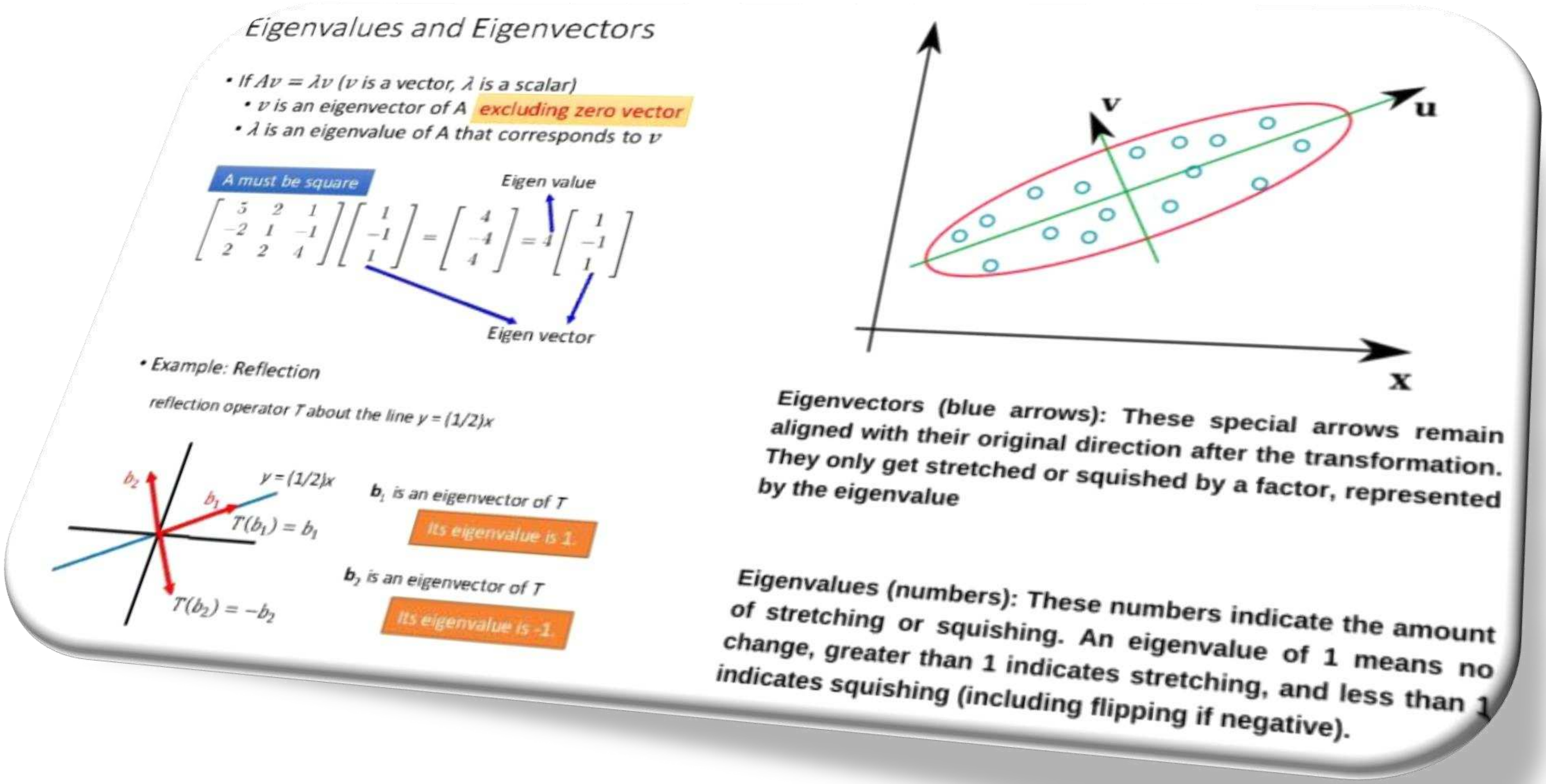
المح الثالث: القيم والمتجهات الذاتية



1- المتجهات Vectors

- ✓ المتجه هو كمية رياضية لها مقدار (طول) و اتجاه.

