3.8. Les ailettes

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres.

Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées sont à transmettre dans un encombrement réduit (exemples : refroidissement des composants électriques, refroidissement d'un moteur par air, évaporateur d'un climatiseur…). Quand la section de l'ailette est constante, on l'appelle barre.

3.8.1. Différentes formes d'ailettes utilisées dans la pratique

Les ailettes peuvent avoir de multiples formes et géométries selon les applications désirées, elles peuvent être liées à la surface mère de différentes façons.

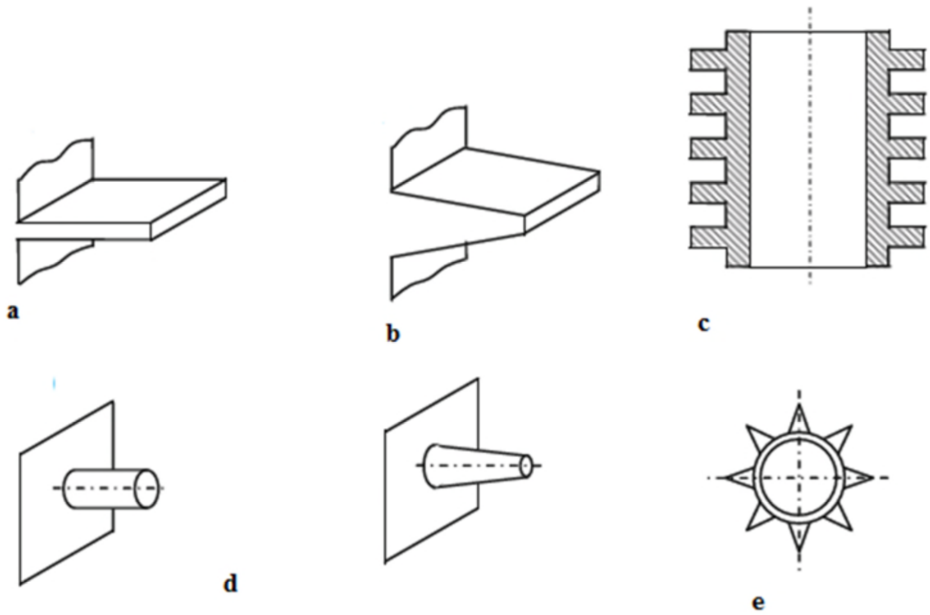

Figure 3.17. Différentes formes d'ailettes a : ailette rectangulaire, b : ailette trapézoïdale, c : tube à ailettes, d : ailette à épine ou à clous, e : ailette en étoile.

3.8.2. Développement de l'équation générale unidimensionnelle

Soit l'ailette rectangulaire de longueur L dont la section droite à une aire S et un périmètre P nous admettons que la température du pied d'ailette est T_p (x=0).

T_p : la température de la paroi extérieure du mur. L'ailette est plongée dans l'air à température T_{air} (T_∞). La transmission de la chaleur se fait le long de l'ailette et se dissipe par convection dans le milieu ambiant.

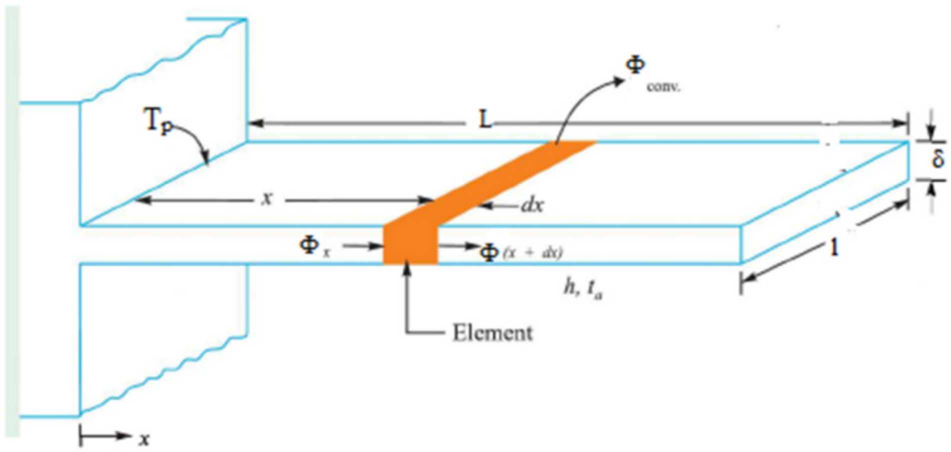

Figure 3.18. Volume élémentaire d'une ailette rectangulaire de longueur dx de section S et de périmètre P.

