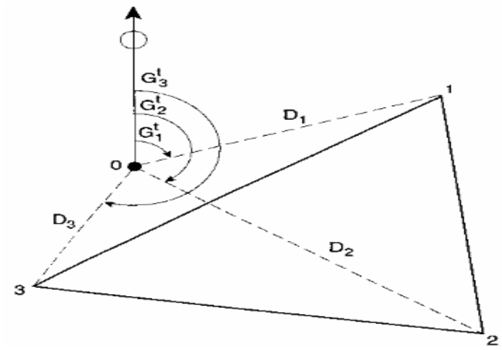
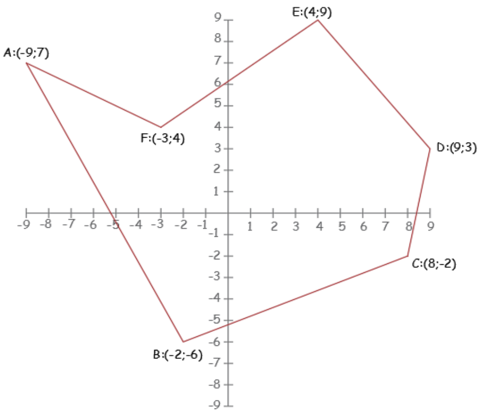


Fig. 4.5 : Schéma représentatif du procédé de calcul de la surface

Calcul d'une surface quelconque avec les coordonnées rectangulaires

Notez les coordonnées des sommets :

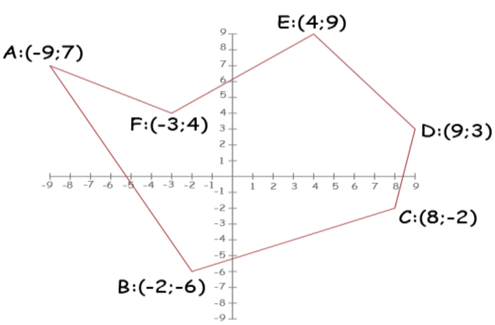
Dans un repère orthonormé, récupérez les coordonnées de chacun des sommets du polygone. En effet, pour ce type de polygone, l'aire peut être calculée à partir des coordonnées des sommets.



Préparez un tableau de coordonnées.

Indiquez tous les sommets et leurs coordonnées x (abscisses) et y (ordonnées) en opérant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Terminez par les coordonnées du premier sommet.

	X	Y
A	-9	7
B	-2	-6
C	8	-2
D	9	3
E	4	9
F	-3	4
A	-9	7



Multipliez l'abscisse d'un sommet par l'ordonnée du suivant.

-9 x -6 = 54

-2 x -2 = 4

8 x 3 = 24

9 x 9 = 81

4 x 4 = 16

-3 x 7 = -21

Additionnez le tout. Dans l'exemple ci-contre, on obtient **<u>158</u>**

	X	Y
A	-9	7
B	-2	-6
C	8	-2
D	9	3
E	4	9
F	-3	4
A	-9	7

Multipliez ensuite l'ordonnée d'un sommet par l'abscisse du suivant.

7 x -2 = -14

-6 x 8 = -48

-2 x 9 = -18

3 x 4 = 12

9 x -3 = -27

4 x -9 = -36

Additionnez le tout. Dans l'exemple ci-contre, on obtient **<u>-131</u>**

	X	Y
A	-9	7
B	-2	-6
C	8	-2
D	9	3
E	4	9
F	-3	4
A	-9	7

Soustrayez la dernière somme de la première.

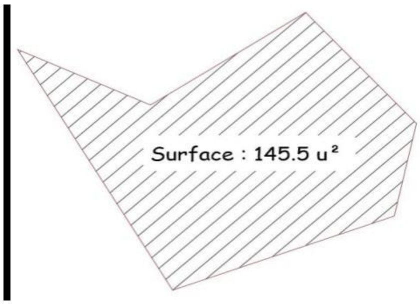
158 - (-131) = **<u>289</u>**

Divisez alors votre résultat par 2.

289 / 2 = **<u>144.50</u>**

Le polygone étudié a une surface de **<u>144.50 unités carrées</u>**

Si vous prenez les points dans le sens des aiguilles d'une montre, alors qu'il faut les prendre dans le sens contraire, vous allez obtenir la même valeur, mais négative. C'est ainsi que vous pourrez en déduire le sens dans lequel ces points sont organisés. On utilise la méthode analytique



Nivellement direct et indirect

A- Nivellement direct :

5.1 Rappels sur le nivellement direct

Le nivellement est la partie de la topographie qui traite le relief du sol et sa représentation sur les plans ou les cartes

La surface de référence ou plan de comparaison (figure 5.1) est le niveau des mers et des océans au repos ou « le géoïde ».