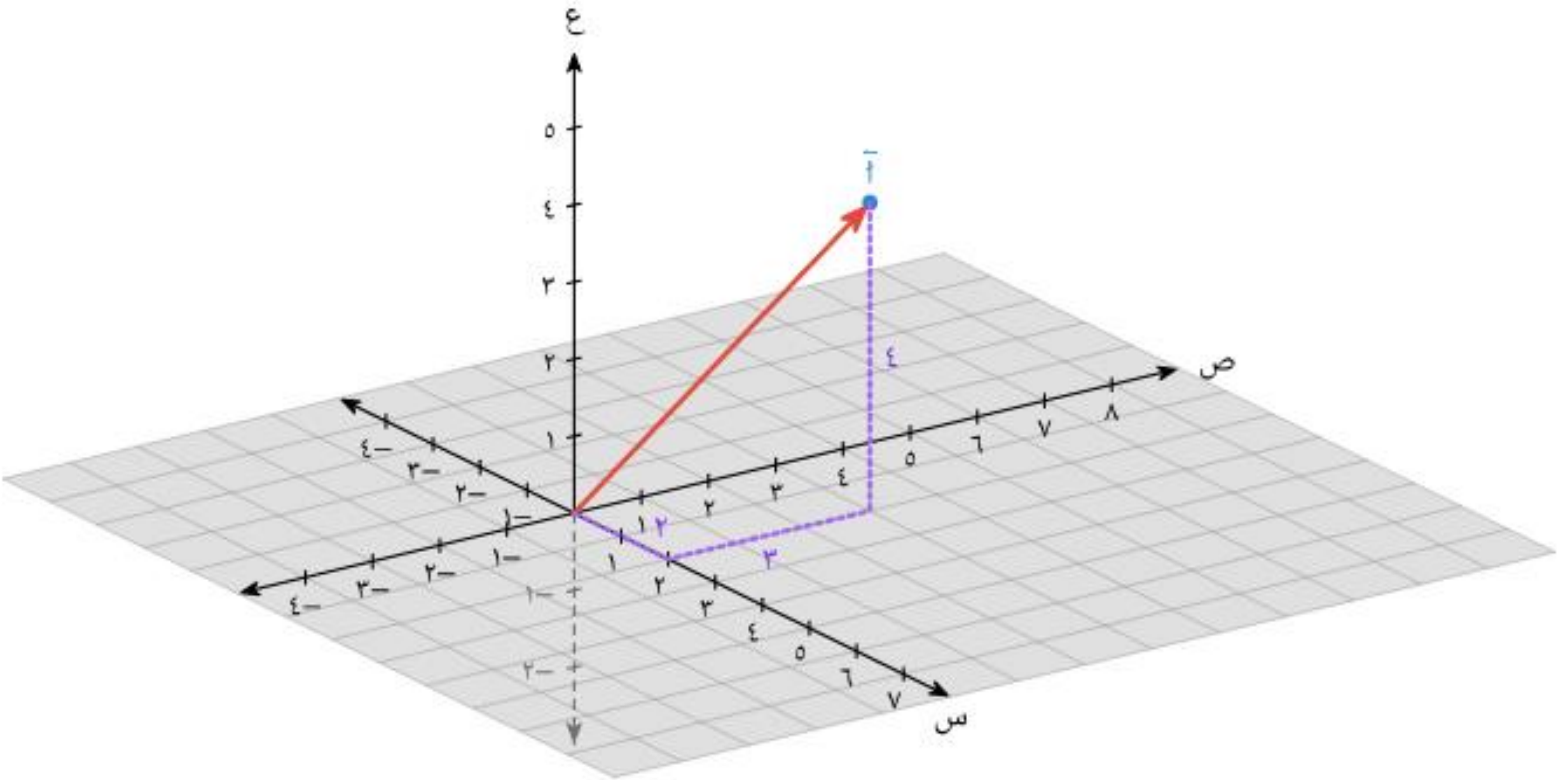
يُعبَّر عن المتجه في فضاء المتجهات بالإحداثيات (تسمى بمركبات المتجه)

