محور جديد : دراسة استقرار السلاسل الزمنية.

تمهيد :

قبل القيام بنمذجة س ز والتنبؤ بها يجب في البداية التأكد من الخصائص العشوائية للسلسلة، فإذا كان المتوسط الحسابي (الأمل الرياضي، التوقع) والتباين للسلسلة ثابتين عبر الزمن نقول عندئذ أن السلسلة مستقرة ومقبولة للنمذجة والتنبؤ، فالسلسلة الزمنية المستقرة هي التي تتغير مستوياتها عبر الزمن مع ثبات المتوسط والتباين عبر الزمن، أي عدم وجود اتجاه عام لا بالزيادة ولا بالنقصان.

الخصائص الإحصائية لاستقرارية السلسلة الزمنية :

نقول عن السلسلة y_t أنها مستقرة إذا حققت الشروط التالية :

* $E(y_t) = E(y_{t+1}) = \mu$ ثبات المتوسط عبر الزمن.
* $Var(y_t) = Var(y_{t+1}) = \delta^2$ ثبات التباين.

استقلال التباين المشترك عبر الزمن.

* $Cov(y_t, y_{t+1}) = E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)] = \gamma_h$

* إن التمثيل البياني للسلسلة يعطينا إيحاءات عن استقرارية السلسلة من عدمه غير أن هذا لا يكفي بل يجب الاعتماد على اختبارات احصائية متخصصة سنتعرف عليها فيما يلي :

1- سلسلة التشويش الأبيض :

تعرف سلسلة الضجة البيضاء أو التشويش الأبيض على أنها عبارة عن متتابعة من المشاهدات المستقلة فيما بينها ولها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم وتباين ثابت ونرمز لها بالرمز BB. فإذا كانت سلسلة تشويش أبيض (y_t) يكون فيها :

* $E(y_t) = 0$ - متوسط معدوم
* $Var(y_t) = \delta^2$ - ثبات التباين
* $Cov(y_t, y_{t+k}) = 0 \quad , \forall t \neq j$ - التقايس.

ملاحظة : من تعريف سلسلة التشويش الأبيض كل من الأمل والتباين والتباين المشترك لهذه السلسلة هي ثوابت وتختلف عن الزمن وبالتالي فهي تحقق شروط الاستقرارية وعليه يمكننا القول أن أي سلسلة تشويش أبيض هي مستقرة بالتعريف ولا نحتاج إلى إثبات ذلك.

4- دالة الارتباط الذاتي r_h

هي الدالة التي تقيس الارتباط بين السلسلة (y_t) ونفس السلسلة بتأخير قدره h أي y_{t-h} ونرمز له بالرمز ρ_h ونكتب:

$$\rho_h = \frac{cov(y_t, y_{t-h})}{\delta y_t \times \delta y_{t-h}}$$

وعمليا فإننا نستعمل مقدرة دالة الارتباط الذاتي وهي:

$$r_h = \hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n} (y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}$$

مثال: أحسب قيمة معاملات الارتباط الذاتي عندما خيارات (إزاحات) قدرها $h=1$، $h=2$، $h=3$ أي أحسب r_1، r_2، r_3 للسلسلة التالية:

$\bar{y} = 13$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
y_t	5	6	7	-5	-1	5	10	25	69	
① $y_t - \bar{y}$	-8	-7	-6	-18	-14	-8	-3	12	52	
② $y_{t-h} - \bar{y}$	—	-8	-7	-6	-18	-14	-8	-3	12	
①×②	—	+56	+42	+108	+252	+112	+24	-36	+624	1182
$(y_t - \bar{y})^2$	64	49	36	324	196	64	9	144	2704	3590

$$r_1 = \frac{1182}{3590} = 0,329$$

$y_{t-2} - \bar{y}$	—	—	48	126	84	144	42	-196	156	192
$y_{t-3} - \bar{y}$	—	—	—	144	98	48	84	-168	-416	-240

$$r_2 = \frac{192}{3590} = 0,053 \qquad r_3 = \frac{-240}{3590} = -0,067$$

خواص دالة الارتباط الذاتي:

- $\rho(h) = \rho(-h)$ دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر.
- $-1 \leq \rho_h \leq 1$ دالة الارتباط الذاتي محصورة بين القيمتين 1، -1
- لما $h=0$ $\rho_0 = 1$
- $\rho_h = 1$
- يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي بـ Correlogramme وتتراوح قيمه بين 1، -1

