# حل سلسلة التمارين رقم (4) حول تحليل قناة التوزيع: نماذج النقل والتوزيع

## حل التمرين الأول:

### 1. النموذج الرياضي لمسألة النقل:

تحديد المتغيرات: $x_{ij}$ الكمية المنقولة من المورد i إلى الوحدة الإنتاجية j .

كميات العرض: $a_i= 40$ ؛$a_2= 50$ ؛$a_3= 70$ ؛كميات الطلب: $b_1= 50$ ؛$b_2= 60$ ؛$b_3= 50$ .

نلاحظ أن مجموع العرض= مجموع الطلب= 160 طن، إذن مسألة النقل متوازنة.

**دالة الهدف:** $Z= 5x_{11}+ 3x_{12}+ 4x_{13}+ 6x_{21}+ 2x_{22}+ 5x_{23}+ 4x_{31}+ 1x_{32}+ 3x_{33}$

**قيود العرض (المتاحات):**

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+ x_{12}+ x_{13}&= 50 \\ x_{21}+ x_{22}+ x_{23}&= 60 \\ x_{31}+ x_{32}+ x_{33}&= 50 \end{aligned}\right\}$$

**قيود الطلب (الاحتياجات):**

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+ x_{21}+ x_{31}&= 40 \\ x_{12}+ x_{22}+ x_{32}&= 50 \\ x_{13}+ x_{23}+ x_{33}&= 70 \end{aligned}\right\}$$

**شرط عدم السالبية:** $x_{ij} \geq 0$

**جدول مسألة النقل:**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 5 | 3 | 4 | 50 |
| $S_2$ | 6 | 2 | 5 | 60 |
| $S_3$ | 4 | 1 | 3 | 50 |
| $b_j$ | 40 | 50 | 70 | |

### 2. إيجاد الحل الأولي

**أ. الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **40** 5 | **10** 3 | 4 | 50/10/0 |
| $S_2$ | 6 | **40** 2 | **20** 5 | 60/20/0 |
| $S_3$ | 4 | 1 | **50** 3 | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي: $x_{11}= 40$ ؛$x_{12}= 10$ ؛$x_{22}= 40$ ؛$x_{23}= 20$ ؛$x_{33}= 50$

ومنه التكلفة الكلية: $Z= 40(5)+ 10(3)+ 40(2)+ 20(5)+ 50(3)= 560$

التأكد من قبول الحل الأولي: عدد الخانات المملوءة= 5؛ نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$

عدد الخانات المملوءة فعليا= عدد الخانات حسب القانون= 5، ومنه الشرط محقق، وبالتالي الحل الأساسي مقبول.

**ب. الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة:**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | | $D_2$ | | $D_3$ | | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | | 5 | | 3 | **50** | 4 | 50/0 |
| $S_2$ | **40** | 6 | | 2 | **20** | 5 | 60/40/0 |
| $S_3$ | | 4 | **50** | 1 | | 3 | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | | 50/0 | | 70/20/0 | | 160 |

الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة: $x_{13}= 50$؛ $x_{21}= 40$؛ $x_{23}= 20$؛ $x_{32}= 50$

التكلفة الكلية: $Z= 50(4)+ 40(6)+ 20(5)+ 50(1)= 590$

التأكد من قبول الحل الأساسي: عدد الخانات المملوءة= 4، نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا: عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$

عدد الخانات المملوءة ≠ عدد الخانات حسب القانون، ومنه الشرط غير محقق، وبالتالي الحل الأساسي غير مقبول.

