Résolution des problèmes Hyperboliques

Le problème hyperbolique est donné par l'équation hyperbolique:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Avec les conditions aux limites :

$$y(0,t) = f_1(x) \quad \text{en} \quad x = 0, t \geq 0$$
$$y(L,t) = f_2(x) \quad \text{en} \quad x = L, t \geq 0$$

Et les conditions initiales

$$y(x,0) = g_1(x) \text{ à } t = 0.$$
$$\partial y_{\overline{\partial t}}(x,0) = g_2(x) \quad \text{à} \quad t = 0.$$

1- Méthode explicite

En utilisant le de différences finies centrées l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Avec un réarrangement on obtient :

$$y_{i,j+1} = r^2 y_{i-1,j} + 2\left(1 - r^2\right) y_{i,j} + r^2 y_{i+1,j} - y_{i,j-1} \text{ avec } r = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Pour *j=1* $y_{i,0}$ se calcul à partir de la condition initiale

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x_i,0) = \frac{y_{i,2} - y_{i,0}}{2\Delta t} = g_2(x_i) \Longleftrightarrow y_{i,0} = y_{i,2} - 2g_2(x_i)\Delta t$$

Alors :

$$y_{i,2} = \frac{1}{2}\left[r^2 y_{i-1,1} + 2\left(1 - r^2\right) y_{i,1} + r^2 y_{i+1,1}\right] + g_2(x_i)\Delta t$$

- **Convergence**

La solution par la méthode explicite converge si la condition suivante est satisfaite

$$r = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

2- Méthode implicite

La méthode implicite consiste à évaluer la moyenne des dérivées en en x de l'équation hyperbolique

$$\frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{(\Delta t)^2} = \frac{c^2}{2}\left[\frac{y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{y_{i-1,j-1} - 2y_{i,j-1} + y_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2}\right]$$

Avec un réarrangement on obtient :

$$r^2 y_{i-1,j+1} - 2\left(r^2+1\right) y_{i,j+1} + r^2 y_{i+1,j+1} = -4y_{i,j} - r^2 y_{i-1,j-1} + 2\left(r^2+1\right) y_{i,j-1} - r^2 y_{i+1,j-1}$$

Avec :

$$r = \tfrac{c\Delta t}{\Delta x}.$$

Pour $j=1$ $y_{i,0}$ se calcul à partir de la condition initiale

$$\frac{\partial y}{\partial t}\left(x_i, 0\right) = \frac{y_{i,2} - y_{i,0}}{2\Delta t} = g_2\left(x_i\right) \Longleftrightarrow y_{i,0} = y_{i,2} - 2g_2\left(x_i\right)\Delta t$$

On obtient :

$$2r^2 y_{i-1,2} - 4\left(r^2+1\right) y_{i,2} + 2r^2 y_{i+1,2} + 4y_{i,1} + G\left(x_i\right) = 0 \text{ telle que}$$
$$G\left(x_i\right) = -2r^2 g_2\left(x_{i-1}\right)\Delta t + 4\left(r^2+1\right) g_2\left(x_i\right)\Delta t - 2r^2 g_2\left(x_{i+1}\right)\Delta t$$

- **Convergence**

La solution par la méthode implicite converge quel que soit la valeur de r