المحاضرة الثانية : العمليات على جبر المصفوفات

1. مفهوم المصفوفات

المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد أو الرموز المنظمة في صفوف وأعمدة في شكل مستطيل، تستخدم لتبسيط العمليات الحسابية في مختلف المجالات.

$A_{(m\times n)}$ مصفوفة ذات البعدين $m\times n$، أي أنها تحتوي على m سطر (صف) و n عمود، يشار إلى العناصر داخل المصفوفة (معاملات المصفوفة) بـ a_{ij}، حيث: i رتبة السطر $i=1,2,..m$ و j رتبة العمود $j=1,2,..n$

$$\boldsymbol{A_{(m\times n)}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

مثال 01: A مصفوفة تتضمن سطرين $m=2$ و 4 أعمدة $n=4$:

$$\boldsymbol{A_{(2\times 4)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}}$$

2. أنواع المصفوفات

هناك عدة أنواع للمصفوفات، يمكن تصنيف أهمها حسب معايير محددة.

1.2. حسب أبعاد المصفوفات

تتنوع المصفوفات حسب أبعادها (عدد الأسطر m وعدد الأعمدة n)، كما يلي:

1.1.2. المصفوفة المربعة

المصفوفة المربعة هي المصفوفة ذات البعدين $n\times n$ ، أي عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة، ويرمز لها بالرمز $A_{(n\times n)}$

$$\boldsymbol{A_{(n\times n)}=A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

مثال 02: A مصفوفة مربعة ذات البعد $n=3$:

$$\boldsymbol{A_{(3\times 3)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

2.1.2. المصفوفة السطرية

المصفوفة السطرية (الصفية) هي المصفوفة ذات البعدين $1\times n$ ، أي عدد الأسطر يساوي 1 وعدد الأعمدة n ، ويرمز لها بالرمز $A_{(1\times n)}$

$$A_{(1\times n)} = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \;\; \dots \;\; a_{1n}]$$

مثال 03: A مصفوفة سطرية ذات البعد $n = 3$:

$$A_{(1\times 3)} = [1 \;\; 0 \;\; 2]$$

3.2.1. المصفوفة العمودية

المصفوفة العمودية هي المصفوفة ذات البعدين $n \times 1$ ، أي عدد الأسطر يساوي n وعدد الأعمدة 1، ويرمز لها بالرمز $A_{(n\times 1)}$

$$A_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

مثال 04: A مصفوفة عمودية ذات البعد $n = 4$:

$$A_{(4\times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2. حسب قيم المصفوفات

تتنوع المصفوفات حسب عناصرها أو قيمها (a_{ij})، كما يلي:

1.2.2. المصفوفة الصفرية

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها مساوية للصفر، يرمز لها بالرمز O.

$$O_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

مثال 05: O مصفوفة صفرية ذات البعدين $m = 3$ و $n = 2$:

$$O_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2. المصفوفة القطرية

المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها صفرية باستثناء عناصر القطر الرئيسي، يرمز لها بالرمز D.

$$D_{(n\times n)} = D_n = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

مثال 06: D مصفوفة قطرية ذات البعد $n = 3$:

$$D_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3.2.2. المصفوفة الوحدة

المصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية، تكون جميع عناصر القطر الرئيسي فيها تساوي 1، يرمز لها بالرمز I.

$$I_{(n\times n)} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 07: I مصفوفة قطرية ذات البعد $n = 2$:

$$I_{(2\times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.2. المصفوفة المتناظرة

المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة مربعة، تكون جميع عناصرها متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي، حيث تتساوى مع المصفوفة المنقولة $A = A^T$ (يتم الحصول على المصفوفة المنقولة بعكس الصفوف والأعمدة).

مثال: A مصفوفة متناظرة ذات البعد $n = 4$:

$$A_{(4\times 4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3. محدد المصفوفات

محدد المصفوفة هو قيمة عددية تحسب من مصفوفة مربعة، يستخدم لتحديد خائص معينة للمصفوفة كقابلية العكس، يرمز له بـ $\det(A)$ أو $|A|$.