Soit un élément de l'ailette compris entre les sections x et x+dx

Le bilan énergétique de cet élément de volume peut être exprimé comme suit :

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_{conv} \tag{3.107}$$

Φ_x Le flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse (x),

$$\Phi_x = \left(-\lambda \frac{dT}{dx} S \right)_x \tag{3.108}$$

$\Phi_{x+\Delta x}$ Le flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse (x+dx)

$$\Phi_{x+dx} = \left(-\lambda \frac{dT}{dx} S\right)_{x+dx} \tag{3.109}$$

Φ_{con} Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre x et x+dx.

.

$$\Phi_{conv} = hPdx\left(T(x) - T_{\infty}\right) \tag{3.110}$$

Admettons les paramètres ci-dessous relatifs au problème considéré :

P : Le périmètre de la section droite de l'ailette P=2(δ+l) [m]

λ : La conductivité thermique [W/m.K].

h : Le coefficient d'échange convectif [W/m^2 .k]

T_{∞} : La température ambiante [°C]

S : La surface de la section droite de la tige S= (l x δ) [m^2]

L'équation (3.107) devient :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx} S\right)_{x+dx} - \left(\lambda \frac{dT}{dx} S\right)_{x} = hPdx\left(T(x) - T_{\infty}\right) \tag{3.111}$$

Si λ et S sont indépendantes de l'abscisse x, nous obtenons :

$$\frac{\lambda S \left(\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x}\right)}{dx} = hP\left(T(x) - T_{\infty}\right) \tag{3.112}$$

$$\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} = hP\left(T(x) - T_{\infty}\right) \tag{3.113}$$

$$\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} - hP\left(T(x) - T_{\infty}\right) = 0 \tag{3.114}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S}\left(T(x) - T_{\infty}\right) = 0 \tag{3.115}$$

Effectuant un changement de variable on posant :

$$\theta = T - T_\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\left(T - T_\infty\right)}{dx} = \frac{dT}{dx} \tag{3.116}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\left(T - T_\infty\right)}{dx} = \frac{dT}{dx} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S}\theta = 0 \tag{3.117}$$

On pose :

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{hP}{\lambda S} \tag{3.118}$$

L'équation (3.115) prend la forme suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \tag{3.119}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire, du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$\theta\left(x\right) = Ae^{mx} + Be^{-mx} \tag{3.120}$$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites à x=0 et x=L

- **Conditions aux limites**

La condition correspond à l'abscisse x=0 est :

$$\theta\left(x=0\right) = A + B \tag{3.121}$$

$$\theta_P = T_P - T_\infty \tag{3.122}$$

Par contre quatre conditions aux limites peuvent être envisagées à x=L.

- **Conditions de Dirichlet (barre infiniment longue)**

T_L température imposé au point L : physiquement c'est le cas d'une barre infiniment longue dont la température à l'extrémité est supposé égale à T_∞ (température du fluide).

Dans ce cas :

à $\quad x = 0 \quad T = T_P \quad \theta = \theta_0 = T_P - T_\infty \qquad (3.123)$

à $\quad x = L \quad T = T_L = T_\infty \quad \theta = 0 = T_\infty - T_\infty \qquad (3.124)$

- **Conditions de Dirichlet (température imposée T_L)**

à $x = 0$ $T = T_P$ $\theta = \theta_0 = T_P - T_\infty$ (3.125)

à $x = L$ $T = T_L$ $\theta = \theta_L = T_L - T_\infty$ (3.126)

- **Condition de Newman $\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_L$ est imposée**

