الفصـــــل الثالـث: مفـاهيم عامـة حـول المصـــــفوفات

تعـــاريف

ليكن الحقل $\mathbb{R}$. m ، n عددان طبيعيان

لنأخذ المقادير السليمة (الأعداد الحقيقية) a_{ij} من الحقل $\mathbb{R}$ حيث $i = 1, \dots, m$. $j = 1, \dots, n$ ، مصفوفة هي جدول من عناصر $\mathbb{R}$ موزعة في أسطر و في أعمدة كالتالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

الدليل الأول i يمثل السطر رقم i و الدليل الثاني j يمثل العمود رقم j . نقول عندئذ أن المصفوفة ذات m سطرا و n عمودا أنها من الدرجة $n \times m$، العنصر a_{ij} يقع في السطر i و العمود j .

يرمز لمصفوفة بأحد الحروف الكبيرة أما عناصرها بأحد الحروف الصغيرة. يمكن أن نرمز للمصفوفة السابقة بالرمز التالي $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

يرمز لمجموعة المصفوفات ذات m سطرا و n عمودا بالرمز $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

A و B مصفوفتين حيث: $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$.

- نقول ان المصفوفتين A و B متساويتين إذا كان A و B من نفس الدرجة أي (لهما نفس عدد الأسطر و نفس عدد الأعمدة) و كانت عناصرهما المتناظرة متساوية أي.

$$a_{ij} = b_{ij},\ \ i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$$

- المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون عدد أسطرها مساوي لعدد أعمدتها أي $m = n$ و هنا نقول أنها من الدرجة n و تسمى العناصر a_{ii} أي a_{11} ، a_{22} ، ... ، a_{mn} بالقطر الرئيسي للمصفوفة .
- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها أي $\forall i, j;\ a_{ij} = 0$

المصفوفة المربعة تكون:

- مثلية علوية: إذا كانت جميع العناصر التي تحت القطر الرئيسي معدومة ، $\forall \boldsymbol{i} > j \; ; \; \boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- مثلية سفلية إذا كانت جميع العناصر التي فوق القطر الرئيسي معدومة ،$\forall \boldsymbol{i} < \boldsymbol{j} \; ; \; \boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0_{n1} & \dots & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- قطرية إذا كانت جميع عناصرها معدومة ما عدا عناصر القطر الرئيسي ليست كلها معدومة ،

$$\forall \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \,; \boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{0} \,, \exists \boldsymbol{i} \,; \boldsymbol{a_{ij}} \neq \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- إذا كان $\boldsymbol{a_{11}} = \boldsymbol{a_{22}} \cdots = \boldsymbol{a_{nn}} = \boldsymbol{1}$ في المصفوفة القطرية فإنها تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{I_n}$

$$\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{،} \; \boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{،} \; \dots\dots\dots$$

- _المصفوفة المتناظرة أو التناظرية هي المصفوفة المربعة التي تكون عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية $\forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \,; \boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}}$ مثلا :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- بالإضافة إلى مصفوفة عمود هي مصفوفة من النوع $\boldsymbol{M_{m,1}}(\mathbb{R})$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- و مصفوفة سطـر هي مصفوفة من النوع $\boldsymbol{M_{1,n}}(\mathbb{R})$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{11}} \quad \dots \quad \boldsymbol{a_{1n}})$$

العمليـــــات الأساسية على المصفــــوفات

مجمــــوع (أو طــرح) مصفوفتيــن

لتكن المصفوفتان A ، B من نفس الدرجة حيث عناصر A هي α_{ij} و عناصر B هي b_{ij} .فإن مصفوفة المجموع $A+B$ مكونة من العناصر c_{ij} حيث :

$$c_{ij}=\alpha_{ij}+b_{ij}$$

و إذا كانت المصفوفتان ليستا من نفس الدرجة فإن المجموع غير معرف .

مثـــــال :

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & -2+0 & 3+2\\ 4-7 & 5+1 & -6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0 & 6\\ -21 & 3 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-9 & -4-0 & 6-6\\ 8-(-21) & 10-3 & -12-24\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{pmatrix}$$

ضرب مصفـــوفة في سلمـــي:

لتكن A مصفوفة و λ عدد حقيقي . لحساب الجداء λA نضرب العدد λ في جميع عناصر المصفوفة .

أمثـــــلة :

$$\lambda\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x & \lambda y\\ \lambda z & \lambda w\end{pmatrix}$$

$$-5\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10 & -15\\ -20 & -25 & 30\end{pmatrix}$$

جــــــداء المصفــــوفات :

لتكن المصفوفتان $A=(a_{ij})$ ، $B=(b_{ij})$

يكون الجداء A معرفا إذا كان عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر B . فإذا كانت A من الدرجة $m\,X\,n$ و B من الدرجة $n\,X\,r$ وبفرض $C=AB$ حيث $C=(c_{ij})$ فإن

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\qquad,\quad (i=1,\dots\dots,m\,;j=1,\dots,n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

يعني أن:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + \cdots + a_{2n}b_{n1}$$

$$c_{m2} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} = a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + a_{m3}b_{32} + \cdots + a_{mn}b_{n2}$$

لاحظ أن: عناصر السطر A تضرب في عناصر العمود B ثم تجمع
يعني أن للحصول على العنصر c_{11} نضرب عناصر السطر الأول للمصفوفة A في عناصر العمود الأول للمصفوفة B ثم نجمع و هكذا

مثـــــــال:

لنحسب الجداء التالي:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

عدد أعمدة المصفوفةA = عدد أسطر المصفوفة B يساوي

$$= \begin{pmatrix} 2\times 1 + (-1)\times 3 & 2\times(-2) + (-1)\times 4 & 2\times(-5) + (-1)\times 0 \\ 1\times 1 + 0\times 3 & 1\times(-2) + 0\times 4 & 1\times(-5) + 0\times 0 \\ -3\times 1 + 4\times 3 & -3\times(-2) + 4\times 4 & -3\times(-5) + 0\times 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

مثـــــال:

ليـكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

AB مصفوقة من النوع (1.1)

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 66 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الجداء هو مصفوفة من النوع (3.3)

لاحظ أن $AB \neq BA$

ملاحـــــظة:

جــــداء مصفـــوفتين ليس بالضـــرورة تبــــديلي.

