

Solution de l'exercice 4 de la Série N°2 : ACP

Exercice 1 Une étude gastronomique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre restaurants. Pour cela, un expert a noté ces restaurants avec des notes allant de -3 à 3 . Les résultats sont les suivants:

<i>Restaurant</i>	<i>Service</i>	<i>Qualité</i>	<i>Prix</i>
\mathbf{R}_1	-2	$+3$	-1
\mathbf{R}_2	-1	$+1$	0
\mathbf{R}_3	$+2$	-1	-1
\mathbf{R}_4	$+1$	-3	2

La matrice de variances-covariances est

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix},$$

et celle de corrélations (aux erreurs arrondies près) est

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0.85 & 0.26 \\ -0.85 & 1 & -0.73 \\ 0.26 & -0.73 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Etude de valeurs propres:

- i) Vérifier que \mathbf{V} admet une valeur propre $\lambda_3 = 0$.
 - ii) On donne $\lambda_1 = 30.5/4$. Déduire la valeur de λ_2 .
 - iii) Calculer les pourcentages d'inerties. Quelle est la dimension à retenir?
- 2. Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 , aux erreurs arrondies près, sont**

$$\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix}.$$

i) Déterminer les composantes principales qui correspondent aux axes principaux associés à \mathbf{u}_1^* et \mathbf{u}_2^* respectivement.

ii) Représenter les individus dans le plan principal $(1, 2)$.

3. Représentation des variables:

- i) Déterminer les corrélations entre les variables originelles et les composantes principales.
- ii) Représenter les variables sur le cercle des corrélations dans le plan factoriel $(1, 2)$.
- iii) Interpréter les résultats.

Solution

Question 1:

i) On sait que: λ une v.a propre $\iff \det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{Id}_3) = 0$. Donc pour vérifier que $\lambda = 0$ est une valeur propre de la matrice \mathbf{V} , il suffit s'assurer que $\det \mathbf{V} = 0$. En effet

$$\det \mathbf{V} = \begin{vmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{vmatrix} = 0.$$

ii) On donne $\lambda_1 = 30.5/4 = 7.625$, avec $\lambda_3 = 0$. Nous avons

$$\text{Trace}(\mathbf{V}) = 5/2 + 5 + 3/2. \quad (1)$$

D'autre part la trace d'une matrice carée égale à la somme de ses valeurs propres. Donc

$$\text{Trace}(\mathbf{V}) = 30.5/4 + \lambda_2 + 0. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) ensemble, impliquent que $\lambda_2 = 1.375$.

iii) Calcul des pourcentages d'inerties (PI):

$$\text{PI de chaque exe principal} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \times 100, \quad i = 1, 2, 3.$$

Premier axe principal E_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \times 100 &= \frac{7.625}{7.625 + 1.375 + 0} \times 100 \\ &= 84.722\%. \end{aligned}$$

Deuxième axe principal E_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \times 100 &= \frac{1.375}{7.625 + 1.375 + 0} \times 100 \\ &= 15.278\%. \end{aligned}$$

Troisième axe principal E_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \times 100 &= \frac{0}{7.625 + 1.375 + 0} \times 100 \\ &= 0\%. \end{aligned}$$

Dimension à retenir:

$$\begin{aligned} \text{PI}(E_1 \oplus E_2) &= \text{PI}(E_1) + \text{PI}(E_2) \\ &= 84.722 + 15.278 = 100\%. \end{aligned}$$

La dimension à retenir est (1×2) , c'est le plan $E_1 \oplus E_2$, car ce dernier a un le plus grand pourcentage d'inertie.

Question 2: la matrice des données est

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le centre de gravité:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{i1} \\ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{i2} \\ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice centrée des données:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* - \mathbf{1}_3 \mathbf{g}^t = \mathbf{X}^*.$$

i) Composantes principales:

$$c_1 = \mathbf{X} \mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

et

$$c_2 = \mathbf{X} \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}.$$

ii) Représentation dans le plan $E_1 \oplus E_2$:

Restaurant	\mathbf{c}_1	\mathbf{c}_2
\mathbf{R}_1	-3.7	-0.22
\mathbf{R}_2	-1.3	-0.54
\mathbf{R}_3	1.5	1.94
\mathbf{R}_4	3.5	-1.18

3. **Question 3:** On note.

$v_1 := \text{Service}$, $v_2 := \text{qualité}$, $v_3 := \text{prix}$.

i) Corrélations: $\mathbf{cor}(c_k, v_j) = \sqrt{\lambda_k} \frac{u_{kj}}{s_j}$, $k, j = 1, 2, 3$. Donc

$$\mathbf{cor}(c_1, v_1) = \sqrt{\lambda_1} \frac{u_{11}}{s_1}, \quad \mathbf{cor}(c_2, v_1) = \sqrt{\lambda_2} \frac{u_{21}}{s_1},$$

$$\mathbf{cor}(c_1, v_2) = \sqrt{\lambda_1} \frac{u_{12}}{s_2}, \quad \mathbf{cor}(c_2, v_2) = \sqrt{\lambda_2} \frac{u_{22}}{s_2}$$

et

$$\mathbf{cor}(c_1, v_3) = \sqrt{\lambda_1} \frac{u_{13}}{s_3}, \quad \mathbf{cor}(c_2, v_3) = \sqrt{\lambda_2} \frac{u_{23}}{s_3}.$$

Application:

$$\mathbf{cor}(c_1, v_1) = \sqrt{7.625} \frac{0.5}{\sqrt{5}/2} \simeq 0.87, \quad \mathbf{cor}(c_2, v_1) = \sqrt{1.375} \frac{-0.8}{\sqrt{5}/2} \simeq -0.59$$

$$\mathbf{cor}(c_1, v_2) = \sqrt{7.625} \frac{0.65}{\sqrt{5}} \simeq 0.80, \quad \mathbf{cor}(c_2, v_2) = \sqrt{1.375} \frac{0.11}{\sqrt{5}} \simeq 0.05$$

$$\mathbf{cor}(c_1, v_3) = \sqrt{7.625} \frac{0.3}{\sqrt{3/2}} \simeq 0.27, \quad \mathbf{cor}(c_2, v_3) = \sqrt{1.375} \frac{-0.75}{\sqrt{3/2}} \simeq -0.71.$$

Comme nous n'avons pas calculé la troisième composante principale c_3 , nous devons alors procéder autrement. Nous avons

$$\mathbf{cor}(c_1, v_3) = \frac{1}{4} \frac{c_1^t v_3}{\sqrt{\lambda_1} s_3} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{7.4701} \times \sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.687$$

$$\mathbf{cor}(c_2, v_3) = \frac{1}{4} \frac{c_2^t v_3}{\sqrt{\lambda_1} s_3} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1.375} \times \sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.71$$

Questions (ii) et (iii) se traitent dans le salle de TD.