Physiquement, c'est le cas d'une barre infiniment mince et qui n'échange aucune quantité de chaleur par son extrémité (c'est à dire adiabatique)

à $x = 0$ $T = T_P$ $\theta = \theta_0 = T_P - T_\infty$ (3.127)

à $x = L$ $\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_L = \left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)_L = 0$ (3.128)

- **Condition de Fourier**

à $x = 0$ $T = T_P$ $\theta = \theta_0 = T_P - T_\infty$ (3.129)

à $x = L$ $\left(\dfrac{dT}{dx}\right)_L = f(T)_L$ (3.130)

3.8.3. Ailette infiniment longue de section constante

Dans ce cas, l'ailette est considérée comme très longue, c'est-à-dire que $L \to \infty$ avec une température à l'extrémité libre égale à $T (x=L) = T_\infty$ où L est la longueur de l'ailette.

Les conditions aux limites

Pour $x=0$ $\theta(0) = T_P - T_\infty$ (3.131)

Pour $x = L$ $L \to \infty$ $\theta(L) = 0 \Rightarrow 0 = Ae^{mL} + Be^{-mL}$ (3.132)

Cette condition est vraie pour A=0

La substitution de A par 0 dans l'équation (3.120) prend la forme suivante : $\theta(x) = Be^{-mx}$ (3.133)

Détermination de B.

Pour $x=0 \quad \theta(0)=Be^{-m0}=B=T_P-T_\infty$ (3.134)

L'expression $\theta(x)$ devient :

$$\theta(x)=(T_P-T_\infty)e^{-mx}=\theta(0)e^{-mx} \quad (3.135)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta(0)}=e^{-mx} \qquad \text{Ou bien} \qquad \frac{(T_x-T_\infty)}{T_P-T_\infty}=e^{-mx} \quad (3.136)$$

$$T(x)=T_\infty+(T_P-T_\infty)e^{-mx} \quad (3.137)$$

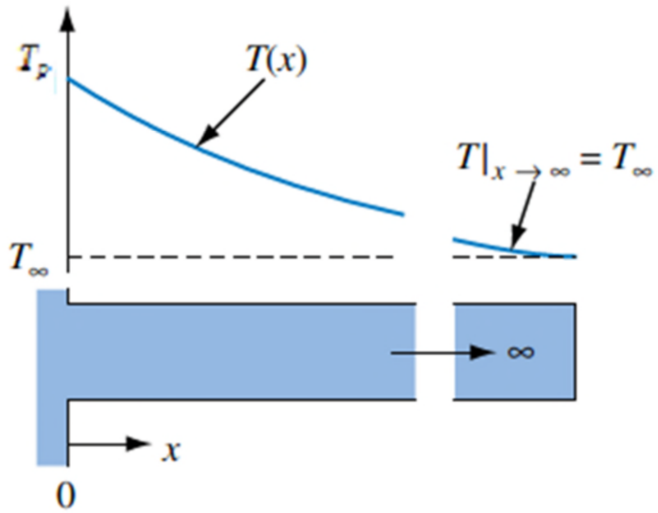

Figure 3.19. Variation de température dans une ailette infiniment

➢ **Le flux de chaleur**

Le flux qui traverse une section à l'abscisse x est donnée par :

$$\Phi(x)=-\lambda\frac{dT}{dx}S=\lambda mS(T_P-T_\infty)e^{-mx} \quad (3.138)$$

Le flux total échangé par l'ailette est le flux traversant la section située à x=0

$$\Phi_{ailette}=\Phi(0)=\lambda mS(T_P-T_\infty)e^{-m0}=\sqrt{hP\lambda S}(T_P-T_\infty) \quad (3.139)$$

Ce flux de chaleur est le flux transmis par l'ailette à l'extérieur.

3.8.4. Ailette avec Température imposée

Dans ce cas, la température à l'extrémité de l'ailette est fixée à une température spécifiée T_L. Ce cas peut être considéré comme une généralisation du cas de l'ailette infiniment longue où la température au bout de l'ailette était fixée à T∞.