تعــــــريف:

لتكن المصفوفتان $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$

نقول أن B هي مصفوفة عكسية يمنى لــ A إذا كان $AB = I_n$ و إذا كان $BA = I_n$ في هذه الحالة A مصفوفة عكسية يسرى لــ B .

تعريـــــــف:

مصفوفة A من $M_n(\mathbb{R})$ نقول أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة B من $M_n(\mathbb{R})$ حيث:

$$AB = BA = I_n$$

و نرمز للمقلوب بــ A^{-1}

منقــــــول مصفـــوفة

لتكن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. فإن منقول المصفوفة A هي المصفوفة A^T حيث

$$c_{ij} = \alpha_{ij} \quad و \quad A^T = (c_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

فللحصول على منقول المصفوفة نجعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطرا.

ينتج من هذا التعريف أن $(A^T)^T = A$

ملاحـــــظة:

- إذا كان $(A^T) = A$ فإن A تسمى مصفوفة متناظرة .
- A مصفوفة ضد تناظرية إذا كان $A = -A^T$
- $(A+B)^T = (A)^T + (B)^T \quad , \quad \forall A, \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

- $\forall A, \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\forall B, \in M_{n,r}(\mathbb{R})$, $(AB)^T = (B)^T(A)^T$

مثـــــــال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = (1 \quad 2 \quad 3)$$

أثـــــر مصفـــوفة مربعـــة

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$، أثر المصفوفة هو مجموع عناصر القطر الرئيسي و يرمز له بالرمز $Tr(A)$ ، أي أن

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

مثـــــــال:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(A) = 4 + 2 + (-1) = 5$$

المصفـــوفة المرافقـــة لتطبيـــق خطـــي

يكن E_1 ، E_2 فضائيين شعاعين على الحقل $\mathbb{R}$ ببعدين منتهيين n ، m على التوالي ، وليكن :

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا في E_1 ، $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساسا في E_2

و ليكن f تطبيقا خطيا من E_1 نحو E_2 ، صور أشعة أساس E_1 :

$f(u_1)$، $f(u_2)$، ...، $f(u_n)$ هي أشعة من E_2 فهي تكتب على شكل تركيب خطي لأشعة أساس E_2 على النحو التالي :

$$f(\mathrm{u}_1) = \mathrm{a}_{11}\mathrm{v}_2 + \mathrm{a}_{21}\mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{m1}\mathrm{v}_m$$

$$f(\mathrm{u}_2) = \mathrm{a}_{12}\mathrm{v}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{m2}\mathrm{v}_m$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad + \quad \vdots$$

$$f(\mathrm{u}_n) = \mathrm{a}_{1n}\mathrm{v}_1 + \mathrm{a}_{2n}\mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mn}\mathrm{v}_m$$

حيث a_{ij} هي عناصر من الحقل $\mathbb{R}$.

نسمي المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ بالمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f

بالنسبة لأساس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ في E_1 و الأساس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ في E_2، و نقول أيضا أن f هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

لاحظ أن العمود الأول للمصفوفة مكون من المقادير السليمة للمرج الخطي في المعادلة الأولى، و العمود الثاني من المعادلة الثانية و هكذا إلى آخر العمود.

ملاحظـــة:

عدد الأعمدة = عدد أشعة أساس فضاء المنطق $\dim(E_1) = E_1$

عدد الأسطر = عدد أشعة أساس فضاء الوصول (المستقر) $\dim(E_2) = E_2$

فمثلا إذا كان التطبيق الخطي معرفا من $\mathbb{R}^4$ نحو $\mathbb{R}^2$ فإن المصفوفة المرافقة له تكون ذات أربعة أعمدة وسطران.

وإذا كانت المصفوفة ذات ثلاثة أسطر و خمسة أعمدة فإن أعمدة التطبيق الخطي المرافق لها يكون معرفا من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^5$

ملاحظـــة :

إذا غيرنا الأساس فإن عناصر المصفوفة أيضا تتغير.

رتبـــة المصفـــوفات

تعــــــريف :

رتبة المصفوفة $(rang)M$ هي رتبة التطبيق الخطي المرافق لها و هي أيضا أكبر أشعة أعمدة تكون مستقلة خطيا .

ونقصد بأشعة أعمدة الأشعة المكونة من عناصر الأعمدة فكل عمود يعطينا مركبات شعاع

مثـــــال :

ماهي رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ؟

أشعة الأعمدة هي $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإذا كانت هذه الأشعة مستقلة خطيا فالمصفوفة رتبتها 3 و إذا لم تكن كذلك نبحث هل يوجد شعاعان مستقلان خطيا و في هذه الحالة رتبتها 2 و إذا كانت كل الأشعة مرتبطة خطيا مثنى فالرتبة 1 .

يمكننا البحث عن التطبيق الخطي المرافق لها ثم تعين الرتبة .