مثلا: متجه $\vec{v}$ في فضاء ثنائي البعد R^2: $v = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$

مثلا: متجه u في فضاء ثلاثي الأبعاد R^3: $u = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$

مثلا: متجه u في فضاء ذو n بعد R^n ;*: $v = \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$

1- المتجهات Vectors



2- فضاء المتجهات Vectors

- فضاء المتجهات هو مجموعة من الكيانات الرياضية (المتجهات) التي يمكن جمعها وكذلك ضربها بعدد ثابت (عدد حقيقي) وتستوفي خصائص معينة.
  يُرمز لفضاء المتجهات عادةً بـ V

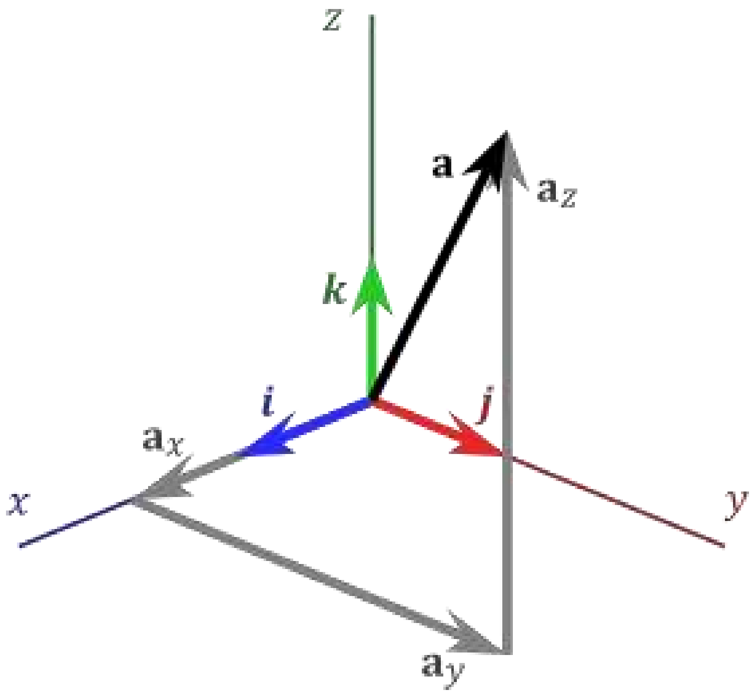
- **مكونات فضاء المتجهات:**

  - المتجهات: عناصر تنتمي إلى الفضاء V
  - الأعداد الثابتة تُسمى أيضًا الأعداد القياسية (Scalars)
  - العمليات الأساسية:
    - جمع المتجهات: If $u,v \in V$ then $u+v \in V$
    - ضرب المتجه بعدد ثابت: If $u \in V$ and $c \in R$ then $c \times u \in V$

3- الأساس (Basis) والبُعد (Dimension)

- **الأساس:** مجموعة من المتجهات المستقلة خطيًا التي يمكن من خلالها توليد كل متجه في الفضاء.
- **البُعد:** عدد المتجهات في الأساس.