**ج. الحل الأساسي بالطريقة التقريبية: الندم أو الجزاءات أو الغرامات (Vogel):**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | | $D_2$ | | $D_3$ | | $a_i$ | الندم (فرق التكلفتين) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **30** | 5 | | 3 | **20** | 4 | 50/30/0 | 1 1 1 1 |
| $S_2$ | **10** | 6 | **50** | 2 | | 5 | 60/10/0 | 3 1 1 1 |
| $S_3$ | | 4 | | 1 | **50** | 3 | 50/0 | 2 1 × × |
| $b_j$ | 40/10/0 | | 50/0 | | 70/20/0 | | 160 | |
| **الندم فروق التكلفة** | 1 1 1 1 | | 1 × × × | | 1 1 1 1 | | | |

الحل الأساسي: $x_{11}= 30$؛ $x_{21}= 10$؛ $x_{13}= 20$؛ $x_{22}= 50$؛ $x_{33}= 50$.

التكلفة الكلية للنقل: $Z= 30(5)+ 20(4)+ 10(6)+ 50(2)+ 50(3)= 540$

التأكد من قبول الحل الأساسي: عدد الخانات المملوءة فعليا= 5، نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا: عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$

عدد الخانات المملوءة فعليا= عدد الخانات حسب القانون، ومنه الشرط محقق، وبالتالي الحل الأساسي مقبول.

**3. البحث عن الحل الأمثل: طريقة حجر الوطء**

**أ. اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الأولى):**

ننطلق من الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي، ونلاحظ وجود أربعة خانات فارغة هي: $x_{13}$، $x_{21}$، $x_{31}$، $x_{32}$، هي تمثل المتغيرات غير الأساسية، نقوم بإنشاء مسارات مغلقة تنطلق من هذه الخانات ثم تعود إليها، على أن تتم الحركة أفقيا وعموديا، والأركان تكون خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية)، ثم نضع إشارات (+) و(-) بالتوالي على الأركان، مع الإنطلاق بـ (+) في الخانة الفارغة، ثم يتم تقييم هذه الخانات من خلال حساب فروق التكاليف كما يلي:

**الخانة $x_{13}$:** $x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{13}= 4- 3+ 2- 5=- 2\leq 0$، ومنه يوجد تحسين في التكلفة انطلاقا من هذه الخانة. وهو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 40 (5) | 10 (3) | (4) | 50/10/0 |
| $S_2$ | (6) | 40 (2) | 20 (5) | 60/20/0 |
| $S_3$ | (4) | (1) | 50 (3) | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

**الخانة $x_{21}$:** $x_{21}\rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}= 6- 2+ 3- 5= 2\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين انطلاقا من هذه الخانة. وهو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 40 (5) | 10 (3) | (4) | 50/10/0 |
| $S_2$ | (6) | 40 (2) | 20 (5) | 60/20/0 |
| $S_3$ | (4) | (1) | 50 (3) | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

**الخانة $x_{31}$:** $x_{31}\rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{31}$؛ ومنه فرق التكلفة يساوي: $\Delta C_{31}= 4- 5+ 3- 2+ 5- 3= 2\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين انطلاقا من هذه الخانة.

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 40 (5) | 10 (3) | (4) | 50/10/0 |
| $S_2$ | (6) | 40 (2) | 20 (5) | 60/20/0 |
| $S_3$ | (4) | (1) | 50 (3) | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

**الخانة $x_{32}$:** $x_{32}\rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22}\rightarrow x_{32}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{32}= 1- 3+ 5- 2= 1\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين انطلاقا من هذه الخانة. وهو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 40 (5) | 10 (3) | (4) | 50/10/0 |
| $S_2$ | (6) | 40 (2) | 20 (5) | 60/20/0 |
| $S_3$ | (4) | (1) | 50 (3) | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

