جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — 13 جانفي 2025

السنة الأولى — المدة ساعة و نصف

الامتحان النهائي للمقياس الرياضيات 1

التمرين 01: (08 نقاط) (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 1' \end{cases}$$

1) أحسب u_1 و u_2
2) برهن بالتراجع : $\forall n \in N,\ u_n > -2$
3) اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما
4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على **N** كما يلي : $v_n = u_n + 2$
   أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$
   ب) أكتب (v_n) بدلالة n , ثم بين أنه : $\forall n \in N, u_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$
   ت) أحسب $\lim_{n\to\infty} u_n$
5) أحسب بدلالة n كلا من المجموعين S_n و T_n حيث :

$$S_n = v_0 + \cdots + v_n$$

$$T_n = \frac{1}{2+u_0} + \cdots + \frac{1}{2+u_n}$$

التمرين 02: (12 نقطة) f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = 1 + \frac{1+2\ln x}{x^2}$$

(Γ_f) المنحنى البياني للدالة f .

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
2) أثبت أن f تقبل الاشتقاق على مجال تعريفها و أحسب مشتقها
3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
4) بين أن المنحنى (Γ_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة في المجال $[0,52 ; 0,53]$
5) أحسب $f(e)$, ثم أرسم (Γ_f) في معلم متعامد و متجانس
6) أثبت أن الدالة f تقبل المكاملة و أحسب دالتها الأصلية
7) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (Γ_f) و محور الفواصل و المستقيمان : $x=1$ و $x=e$.

25/24

التصحيح النموذجي
للإختبار 01

التمرين 01:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) $u_1 = \frac{3}{4}u_0 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ 0.5

$u_2 = \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{2} = \frac{11}{8}$ 0.5

2) الفرضية الابتدائية $n=0$. $u_0 = 4 > -2$ 0.5

الفرضية التراجعية: نفرض العاصية صحيحة من أجل n أي:

$u_n > -2$

نثبت صحتها من أجل $n+1$:

$u_n > -2 \Rightarrow \frac{3}{4}u_n > -\frac{3}{4}$ 1

$\Rightarrow \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} > -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -2$

$\Rightarrow u_{n+1} > -2$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_n > -2$ 0.5

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n$

$= -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(u_n + 2)$

لدينا $u_n + 2 > 0$ لأن $u_n > -2$ ومنه $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}(u_n+2) < 0$

أي (u_n) متناقصة. 01

4) 1) $v_{n+1} = u_{n+1} + 2$

$= \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{4}(u_n + 2) = \frac{3}{4}v_n$

01

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ و $v_0 = 6$

ب)

$$V_n = V_0 \cdot q^n$$

$$V_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad 0,1$$

لدينا

$$V_n = u_n + 2 \Rightarrow u_n = V_n - 2$$

$$\Rightarrow u_n = 6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \quad 0,1$$

ج)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(6\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\right) = -2 \quad 0,1$$

د)

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = 6\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = 24\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \quad 0,1$$

$$T_n = \frac{1}{2+u_0} + \frac{1}{2+u_1} + \dots + \frac{1}{2+u_n}$$

$$= \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$$

(V_n) م.هـ أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $V_0 = 6$

$\left(\frac{1}{V_n}\right)$ م.هـ أساسها $\frac{4}{3}$ وحدها الأول $\frac{1}{V_0} = \frac{1}{6}$

إذن

$$T_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3}}\right) \quad 0,1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right)$$

التمرين 02

$$f(x) = 1 + \frac{1 + 2\ln x}{x^2}$$

$D_f =]0,+\infty[$

(1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ 0,1

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ 0,1

(2) $\forall x \in]0,+\infty[$ 0,1

$f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$

$-4\ln x \times x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x \neq 0 \text{ (محققة)} \end{cases}$ مقبولة

(3)

$x \in]0,1[\Rightarrow f'(x) > 0$ متزايدة 0,1

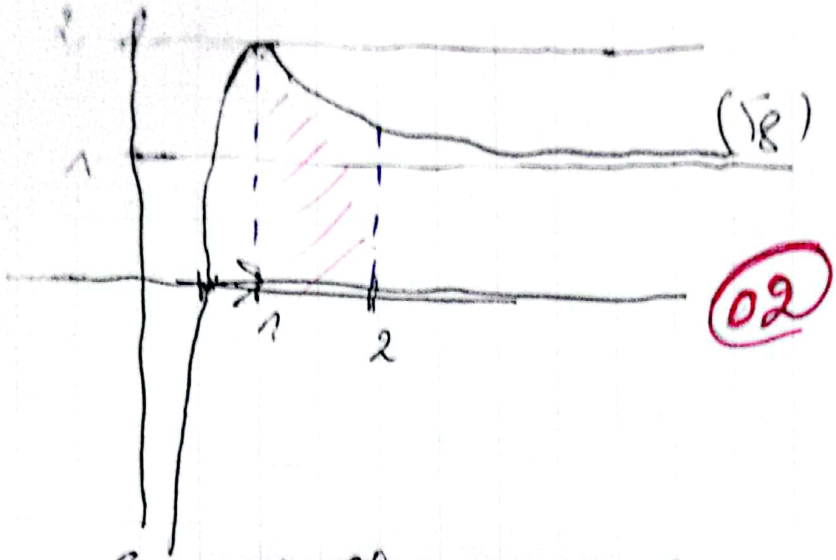
$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

$x \in]1,+\infty[\Rightarrow f'(x) < 0$ متناقصة 0,1

x	0 $0{,}52$ c $0{,}53$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow 1$

0,1

(4) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0{,}52 ; 0{,}53]$



02

$$I = \int \left(1 + \frac{1 + 2\ln x}{x^2}\right)dx = \int dx + \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

نكامل بالتجزئة $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}$

$dv = \frac{1}{x^2} \longrightarrow v = -\frac{1}{x}$

01

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

01

$$I = x - \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C = x - \frac{3 + 2\ln x}{x} + C$$

ومنه

$$S = \int_1^e f(x)dx = \left[x - \frac{3 + 2\ln x}{x}\right]_1^e$$

$$= \left[e - \frac{5}{e}\right] - \left[1 - 3\right]$$

01

$$\boxed{S = \left[e - \frac{5}{2} + 2\right]}$$