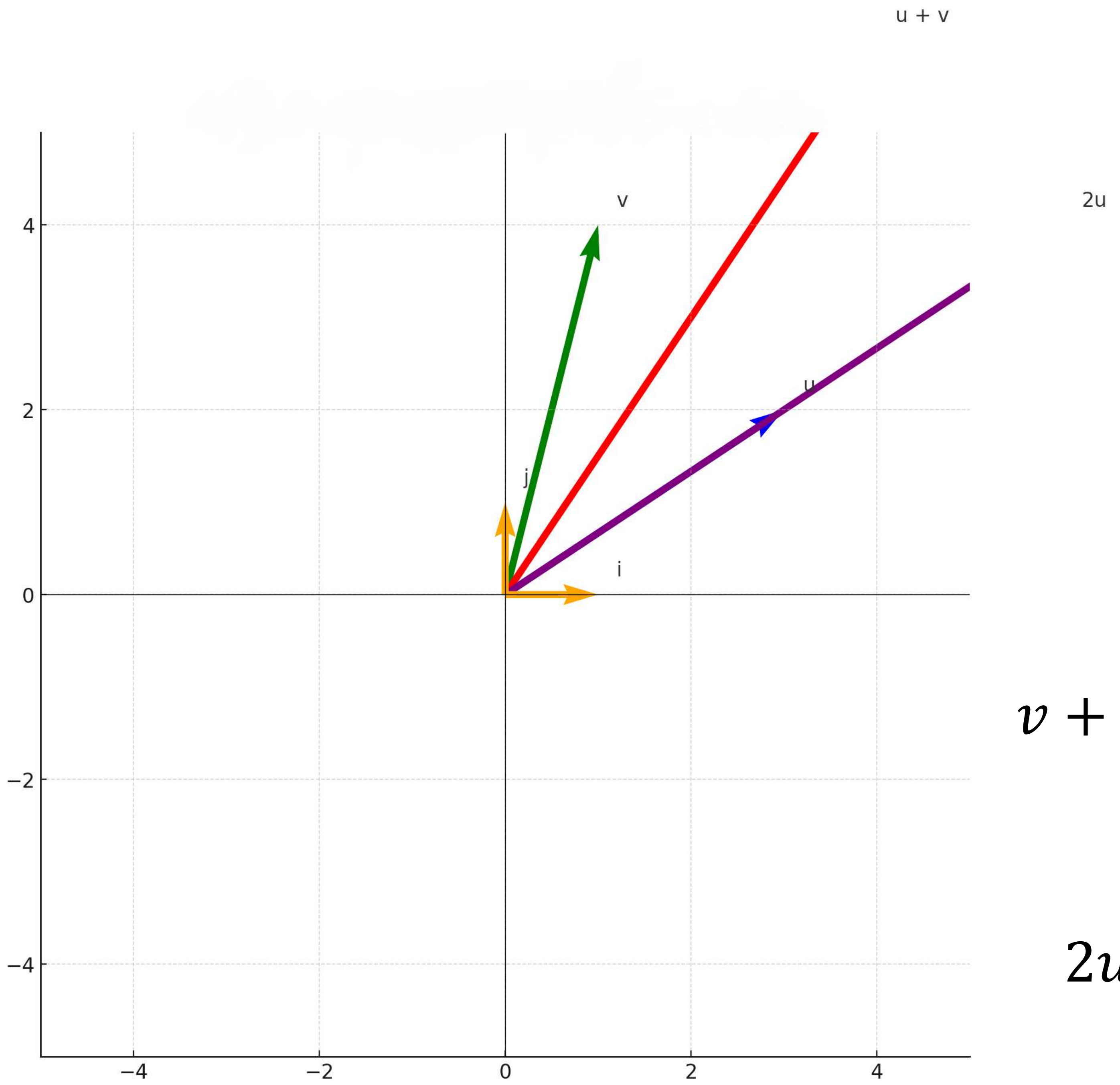
$$i = \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} \qquad j = \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} \qquad k = \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}$$



وفق هذا الاصطلاح، يكتب أي متجه في الفضاء الاتجاهي ثلاثي الأبعاد

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = ai + bj + ck$$

مثال:



