

TP N° : Optimisation non linéaire avec contraintes

On cherche à minimiser (ou à maximiser) une fonction objectif sous des contraintes:

$x \in \mathbb{R}^n$: ensembles des variables

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: fonction du coût (objectif)

$D \subset \mathbb{R}^n$: ensemble des contraintes $g(x)$

$$PO = \begin{cases} \min(\text{ou max}) f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

I- Utilisation de la fonction *fmincon*

La commande *help fmincon* donne accès à l'aide sur cette fonction.

$[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD,HESSIAN] = \text{fmincon}(\text{FUN},X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB, \text{NONLCON}, \text{OPTIONS})$

Arguments d'entrée :

FUN: Fonction objectif qu'on cherche à minimiser.

X0 : vecteur des valeurs initiales pour démarrer la méthode. La dimension de X0 est égale au nombre de variables du problème ;

A et **B** : respectivement une matrice et un vecteur qui permettent d'exprimer les contraintes linéaires de type inégalité sous la forme : $A*x \leq B$.

Aeq et **Beq** : respectivement une matrice et un vecteur qui permettent d'exprimer les contraintes linéaires de type égalité sous la forme : $Aeq*x = Beq$.

LB et **UB** : bornes inférieure et supérieure des éléments de X : domaine dans lequel la solution est recherchée. LB et UB ont la même dimension que X ;

'NONLCON' : nom de la fonction externe MATLAB dans laquelle sont définies les éventuelles contraintes non-linéaires égalité et inégalité. L'entête de *nonlcon.m* est :

function [c,ceq] = nonlcon(x)

c est un vecteur qui contient les résidus des contraintes inégalité (toutes les composantes de c doivent être négatives à la solution).

ceq est un vecteur qui contient les résidus des contraintes égalité (toutes les composantes de ceq doivent être nulles à la solution).

options (pas obligatoire) ;

Arguments de sortie:

X : valeur finale des variables, ce sont les solutions si la méthode a convergé ;

FVAL : valeur finale de la fonction à minimiser ;

EXITFLAG (pas obligatoire) : indicateur de fin d'exécution : 1 arrêt car solution trouvée, 0 car nombre d'itérations maximal atteint ; il existe d'autres valeurs possible.

OUTPUT (pas obligatoire) : nombres d'itérations et d'évaluations de fonction réalisés.

LAMBDA : structure qui contient la valeur des multiplicateurs de Lagrange à la valeur finale de x

GRAD : vecteur gradient à la valeur finale de x

HESSIAN : matrice hessienne à la valeur finale de x

Exemple:

En utilisant la fonction *fmincon* (Matlab) résoudre le problème d'optimisation non linéaire et avec contraintes suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 6x_2x_5 + 7x_1x_3 + 3x_2^2 - x_4^2 \quad x \in \mathbb{R}^5 \\ \text{sous les contraintes: } x_4 - 0.1x_5 \geq 0 \\ x_1 - 0.3x_2 = 0 \\ x_4 \leq 0.5x_5 \\ 3x_2^2x_5 = 20.875 - 3x_1^2x_3 \\ x_3 \geq 0.9x_5 \\ 0 \leq x_3 \leq 20 \\ x_1 \leq 71 + 0.2x_2x_5 \\ x_5 \geq 1 \\ 0.9x_3 \leq x_4^2 + 67 \end{array} \right.$$

Mathématiquement ce problème peut s'écrire:

$$\text{Min } fun(x) \quad x \in \mathbb{R}^5$$

$$S.C. \quad Ax \leq b$$

$$A_{eq}x = b_{eq}$$

$$LB \leq x \leq UB$$

$$C_{eq}(x) = 0$$

$$C(x) \leq 0$$

$$x_0 \text{ estimation initiale, } x_0=(1,2,2,2,8);$$

1- Création d'un fichier [nlcon.m](#) pour les contraintes non linéaires.

```
function [c,ceq]=nlcon(x)
c=[x(1)-71-0.2*x(2)*x(5)
    0.9*x(3)-x(4)^2-67];
ceq=3*x(2)^2*x(5)+3*x(1)^2*x(3)-20.875;
```

