Solution détaillée de l'Exercice 03 - Statistiques d'ordre

Exercice 03 : Statistiques d'ordre

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Fonctions de répartition de $X_{(1)}$ et $X_{(n)}$

(a) $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\
&= 1 - P(X_{(1)} > x) \\
&= 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_n) > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F(x)] \\
&= 1 - [1 - F(x)]^n
\end{aligned}$$

La densité de $X_{(1)}$ est donc :

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

(b) $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \le x) \\
&= P(\max(X_1, \dots, X_n) \le x) \\
&= P(X_1 \le x, X_2 \le x, \dots, X_n \le x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} F(x) \\
&= [F(x)]^n
\end{aligned}$$

La densité de $X_{(n)}$ est donc :

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

2. Loi du couple $(X_{(1)}, X_{(n)})$

(a) Fonction de répartition jointe

Pour $s < t$:

$$\begin{aligned}
F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) &= P(X_{(1)} \le s, X_{(n)} \le t) \\
&= P(\text{au moins un } X_i \le s \text{ et tous } X_i \le t) \\
&= P(\text{tous } X_i \le t) - P(s < X_i \le t \ \forall i) \\
&= [F(t)]^n - \prod_{i=1}^{n} P(s < X_i \le t) \\
&= [F(t)]^n - [P(s < X_1 \le t)]^n \\
&= [F(t)]^n - [F(t) - F(s)]^n
\end{aligned}$$

Pour $s \ge t$:

$$F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) = P(X_{(n)} \le t) = [F(t)]^n$$

(b) Densité jointe

Pour $s < t$, en dérivant la fonction de répartition jointe :

$$\begin{aligned}
f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left([F(t)]^n - [F(t) - F(s)]^n\right)
\end{aligned}$$

Dérivée partielle par rapport à s :

$$\frac{\partial}{\partial s} = 0 - n[F(t) - F(s)]^{n-1} \cdot (-f(s)) = n[F(t) - F(s)]^{n-1} f(s)$$

Dérivée partielle par rapport à t :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left[n[F(t) - F(s)]^{n-1} f(s)\right] = n(n-1)[F(t) - F(s)]^{n-2} f(s) f(t)$$

Donc :

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) = n(n-1)[F(t) - F(s)]^{n-2} f(s) f(t) \quad \text{pour } s < t$$

(c) Indépendance

Les densités marginales sont :

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(s) &= n[1 - F(s)]^{n-1} f(s) \\ f_{X_{(n)}}(t) &= n[F(t)]^{n-1} f(t) \end{aligned}$$

Le produit donne :

$$f_{X_{(1)}}(s) \cdot f_{X_{(n)}}(t) = n^2 [1 - F(s)]^{n-1} [F(t)]^{n-1} f(s) f(t)$$

Alors que la densité jointe est :

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) = n(n-1)[F(t) - F(s)]^{n-2} f(s) f(t)$$

Clairement :

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t) \neq f_{X_{(1)}}(s) \cdot f_{X_{(n)}}(t)$$

donc $X_{(1)}$ et $X_{(n)}$ **ne sont pas indépendantes**.

3. Loi de l'étendue $W = X_{(n)} - X_{(1)}$

(a) Fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(X_{(n)} - X_{(1)} \leq w) \\ &= \iint_{t-s \leq w} f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s,t)\, ds\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{s}^{s+w} n(n-1)[F(t) - F(s)]^{n-2} f(s) f(t)\, dt\, ds \end{aligned}$$

(b) Densité

En dérivant par rapport à w :

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{d}{dw} F_W(w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)[F(s+w) - F(s)]^{n-2} f(s) f(s+w)\, ds \end{aligned}$$

4. Fonction de répartition de $X_{(k)}$

Soit $N_x = \#\{i : X_i < x\} \sim \text{Binomial}(n, F(x))$. Alors :

$$\begin{aligned} P(X_{(k)} < x) &= P(\text{au moins } k \text{ observations sont } < x) \\ &= P(N_x \geq k) \\ &= \sum_{i=k}^{n} P(N_x = i) \\ &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \end{aligned}$$

5. Densité de $X_{(k)}$

Méthode combinatoire

Pour que $X_{(k)} \in [x, x + dx]$, on doit avoir :

- 1 observation dans $[x, x + dx]$: probabilité $f(x)dx$
- $k - 1$ observations $< x$: probabilité $[F(x)]^{k-1}$
- $n - k$ observations $> x$: probabilité $[1 - F(x)]^{n-k}$
- Nombre de façons : $n \times \binom{n-1}{k-1}$

Donc :

$$f_k(x)dx = n \binom{n-1}{k-1} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x)dx$$

Formule finale

$$f_k(x) = n \binom{n-1}{k-1} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x)$$

Résumé des résultats

1. **Extrêmes** :
   - $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$
   - $F_{X_{(n)}}(x) = [F(x)]^n, \quad f_{X_{(n)}}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$
2. **Couple** : $f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s, t) = n(n-1)[F(t) - F(s)]^{n-2} f(s) f(t)$ pour $s < t$
3. **Étendue** : $f_W(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)[F(s+w) - F(s)]^{n-2} f(s) f(s+w) ds$
4. **Statistique d'ordre** k :
   - $F_{X_{(k)}}(x) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}$
   - $f_k(x) = n\displaystyle\binom{n-1}{k-1} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x)$