اللون الأخضر $v = \begin{matrix}1\\4\end{matrix}$

اللون الأزرق $u = \begin{matrix}3\\2\end{matrix}$

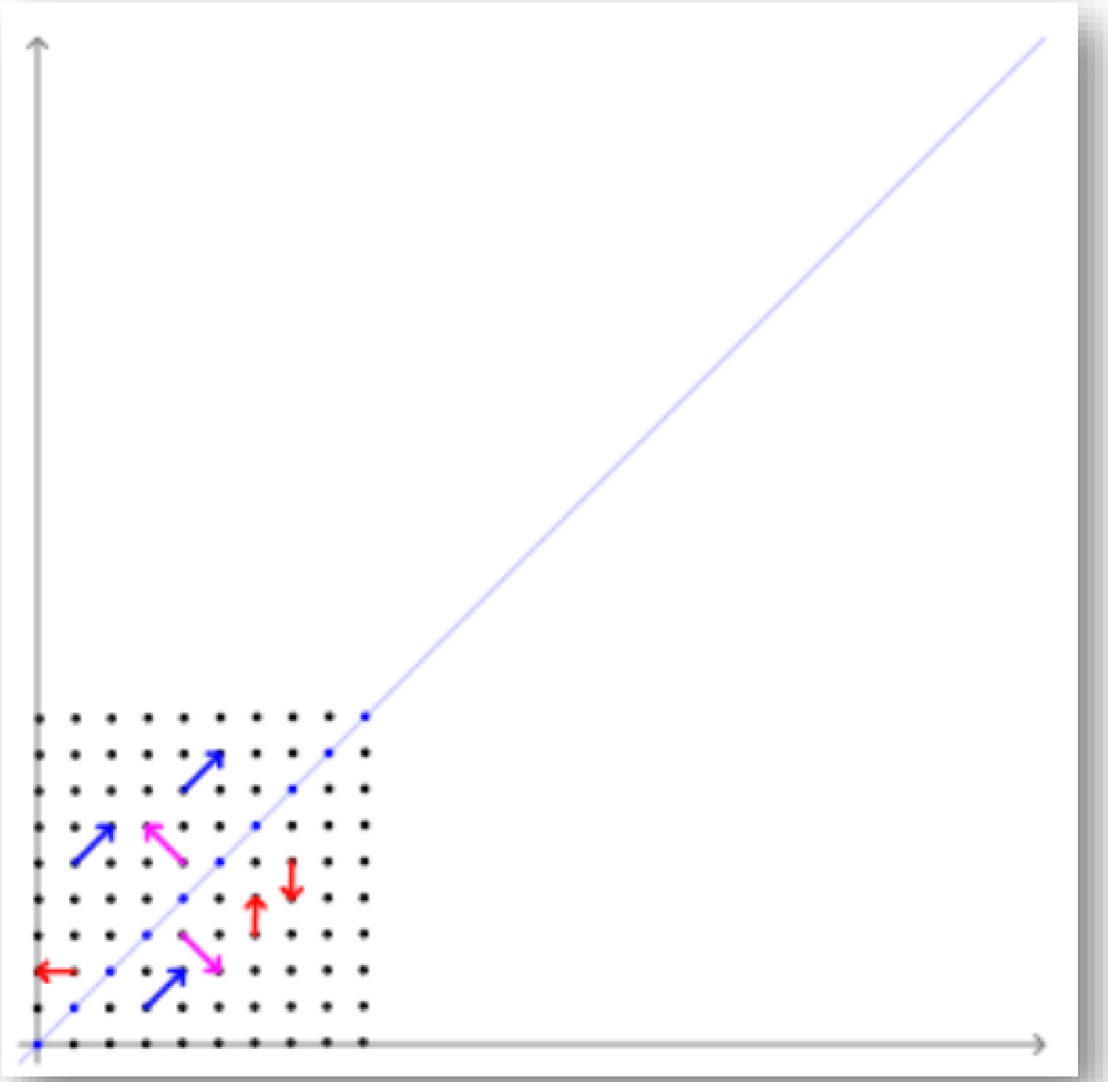
اللون الأحمر $v + u = \begin{matrix}1\\4\end{matrix} + \begin{matrix}3\\2\end{matrix} = \begin{matrix}4\\6\end{matrix}$