Conditions aux limites dans ce cas :

$$x = 0 \qquad T = T_P \qquad \theta = \theta_0 = T_P - T_\infty \tag{3.140}$$

$$x = L \qquad T = T_L \qquad \theta_L = T_L - T_\infty \tag{3.141}$$

On remplace dans l'équation (3.120) $\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx}$

$$x = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 = Ae^0 + Be^0 = A + B \tag{3.142}$$

$$x = L \quad \theta(L) = \theta_L = Ae^{mL} + Be^{-mL} \tag{3.143}$$

Détermination des constantes A et B :

$$\theta(0) = \theta_0 = Ae^0 + Be^0 = A + B \quad \Rightarrow B = \theta_0 - A \tag{3.144}$$

Remplaçant B dans l'équation (3.143)

$$\theta_L = Ae^{mL} + (\theta_0 - A)e^{-mL} = A\left(e^{mL} - e^{-mL}\right) + \theta_0 e^{-mL} \tag{3.145}$$

$$A = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \tag{3.146}$$

$$B = \theta_0 - A = \theta_0 - \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \tag{3.147}$$

Remplaçant A et B dans l'expression de température :

$$\theta(x) = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{mx} + \theta_0 e^{-mx} - \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{-mx} \tag{3.148}$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} + \theta_0 e^{-mx} - \frac{\theta_L e^{-mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \tag{3.149}$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_L e^{-mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx} + \theta_0 e^{-mx} e^{mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \tag{3.150}$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_L e^{mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx} + \theta_0 e^{-mx}\left(e^{mL} - e^{-mL}\right) - \theta_L e^{-mx} + \theta_0 e^{-mL} e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} \tag{3.151}$$

$$\theta(x)=\frac{\theta_L\left(e^{mx}-e^{-mx}\right)+\theta_0\left(e^{-mx}e^{mL}-e^{-mL}e^{mx}\right)}{e^{mL}-e^{-mL}}$$

$$=\frac{\theta_L\left(e^{mx}-e^{-mx}\right)+\theta_0\left(e^{m\,(L-x)}-e^{-m\,(L-x)}\right)}{e^{mL}-e^{-mL}} \quad (3.152)$$

$$\theta(x)=\frac{\theta_L\left(\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2}\right)+\theta_0\left(\frac{e^{m\,(L-x)}-e^{-m\,(L-x)}}{2}\right)}{\frac{e^{mL}-e^{-mL}}{2}} \quad (3.153)$$

Utilisant la relation

$\sin h(mL)=\dfrac{e^{mL}-e^{-mL}}{2}$, l'équation précédente s'écrit comme suit :

$$\theta(x)=\frac{\theta_L\sinh(mx)+\theta_0\sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \quad (3.154)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0}=\frac{\left(\theta_L/\theta_0\right)\sinh(mx)+\sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \quad (3.155)$$

$$T(x)=T_\infty+\left(T_P-T_\infty\right)\left(\frac{\left(T_L-T_\infty\right)\sinh(mx)+\left(T_P-T_\infty\right)\sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)}\right) \quad (3.156)$$

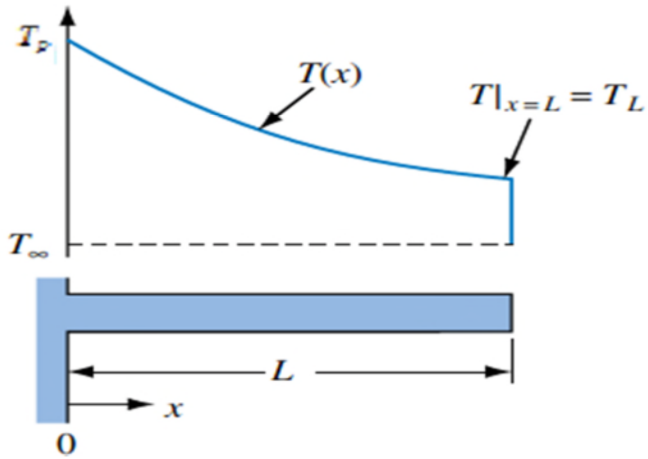

Figure 3.20. Variation de température dans une ailette avec une température imposée