يمكن حساب محدد المصفوفات بعدة طرق، أهمها :

1.3. قاعدة لابلاس (توسيع المحدد) حسب العلاقة التالية:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, . \det(M_{ij})$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = |A| = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$|A| = +a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec)$$

مثال 08: لتكن $A_{(3\times3)}$ مصفوفة مربعة، فإن محدد هذه المصفوفة يحسب كمايلي:

$$A_{(4\times4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

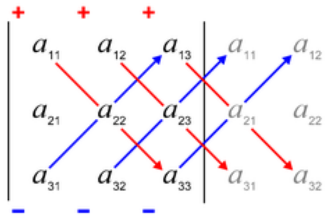
$$\det(A) = +1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = +1[(0\times2)-(2\times2)] - 0[(2\times2)-(1\times2)] + 1[(2\times2)-(1\times0)]$$

$$\det(A) = -4 - 0 + 4 = 0$$

2.3. طريقة ساروس (الشعاعية)

تعتمد طريقة ساروس على وضع العمود الأول والثاني على يمين المصفوفة، ورسم الأشعة كما هو موضح في المصفوفة التالية:



يحسب محدد المصفوفة كما يلي:

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ملاحظة: لتطبيق طريقة ساروس يشترط أن تكون المصفوفة ثلاثية الأبعاد.

مثال 09: نعيد حساب محدد المصفوفة في المثال 08 بطريقة ساروس

$$A_{(4\times4)} = \left[\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)\right]$$

$$\det(A) = +1\times0\times2 + 0\times2\times1 + 1\times2\times2 - 1\times0\times1 - 2\times2\times1 - 2\times2 = 0$$

4. التحويلات الأساسية للمصفوفات

التحويلات الأساسية للمصفوفات هي تغيرات تُجرى على عناصر المصفوفة باستخدام العمليات الرياضية مثل الجمع، الضرب، التدوير، والانعكاس.

1.4. المصفوفة المنقولة

المصفوفة المنقولة هي مصفوفة مربعة يتم الحصول عليها عن طريق تبديل الصفوف بالأعمدة. أي، إذا كانت لديك مصفوفة A، فإن المصفوفة المنقولة A^T يتم تكوينها بأخذ كل صف في A وتحويله إلى عمود في A^T.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & o \\ d & h & l & p \end{bmatrix}$$

مثال 10: المصفوفة المنقولة للمصفوفة في المثال 08، هي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4. المصفوفة المرافقة

المصفوفة المرافقة هي مصفوفة مربعة تتشكل عناصرها انطلاقا من المحددات الفرعية للمصفوفة الأصلية، أي كل عنصر في المصفوفة المرافقة هو متحدر Cofactor من المصفوفة الأصلية، يرمز لها بالرمز $Cof(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow Cof(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

مثال 11: المصفوفة المرافقة للمصفوفة في المثال 08، هي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow Cof(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4. المصفوفة العكسية

المصفوفة العكسية هي مصفوفة مربعة لها نفس أبعاد المصفوفة الأصلية (أي لها نفس عدد الصفوف والأعمدة)، يرمز لها بالرمز A^{-1}. من خواص المصفوفة العكسية أنها إذا ضربت في المصفوفة الأصلية تنتج مصفوفة الوحدة، أي مثلا إذا كانت لدينا A مصفوفة مربعة فإن:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)} = \frac{(Cof(A))^T}{|A|}$$

$$A.A^{-1} = I$$

مثال 12: المصفوفة العكسية للمصفوفة A، هي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left(Cof(A)\right)^T = Adj(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}}{-10} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & -0.5 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

5. العمليات الأساسية على المصفوفات

1.5. جمع المصفوفات

يمكن جمع مصفوفتين إذا كان لهما نفس الأبعاد، أي لهما نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة. حيث يتم جمع العناصر المتناظرة لكل مصفوفة.