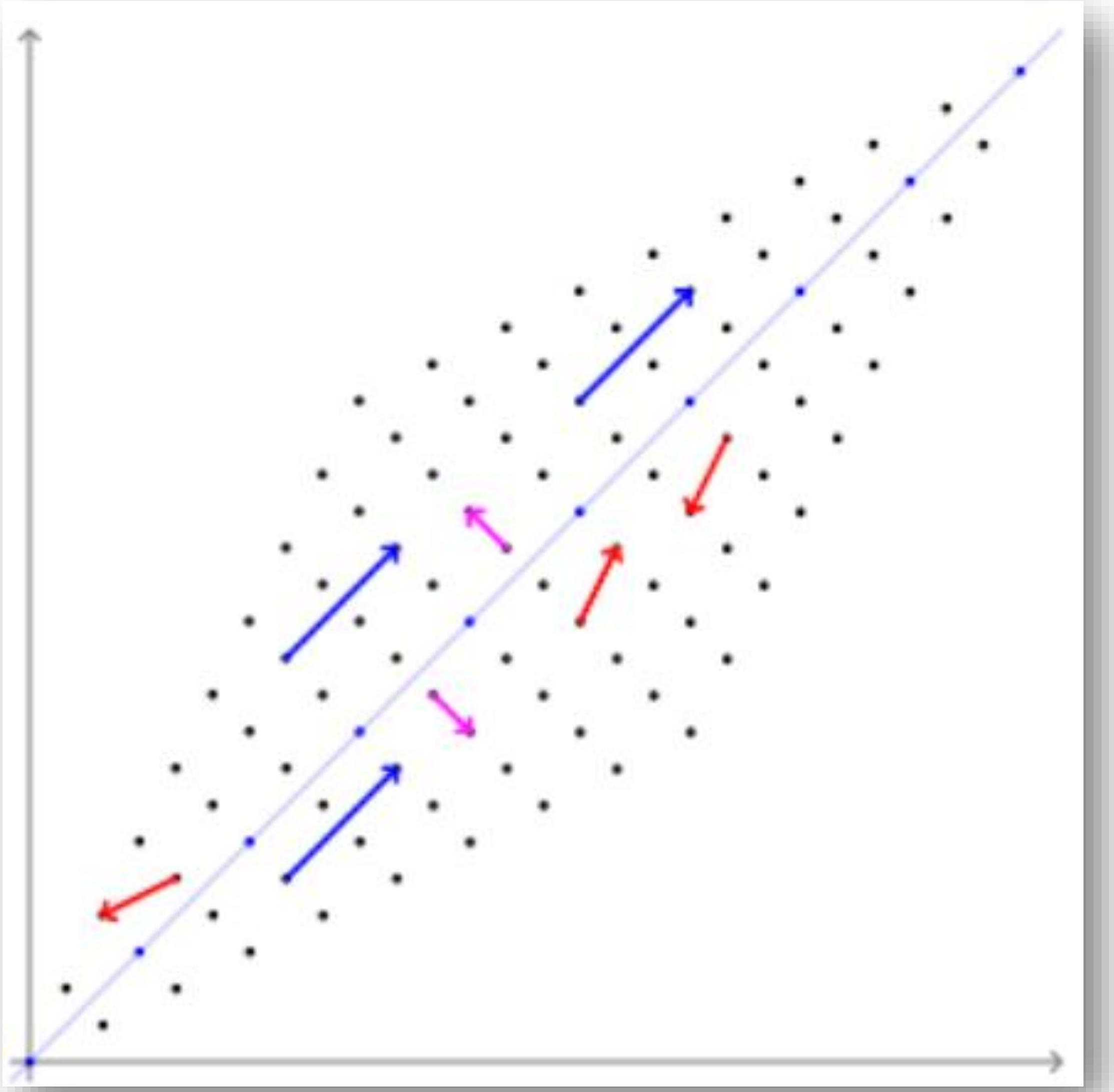
اللون البنفسجي $2u = 2\begin{matrix}3\\2\end{matrix} = \begin{matrix}6\\4\end{matrix}$