- **Le flux de chaleur dégagé par l'ailette**

$$\Phi_{ailette} = \Phi(0) = -\lambda S \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -\lambda S \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\Phi_{ailette} = -\lambda S \left.\frac{\theta_L m \cosh(mx) - \theta_0 m \cosh(m(L-x))}{\sinh(mL)}\right|_{x=0} = -\lambda S \frac{\theta_L m - \theta_0 m \cosh(mL)}{\sinh(mL)}$$

$$\Phi_{ailette} = \lambda S m \theta_0 \frac{\cosh(mL) - \left(\theta_L / \theta_0\right)}{\sinh(mL)} = \sqrt{hP\lambda S}\,\theta_0 \frac{\cosh(mL) - \left(\theta_L / \theta_0\right)}{\sinh(mL)} \qquad (3.157)$$

3.8.5. Ailette infiniment mince (à extrémité adiabatique)

L'hypothèse d'ailette à extrémité adiabatique signifie que la chaleur ne peut pas être transférée de l'extrémité de l'ailette vers l'environnement. Cette hypothèse est plus réaliste que l'hypothèse d'ailette à température ambiante, car la surface de l'extrémité de l'ailette est généralement une fraction négligeable de la surface totale de l'ailette.

La solution générale obtenue est identique au cas précèdent, ce sont les conditions aux limites qui différent :

Partant de l'équation générale

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty = Ae^{mx} + Be^{-mx} \qquad (3.158)$$

Les conditions aux limites pour ce cas :

$$x = 0 \quad (T_P - T_\infty) = 0 = \theta(0) = A + B \qquad (3.159)$$

$$x = L \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0 \Rightarrow \left. mAe^{mx} - mBe^{-mx}\right|_{x=L} = 0 \qquad (3.160)$$

$$Ae^{mL} - Be^{-mL} = 0 \qquad (3.161)$$

De l'équation (3.159)

$$A = (T_p - T_\infty) - B \qquad (3.162)$$

Donc :

$$A = \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{2mL}} \qquad (3.163) \qquad\qquad B = \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{-2mL}} \qquad (3.164)$$

$$\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx} = \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{T_P - T_\infty}{1 + e^{-2mL}} e^{-mx} \qquad (3.165)$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{T_{(x)} - T_\infty}{T_P - T_\infty} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} = \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \qquad (3.166)$$

Utilisant la relation

$\cos h(mL) = \dfrac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}$, l'équation précédente s'écrit comme suit :

$$\frac{T_{(x)} - T_\infty}{T_P - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \qquad (3.167)$$

$$T_{(x)} = (T_P - T_\infty)\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} + T_\infty \qquad (3.168)$$

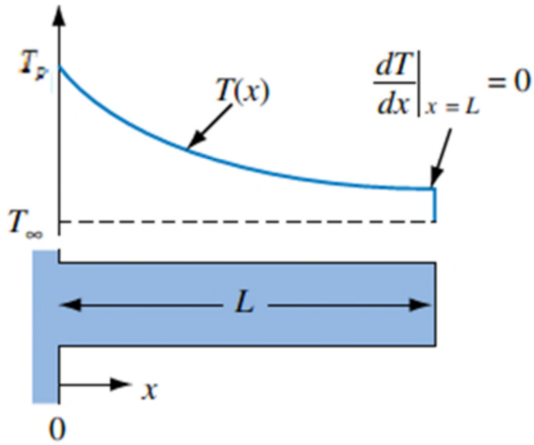

Figure 3.21. Variation de température dans une ailette infiniment mince

➢ Le flux de chaleur

Le taux de transfert de chaleur de l'ailette est donné par :

$$\Phi_{ailette} = \Phi(0) = -\lambda S \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \qquad (3.169)$$

$$T_{(x)} = T_P - T_\infty \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} + T_\infty \qquad (3.170)$$

$$\frac{dT}{dx} = -m\left(T_P - T_\infty\right)\frac{\sinh m(L-x)}{\cosh mL} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -m\left(T_P - T_\infty\right)\frac{\sinh m(L-x)}{\cosh mL}$$

$$= -m(T_p - T_\infty)\tanh(mL) \tag{3.171}$$

$$\Phi_{ailette} = \lambda S m(T_p - T_\infty)\tanh(mL) = \sqrt{Ph\lambda S}\,(T_p - T_\infty)\tanh(mL) \tag{3.172}$$

