

Corrigé de l'examen (2h)

Exercice 1. (08pts)

Donner la région critique du:

1. test, unilatéral à droite, de la moyenne d'une population gaussienne de variance connue? (2pts)
2. test, bilatéral, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances connues? (2pts)
3. test, unilatéral à gauche, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues? (2pts)
4. test, unilatéral à droite, de comparaisons de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues supposées égales? (2pts)

Exercice 2. (12 pts)

Soit $(X_1, \dots, X_{12})$ un échantillon d'une population X normale centrée de variance σ^2 . On s'intéresse au test suivant:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \leq 2 \\ H_1 : \sigma^2 > 2 \end{cases}.$$

1. Quel test s'agit-il: unilatéral ou bilatéral? (1pt)
2. Donner la statistique de test à utiliser. (2pts)
3. Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, donner la région critique de ce test. (3pts)
4. Donner la fonction puissance de ce test. (3pts)
5. Tracer soigneusement le graphe de la fonction puissance. (3pts)

1 Solution de l'exercice 1

1. Le test, unilatéral à droite, de la moyenne d'une population gaussienne de variance connue σ , est

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &\leq \mu_0 \\ H_1 : \mu &> \mu_0. \end{aligned}$$

La région critique associéé est:

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \geq z_{1-\alpha} \right\},$$

où $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi normale centrée-réduite.

2. Test, bilatéral, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances connues, est:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 &= \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 &\neq \mu_2 \end{aligned}$$

avec σ_1 et σ_2 connues. La région critique associée est:

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \geq z_{1-\alpha/2} \right\},$$

où $z_{1-\alpha/2}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est à dire $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.

3. Test, unilatéral à gauche, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues, est (le test de Welch)

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\tilde{s}_1^2/n_1 + \tilde{s}_2^2/n_2}} \leq t_\alpha(\nu) \right\},$$

où $t_\alpha(\nu)$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre α de $t(\nu)$ (student), où

$$\nu := \frac{(\tilde{s}_1^2/n_1 + \tilde{s}_2^2/n_2)^2}{\tilde{s}_1^4/(n_1^2(n_1-1)) + \tilde{s}_2^4/(n_2^2(n_2-1))}.$$

4. Test, unilatéral à droite, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues supposé égales, est

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

avec σ_1 et σ_2 inconnues. La région critique associée est:

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\tilde{s} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha} \right\},$$

où $t_{1-\alpha}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de $t(n_1 + n_2 - 2)$.

2 Solution de l'exercice 2

C'est un exercice résolu de TD.