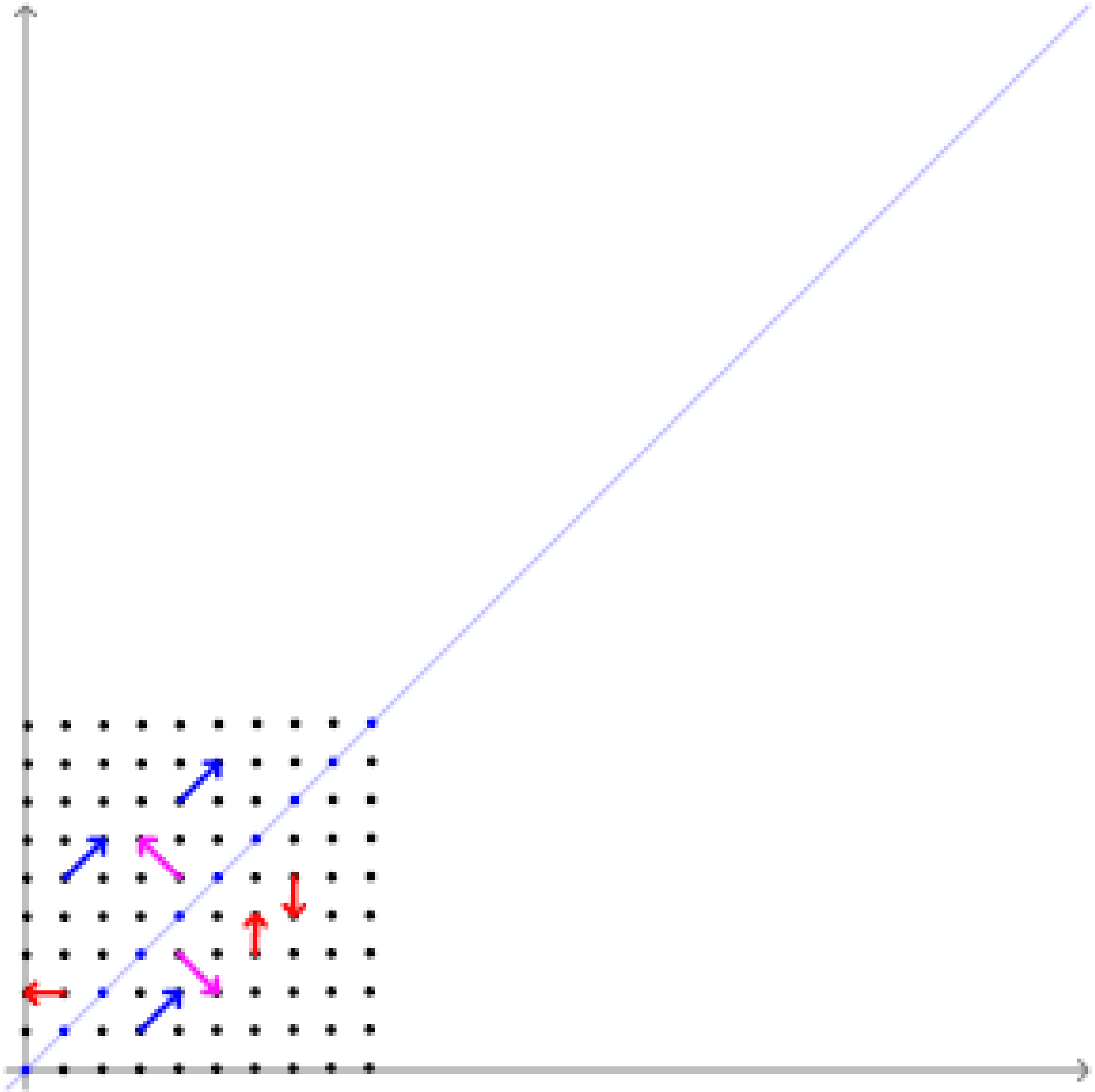
4- القيم الذاتية (Eigenvalues) والمتجهات الذاتية (Eigenvectors)

