CH-III- Optimisation non linéaire avec contraintes d'égalité

Lorsque le problème d'optimisation ne peut pas être résolu par substitution, on peut utiliser la méthode de Lagrange. Pour ce faire, on définit une fonction appelée le Lagrangien.

Exemple:

On veut résoudre

$$\begin{cases} extr\ f(x,y) = \frac{1}{4}x^2y \\ s.c \quad 6x + 3y = 60 \end{cases}$$

Posons:

$$g(x,y) = 6x + 3y - 60$$

Le Lagrangien s'écrit:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

Où

$\lambda \in \mathbb{R}$ est nommé multiplicateur de Lagrange

pour ce problème

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}x^2y - \lambda(6x + 3y - 60)$$

Condition du premier ordre

Si les fonctions f et g sont continûment dérivables, alors pour tout extremum (x_0, y_0) de la fonction f sous la contrainte $g(x,y) = c$ qui n'est pas un point critique de la fonction g, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

On obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2}xy - 6\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{4}x^2 - 3\lambda = 0 \\ 6x + 3y = 60 \end{cases}$$

la résolution de ce système donne

$$(x_0, y_0, \lambda_0) = (\frac{20}{3}, \frac{20}{3}, \frac{100}{27}) \quad \text{(point critique)}$$

Pour déterminer la nature du point critique, on a recours à la condition du second ordre

Théorème:

Si (x_0, y_0, λ_0) est une solution du système (1), alors:

$D(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ (x_0, y_0) est un minimum sous contraintes

$D(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ (x_0, y_0) est un maximum sous contraintes

Avec:

$$D(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x, y, \lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x, y, \lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

Exemple:

On veut résoudre

$$\begin{cases} extr\ f(x, y) = xy \\ g(x, y) = 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Le Lagrangien est:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(4x^2 + y^2)$$

Le système à résoudre pour trouver les points critique est:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 8\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 8\lambda x \\ x = \boldsymbol{2\lambda y} \\ \boldsymbol{4x^2} + \boldsymbol{y^2} = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 16\boldsymbol{\lambda}^2 y \\ x = \boldsymbol{2\lambda y} \\ \boldsymbol{4x^2} + \boldsymbol{y^2} = 4 \end{cases}$$

La première équation donne $y(1 - 16\boldsymbol{\lambda^2}) = 0$. Ainsi, $\boldsymbol{\lambda} = \mp 1/4$ ou $y = 0$

pour $y = 0$, $x = 0$ ne satisfait la troisième équation (solution refusée)

$\boldsymbol{\lambda} = \mp 1/4$, on obtient les points critiques suivantes:

(x_0, y_0)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$
$f(x_0, y_0)$	1	-1	-1	1

Pour déterminer la nature des points critique on calcul $\boldsymbol{D(x, y, \lambda)}$

$$\boldsymbol{D(x, y, \lambda)} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial x^2}(x, y, \lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial y^2}(x, y, \lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

$$\boldsymbol{D(x, y, \lambda)} = (-32)(4\lambda x^2 + \lambda y^2 + xy)$$

pour les différents points critiques on obtient:

$(x_0, y_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 1/4\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, -1/4\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - 1/4\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, 1/4\right)$
$\boldsymbol{D(x, y, \lambda)}$	< 0	> 0	> 0	< 0
	maximum local	minimum local	minimum local	maximum local