3.8.6. Ailette avec perte de la chaleur par convection à l'extrémité

Les conditions aux limites

$$x = 0 \qquad \left(T_P - T_\infty\right) = 0 = \theta(0) = \theta_0 = A + B \tag{3.173}$$

$$x = L \qquad -\lambda S \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = hS(T - T_\infty) \qquad \Rightarrow \quad \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = -\frac{h\theta}{\lambda} \tag{3.174}$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \left. m\,Ae^{mx} - m\,Be^{-mx}\right|_{x=L} = -\frac{h\theta}{\lambda} \tag{3.175}$$

$$Ae^{mL} - Be^{-mL} = -\frac{h\theta}{\lambda m} = -\frac{h}{\lambda m}\left[Ae^{mL} + Be^{-mL}\right] \tag{3.176}$$

Détermination des constantes A et B

De l'équation (3.173) on a :

$$B = \theta_0 - A \tag{3.177}$$

On remplace B dans l'équation (3.176)

$$Ae^{mL} - \left(\theta_0 - A\right)e^{-mL} = -\frac{h}{\lambda m}\left[Ae^{mL} + \left(\theta_0 - A\right)e^{-mL}\right] \tag{3.178}$$

$$Ae^{mL} - \theta_0 e^{-mL} + Ae^{-mL} = -\frac{h}{\lambda m}\left[Ae^{mL} + \theta_0 e^{-mL} - Ae^{-mL}\right] \tag{3.179}$$

$$A\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)=\theta_0\, e^{-mL}+\frac{h}{\lambda m}\theta_0 e^{-mL} \tag{3.180}$$

$$A=\frac{\theta_0\, e^{-mL}\left(1-\frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)} \tag{3.181}$$

$$B=\theta_0-A \quad \Rightarrow \quad B=\theta_0-\frac{\theta_0\, e^{-mL}\left(1-\frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)} \tag{3.182}$$

$$B=\theta_0\left[1-\frac{e^{-mL}\left(1-\frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}\right] \tag{3.183}$$

$$B=\theta_0\left[\frac{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)-e^{-mL}+\frac{h}{\lambda m}e^{-mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}\right] \tag{3.184}$$

$$B=\frac{\theta_0\left(1+\frac{h}{\lambda m}\right)e^{mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)} \tag{3.185}$$

Substituant les valeurs de A et B dans l'équation générale : $\theta(x)=T(x)-T_\infty=Ae^{mx}+Be^{-mx}$

$$\theta(x)=\frac{\theta_0\, e^{-mL}\left(1-\frac{h}{\lambda m}\right)}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}e^{mx}+\frac{\theta_0\left(1+\frac{h}{\lambda m}\right)e^{mL}}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)}e^{-mx} \tag{3.186}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{\left(e^{m(L-x)}+e^{-m(L-x)}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{m(L-x)}-{}^{-m(L-x)}\right)}{\left(e^{mL}+e^{-mL}\right)+\frac{h}{\lambda m}\left(e^{mL}-e^{-mL}\right)} \tag{3.187}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{T_{(x)}-T_\infty}{T_P-T_\infty}=\frac{\cosh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)} \quad (3.188)$$

$$T_{(x)}=T_\infty+\left(T_P-T_\infty\right)\left[\frac{\cosh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right] \quad (3.189)$$