- ✓ يهتم الجبر الخطي بدراسة التحويلات الخطية، والتي تمثلها مصفوفات مؤثرة على متجهات
- ✓ تعد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية خواص المصفوفة
- ✓ تؤثر مصفوفة على متجه بتغيير كلاً من قيمته واتجاهه. لكن يمكن أن تؤثر المصفوفة على بعض المتجهات بتغيير قيمها مع الإبقاء على اتجاهاتها دون تغيير
- ✓ تمثل هذه المتجهات متجهات ذاتية للمصفوفة
- ✓ تؤثر مصفوفة على متجه ذاتي بضرب قيمته بعامل معين، يمثل هذا العامل القيمة الذاتية المصاحبة لذلك المتجه الذاتي

4- القيم الذاتية (Eigenvalues) والمتجهات الذاتية (Eigenvectors)







المتجه الذاتي: هو متجه لا يتغير اتجاهه عند تطبيق مصفوفة خطية عليه، بل يتغير حجمه فقط.

القيمة الذاتية: هي العدد λ الذي يُشير إلى مقدار التمدد أو الانكماش الذي يحدث للمتجه الذاتي عند تطبيق المصفوفة عليه.

5- حساب القيم الذاتية (Eigenvalues)

القيم الذاتية: إذا كانت A مصفوفة من النوع nxn. فإن المتجه الغير صفري U يكون متجها ذاتيا لـ A إذا وجد عدد λ حيث:

$$AU = \lambda U$$

حيث:

- U الشعاع الذاتي
- λ القيمة الذاتية للمصفوفة A والمرتبطة بالشعاع U

لإيجاد القيمة الذاتية للمصفوفة A نستخدم العلاقة التالية: $\det\ A - \lambda I \ = 0$

$$A - \lambda I \ = 0$$

5- حساب القيم الذاتية (Eigenvalues)

✓ مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = 0$$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{matrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad \Delta = (3)^2 - 4(1)(2) = 1$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \quad \Delta}{2a} \qquad \lambda_1 = \frac{3 - \quad 1}{2(1)} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{3 + \quad 1}{2(1)} = 2$$

6- حساب المتجهات الذاتية (Eigenvectors)

المتجهات (الأشعة) الذاتية: إن الأشعة الذاتية للمصفوفة Aالمناظرة للقيم الذاتية هي الأشعة الذاتية التي تحقق:

$$(A-\lambda I)U=0$$

بالاستعانة بالمثال السابق ولايجاد الاشعة الذاتية نأخذ كل قيمة ذاتية على حدة

- عندما نأخذ $\lambda=2$

$$(A-\lambda I)U=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6- حساب المتجهات الذاتية (Eigenvectors)

$$(A-\lambda I)U=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ -1 & 0-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ -x_1-2x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1+2x_2=0 \\ -x_1-2x_2=0 \end{Bmatrix}$$

6- حساب المتجهات الذاتية (Eigenvectors)

وهما عبارة عن معادلة واحدة نأخذ أحدهما نجد:

$$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

وبإعطاء x_2 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على مالانهاية من الحلول المقبولة (الشعة الذاتية) ويكون لها نفس الاتجاه

$$U = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in R^*$$

وحتى نحدد أحد الحلول الخاصة نضع كيفيا $x_2 = 1$ فنحصل على:

$$U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$