- تحديد قيم التأخير h إذا كان طول السلسلة الممزوجة يقل عن 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير تكون $\frac{n}{6} \leq h \leq \frac{n}{3}$ أما إذا كان طول السلسلة أكبر من 150 مشاهدة فإن قيمة التأخير تكون مساوية إلى خمس عدد المشاهدات $h = \frac{n}{5}$ وعمليا إذا كانت المعطيات شهرية أو فصلية نأخذ $h = 24$ من أجل ملاحظة كل التغيرات الشهرية والفصلية أما إذا كانت المعطيات يومية نأخذ قيمة التأخير h محصورة بين 30 و 36.
$30 \leq h \leq 36$ أما في حالة المعطيات السنوية فنأخذ h محصورين بين 15 و 20
$15 \leq h \leq 20$

- تحليل دالة الارتباط الذاتي:

لقيم دالة الإرتباط الذاتي دور كبير في تحليل مركبات السلسلة الزمنية ودراسة مدى استقراريتها.

1- مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي: في حالة العينات الكبرى أي لما يفوق حجم العينة 30 مشاهدة فإن r_h تتوزع حسب توزيع طبيعي بمتوسط معدوم

$$r_h \sim N(0, Var(r_h) = \frac{1}{n}(1 + 2\sum_{i=1}^{h} r_i^2))$$

ويكون مجال الثقة بمستوى معنوية 5% هو

$$r_h \in [-1,96\sqrt{Var(r_h)}, 1,96\sqrt{Var(r_h)}]$$

فإذا كانت r_h تقع داخل مجال الثقة فإننا نقبل فرضية العدم والتي تنص على أن $\rho_h = 0$ بمستوى معنوية 5%، ولما تكون معاملات الارتباط تقع داخل مجال الثقة فهي احصائيا معدومة وبالتالي يمكن القول أن السلسلة y_t بدون ذاكرة ولا وجود لمركبة اتجاه عام ولا مركبة فصلية وبالتالي فهي مستقرة وقيمتها تقع داخل المجال

$$r_h \in [\frac{-1,96}{\sqrt{n}}, \frac{1,96}{\sqrt{n}}]$$

اختبار معنوية دالة الارتباط الذاتي:

يمكن اختبار معنوية دالة الارتباط الذاتي بحساب احصائية ستودنت $t_{r_h} = \frac{r_h}{\sqrt{(Var\, r_h)}}$

3- دالة الارتباط الذاتي الجزئي PAC

هي دالة الارتباط الذاتي الجزئي تقيس الارتباط بين السلسلة y ونفس السلسلة بتأخير قدره h بعد ازالة الترابط الناتج عن القيم التي بينهما، يرمز لها بالرمز Φ_{hh} ونكتب r_{hh} ولما تكون $h=0$ فإن $r_{hh} = r_0 = 1$

وإذا $h=1$ فإن $r_{hh} = r_{11} = r_1$

في حالة h تختلف عن 0 و 1 فإن

$$r_{hh} = \frac{|P_h^*|}{|P_h|}$$

P_h هي مصفوفة مربعة ذات البعد h.

$$|P_h| = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{h-1} \\ r_1 & 1 & & & \\ r_2 & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ r_{h-1} & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$|P_h^*| = \begin{vmatrix} 1 & & & r_{h-2} & r_2 \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ r_{h-2} & & & & \\ r_{h-1} & & & r_1 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$r_{hh} = \frac{r_h - \sum_{i=1}^{h-1} r_{h-1,i} \times r_{h-1}}{1 - \sum r_{h-1,i} \times r_i}$$

$$r_{hi} = r_{h-1,i} - r_{hh} \cdot r_{h-1,h-1}$$

مثال: ليكن لدينا البيانات التالية

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	11	5	10	2	8	8	8	2	10	12

المطلوب: 1- احسب معاملات الارتباط الذاتي عند الازاحة 1، 2، 3

2- احسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئية لنفس الازاحات السابقة.

$$r_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n} (y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2} \quad ; \quad r_{hh} = \frac{r_h - \sum_{i=1}^{h-1} r_{h-1,i} \times r_{h-1}}{1 - \sum_{i=1}^{h-1} r_{h-1,i} \cdot r_i}$$

$$r_{ht} = r_{h-1,t} - r_{hh}\, r_{h-1,h-1}$$

$h=1$ ، $r_{11} = r_1$