2- Application de la fonction fmincon .

```
FUN=@(x) 6*x(2)*x(5)+7*x(1)*x(3)+3*x(2)^2-x(4)^2;  
X0=[1,2,2,2,8];  
A=[0 0 0 -1 0.1;0 0 0 1 -0.5;0 0 -1 0 0.9];  
B=[0;0;0];  
Aeq=[1 -0.3 0 0 0];  
Beq=[0];  
LB=[-inf;-inf;0;-inf;1];  
UB=[inf;inf;20;inf;inf];  
NONLCON=@nlcon;  
[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,LAMBDA,GRAD] = fmincon  
(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,NONLCON)
```

Résultats:

X = 0.5885 1.9618 1.5053 0.8363 1.6726

FVAL = 36.7348

EXITFLAG = 1

OUTPUT =

iterations: 14

funcCount: 93

constrviolation: 4.9738e-14

stepsize: 1.6050e-07

algorithm: 'interior-point'

firstorderopt: 3.2752e-07

cgiterations: 0

message: 'Local minimum found that...'

LAMBDA =

eqlin: -4.3012

eqnonlin: -1.1732

ineqlin: [3x1 double]

lower: [5x1 double]

upper: [5x1 double]

ineqnonlin: [2x1 double]

GRAD =

10.5372

21.8060

4.1197

-1.6726

11.7706

HESSIAN =

12.7340 -2.3840 2.6267 4.0884 6.4191

-2.3840 0.8248 -0.2735 -1.3975 -2.7500

2.6267 -0.2735 0.6779 0.5422 0.5625

4.0884 -1.3975 0.5422 2.8372 5.6090

6.4191 -2.7500 0.5625 5.6090 11.5469

II- Utilisation d'Optimtool

1- Création d'un fichier `fun_obj.m` pour la fonction objectif.

```
function F=fun_obj  
F=6*x(2)*x(5)+7*x(1)*x(3)+3*x(2)^2-x(4)^2
```

2- Création d'un fichier `nlcon.m` pour les contraintes non linéaires.

```
function [c,ceq]=nlcon(x)  
c=[x(1)-71-0.2*x(2)*x(5)  
    0.9*x(3)-x(4)^2-67];  
ceq=3*x(2)^2*x(5)+3*x(1)^2*x(3)-20.875;
```

3- Ouvrir Optimtool et remplir les différentes cases

Solver: `fmincon - Constrained nonlinear minimization`

Algorithm: `Interior point`

Problem

Objective function: `@fun_obj`

Derivatives: `Approximated by solver`

Start point: `[1;2;2;8]`

Constraints:

Linear inequalities: A: `[0 0 0 -1 0.1; 0 0 0 1 -0.5; 0 0 -1 0 0.9]` b: `[0;0;0]`

Linear equalities: Aeq: `[1 -0.3 0 0 0]` beq: `[0]`

Bounds: Lower: `[-inf;-inf;0;-inf;1]` Upper: `[inf;inf;20;inf;inf]`

Nonlinear constraint function: `@nlcon`

Derivatives: `Approximated by solver`

Run solver and view results

Start Pause Stop

Current iteration: `14` Clear Results

Optimization running.
Objective function value: 36.73484831348562
Local minimum found that satisfies the constraints.

Final point:

Index	Value
1	0,589
2	1,962
3	1,505
4	0,836
5	1,673

- 1 Choisir la fonction *fmincon*.
- 2 Choisir l'algorithme de résolution (par exemple: Interior point).
- 3 Introduire le nom du fichier de la fonction objectif précédé de @
- 4 Choisir approximated by solver.
- 5 Introduire le point initiale .
- 6 Introduire le nom du fichier des contraintes non linéaires précédé de @

Applications

Résoudre les problèmes d'optimisation suivants:

$$\begin{array}{ll}
 \text{S.C.} & \begin{array}{l}
 \text{Min } -x_1x_2 \\
 20x_1 + 15x_2 - 30 = 0 \\
 \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\
 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2
 \end{array}
 \end{array}$$

Avec : $x_0 = (0.5, 0.8)$

$$\begin{array}{ll}
 \text{S.C.} & \begin{array}{l}
 \text{Min } x_1x_4(x_1 + x_2 + x_3) + x_3 \\
 x_1x_2x_3x_4 \geq 25 \\
 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 40 \\
 1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Avec : $x_0 = (1, 5, 5, 1)$