إذا كانت A وB مصفوفتان لهما نفس الأبعاد $(m \times n)$:

$$C = A + B \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

مثال 13: إذا كانت المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن جمع المصفوفتين سيكون:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 0+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2.5. طرح المصفوفات

يمكن طرح مصفوفتين إذا كان لهما نفس الأبعاد، أي لهما نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة. حيث يتم طرح العناصر المتناظرة لكل مصفوفة.

إذا كانت A وB مصفوفتان لهما نفس الأبعاد $(m \times n)$:

$$C = A - B \rightarrow C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

مثال 14: إذا كانت المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن طرح المصفوفتين سيكون:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{8-5} & \mathbf{2-0}\\ \mathbf{5-3} & \mathbf{4-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$$

3.5. ضرب المصفوفات

يمكن ضرب المصفوفة في ثابت وذلك بضرب كل عنصر من المصفوفة في هذا الثابت، على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\times k=k\times\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ kd & ke & kf\\ kg & kh & ki\end{bmatrix}$$

كما يمكن ضرب مصفوفتين إذا كانتا متوافقتان في الأبعاد أي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الأسطر في المصفوفة الثانية.

إذا كانت المصفوفة الأولى بحجم $(m\times n)$ والمصفوفة الثانية بحجم $(n\times p)$ فإن المصفوفة الناتجة عن ضربهما تكون بحجم $(m\times p)$.

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ap_1+bp_2+cp_3\\ dp_1+ep_2+fp_3\\ gp_1+hp_2+ip_3\end{bmatrix}$$

مثال 15: إذا كانت المصفوفات:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=[\mathbf{1}\quad \mathbf{2}]$$

ناتج ضرب المصفوفات: $\mathbf{D\times C}\quad \mathbf{D\times B}\quad \mathbf{D\times A}\quad \mathbf{B\times C}\quad \mathbf{A\times C}\quad \mathbf{B\times A}\quad \mathbf{A\times B}$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{8\times5+2\times3} & \mathbf{8\times0+2\times1}\\ \mathbf{5\times5+4\times3} & \mathbf{5\times0+4\times1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{46} & \mathbf{2}\\ \mathbf{37} & \mathbf{4}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{5\times8+0\times5} & \mathbf{5\times2+0\times4}\\ \mathbf{3\times8+1\times5} & \mathbf{3\times2+1\times4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{40} & \mathbf{10}\\ \mathbf{29} & \mathbf{10}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{8\times1+2\times2}\\ \mathbf{5\times1+4\times2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{12}\\ \mathbf{13}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{5\times1+0\times2}\\ \mathbf{3\times1+1\times2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\ \mathbf{5}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{A}=[\mathbf{1}\quad\mathbf{2}]\times\begin{bmatrix}\mathbf{8} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4}\end{bmatrix}=[\mathbf{1\times8+2\times5}\quad \mathbf{1\times2+2\times4}]=[\mathbf{18}\quad\mathbf{10}]$$

$$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}=[\mathbf{1}\quad\mathbf{2}]\times\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}=[\mathbf{1\times5+2\times3}\quad \mathbf{1\times0+2\times1}]=[\mathbf{11}\quad\mathbf{2}]$$

$$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{C}=[\mathbf{1}\quad\mathbf{2}]\times\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{bmatrix}=\mathbf{1\times1+2\times2=5}$$

6. خصائص المصفوفات

- $\mathbf{det}(A) \neq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{A\ is\ Invertible}$
- $\boldsymbol{A \times A^{-1} = I}$
- $\boldsymbol{det(kA) = k \times det(A)}$
- $\boldsymbol{det(A+B) \neq det(A) + det(B)}$
- $\boldsymbol{det(A \times B) = det(A) \times det(B)}$
- $\boldsymbol{det(A^T) = det(A)}$
- $\boldsymbol{A \times B \neq B \times A}$
- $\boldsymbol{A \times (B + C) = A \times B + A \times C}$
- $\boldsymbol{(A \times B) \times C = A \times (B \times C)}$