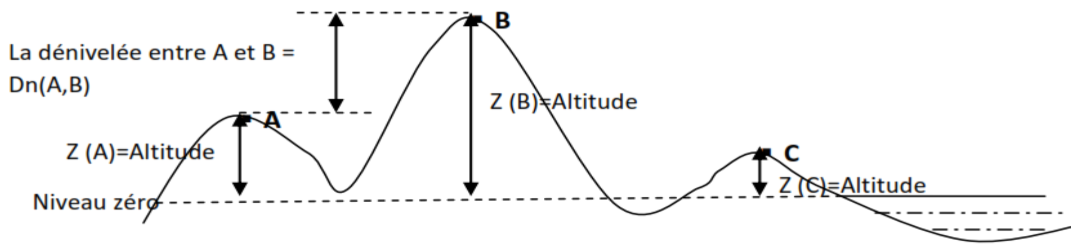


Fig. 5.1

Les repères : Ce sont des points connus en altitudes avec une grande précision par les services topographiques pour la détermination des altitudes des points.

5.2 Procédés de nivellement

- Le nivellement direct (niveaux)
- Le nivellement indirect (tachéomètre ou le théodolite)

5.3 Le nivellement direct

Appelé **nivellement géométrique**. Il se base sur une visée horizontale à travers un niveau qui définit un plan de visée, où on lit une lecture pour le calcul des altitudes et dénivelées.

5.3.1 Principe du nivellement direct

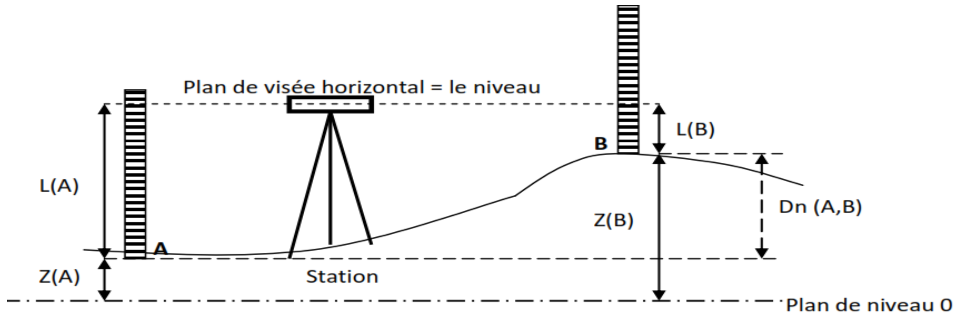
Soit un point A dont l'altitude est connue et un point B dont on cherche à déterminer l'altitude. Le nivellement consiste à déterminer la dénivelée entre les 2 points A et B à l'aide d'un niveau et d'une mire (figure 5.2).

Le niveau est placé entre les A et B, la mire est placée successivement sur les 2 points. L'opérateur lit L(A) et L(B). La différence des lectures sur la mire est égale à la dénivelée entre A et B :

La dénivelée de A vers B est Dn (A, B) = L(A) – L(B).

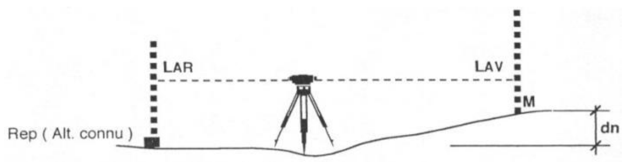
La dénivelée de B vers A est Dn (B, A) = L(B) – L(A).

Z(B) = Z(A) + Dn (A,B) = Z(A) + [L(A) – L(B)].



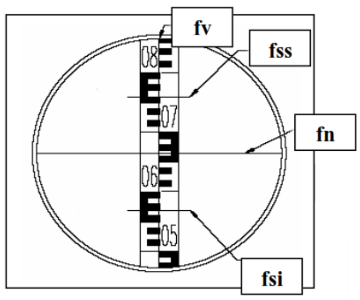
5.3.1.1 Nivellement direct simple

Alt M = Alt_{Rep} + (LAR_{Rep} - LAV M)



- **Lectures sur la mire**

La mire est une échelle linéaire tenue verticalement (comporte une nivelle sphérique). La précision de sa graduation et de son maintien verticale influent sur la précision de la dénivelée mesurée.



Le réticule d'un niveau est constitué de 4 fils :

• le fil stadimétrique supérieur fss;

• le fil stadimétrique inférieur fsi;

• le fil niveleur fn;

• le fil vertical fv.

- **Principe de portées égales**

Si le niveau est quelque peu déréglé, cela entraînerait pour les lectures sur mire un décalage dû à une erreur de collimation. Si on respecte des portées égales, même avec un niveau déréglé, cette erreur s'annule et la dénivelée obtenue est correcte.

Nous distinguons deux méthodes de nivellement direct :

- Le nivellement direct par rayonnement ;
- Le nivellement direct par cheminement.
- Le nivellement direct mixte.