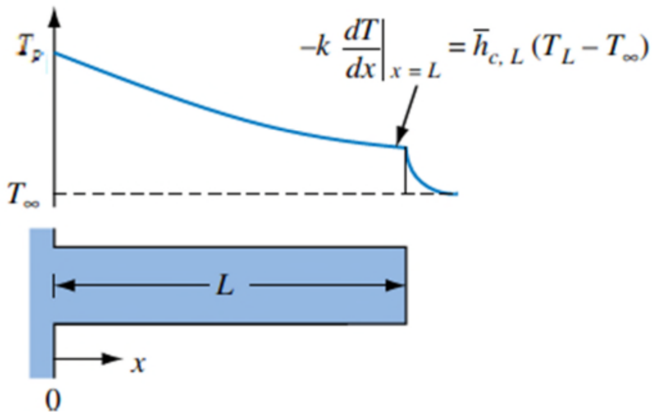

Figure 3.22. Variation de température dans une ailette avec perte de chaleur avec convection

➢ Le flux de chaleur

Le taux de transfert de chaleur de l'ailette est donné par :

$$\Phi(0)=-\lambda S\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \quad (3.190)$$

On a :

$$T_{(x)}=T_\infty+\left(T_P-T_\infty\right)\left[\frac{\cosh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right] \quad (3.191)$$

En différenciant l'expression ci-dessus par rapport à x, nous obtenons

$$\frac{dT}{dx}=\left(T_P-T_\infty\right)\left[\frac{-m\sinh\left(m(L-x)\right)-m\frac{h}{\lambda m}\cosh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right] \quad (3.192)$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -m\left(T_P - T_\infty\right)\left[\frac{\sinh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\cosh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right] \tag{3.193}$$

$$\Phi_{ailette} = \lambda S m\left(T_P - T_\infty\right)\left[\frac{\sinh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\cosh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right] \tag{3.194}$$

L'expression finale du flux est :

$$\Phi_{ailette} = \sqrt{ph\lambda S}\left(T_P - T_\infty\right)\left[\frac{\sinh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\cosh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right] \tag{3.195}$$

Tableau 3. Equations de variation de température et de la perte de chaleur des ailettes de section transversale uniforme pour les différentes conditions aux limites.

Cas	Type de condition à la limite (x=L)	Distribution de température $\theta(x)/\theta_0$	Taux de transfert de chaleur Φ
1	Infiniment longue ($L\to\infty$) $\theta(L)=0$	e^{-mx}	M
2	Température imposé $\theta(L)=\theta_L$	$\frac{\left(\theta_L/\theta_0\right)\sinh(mx)+\sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)}$	$M\,\frac{\cosh(mL)-\left(\theta_L/\theta_0\right)}{\sinh(mL)}$
3	Adiabatique $\left.d\theta/dx\right\|_{x=L}=0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M\tanh(mL)$
4	Transfert convectif $-\lambda\left.d\theta/dx\right\|_{x=L}=h\theta(L)$	$\frac{\cosh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}$	$M\left[\frac{\sinh\left(m(L-x)\right)+\frac{h}{\lambda m}\cosh\left(m(L-x)\right)}{\cosh\left(mL\right)+\frac{h}{\lambda m}\sinh\left(mL\right)}\right]$
Avec	$M=\sqrt{ph\lambda S}\theta_0$	$\theta_0=\left(T_P-T_\infty\right)$	$m=\sqrt{\frac{hP}{\lambda S}}$

3.8.7. Performances des ailettes

Les ailettes sont utilisées pour augmenter le flux de chaleur transféré du solide vers l'environnement. Cependant, elles ont également une résistance thermique, qui peut limiter leur efficacité. Si l'ailette n'est pas correctement dimensionnée, sa présence peut même réduire le flux de chaleur.

Pour évaluer les performances des ailettes, deux notions totalement différentes introduites : L'efficacité et le rendement.

- L'efficacité de l'ailette

On définit l'efficacité d'une ailette comme étant le rapport entre le flux de chaleur évacué par l'ailette et le flux de chaleur qui serait évacué sans ailette :

$$\varepsilon = \frac{\Phi_{ailette}}{\Phi_{sans\ ailette}} > 1 \tag{3.196}$$

- Le rendement de l'ailette η

Le rendement de l'ailette est défini comme étant le rapport entre le taux de transfert de chaleur réel de l'ailette et le taux de transfert thermique maximal de l'ailette, qui existerait si elle était toute à la température de la base.

$$\eta = \frac{\Phi_{réel}}{\Phi_{\max}} < 1 \tag{3.197}$$