نلاحظ أن التغير في التكلفة على المسار المغلق بالنسبة للخانة $x_{13}$ سالب (-4)، ومنه يمكن تخفيض التكلفة، من خلال نقل أكبر كمية ممكنة: Min( 10 , 20)= 10، وبالتالي التكلفة الكلية تنخفض بـ: 10(-2)= -20، من خلال ملء الخانة $x_{13}$ بـ: 10( يتحول إلى متغير أساسي)، وتصبح الخانة $x_{12}$ فارغة: 0 (يتحول إلى متغير غير أساسي)، ونطرح 10 الخانة $x_{22}$ (لأن بها إشار -)، فتصبح 30، وإضافة إلى 10 إلى الخانة $x_{23}$ (لأن بها إشارة +)، فتصبح 30، وهو ما يوضحه جدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | | $D_2$ | | $D_3$ | | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **40** | 5 | x | 3 | **10** | 4 | 50 |
| $S_2$ | | 6 | **50** | 2 | **10** | 5 | 60 |
| $S_3$ | | 4 | | 1 | **50** | 3 | 50 |
| $b_j$ | 40/0 | | 50/40/0 | | 70/50/0 | | 160= 160 |

إذن الحل المحسن: $x_{11}$= 40؛ $x_{13}$= 10؛ $x_{22}$= 50؛ $x_{23}$= 10؛ $x_{33}$= 50

ومنه التكلفة الكلية: Z= 40(5)+ 10(4)+ 50(2)+ 10(5)+ 50(3)= 540

نلاحظ أن التكلفة الكلية للحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي انخفضت من 560 إلى 540 بعد التحسين، أي انخفضت بـ -20، وهو ما توصلنا له سابقا.

التأكد من قبول الحل الأولي: عدد الخانات المملوءة= 5؛ نطبق شرط قبول الحل الأساسي: لدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5

عدد الخانات المملوءة فعليا= عدد الخانات حسب القانون= 5، ومنه الشرط محقق، وبالتالي الحل الأساسي مقبول. وهو قابل لاختبار الأمثلية والتحسين

**ب. اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):**

نلاحظ وجود أربعة خانات فارغة هي: $x_{12}$، $x_{21}$، $x_{31}$، $x_{32}$، هي تمثل المتغيرات غير الأساسية، نقوم بإنشاء مسارات مغلقة تنطلق من هذه الخانات كما فعلنا في المرحلى الأولى السابقة:

**الخانة $x_{12}$:** $x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}$= 3- 4+ 5- 2= 2≥ 0، ومنه لا يمكن التحسين في التكلفة انطلاقا من هذه الخانة. وهو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | | $D_2$ | | $D_3$ | | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **40** | 5 | + | 3 | **10** - | 4 | 50 |
| $S_2$ | | 6 | **50** - | 2 | **10** + | 5 | 60 |
| $S_3$ | | 4 | | 1 | **50** | 3 | 50 |
| $b_j$ | 40/0 | | 50/40/0 | | 70/50/0 | | 160= 160 |

**الخانة $x_{21}$:** $x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}$= 6- 5+ 4- 5= 0≥ 0، ومنه لا يمكن التحسين في التكلفة انطلاقا من هذه الخانة. وهو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **40** (5) - | (3) | **10** (4) + | 50 |
| $S_2$ | (6) + | **50** (2) | **10** (5) - | 60 |
| $S_3$ | (4) | (1) | **50** (3) | 50 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

**الخانة $x_{31}$:** $x_{31}\to x_{11} \to x_{13} \to x_{33}\to x_{31}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}= 4- 5+ 4- 3= 0\geq 0$، ومنه لا يمكن التحسين في التكلفة انطلاقا من هذه الخانة. و هو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **40** (5) - | (3) | **10** (4) + | 50 |
| $S_2$ | (6) | **50** (2) | **10** (5) | 60 |
| $S_3$ | (4) + | (1) | **50** (3) - | 50 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

**الخانة $x_{32}$:** $x_{32}\to x_{33} \to x_{32} \to x_{22}\to x_{32}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}= 1- 3+ 5- 2= 1\geq 0$، ومنه لا يمكن التحسين في التكلفة انطلاقا من هذه الخانة. و هو ما يوضحه الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **40** (5) | (3) | **10** (4) | 50 |
| $S_2$ | (6) | **50** (2) - | **10** (5) + | 60 |
| $S_3$ | (4) | (1) + | **50** (3) - | 50 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160= 160 |

بعد إعادة حساب كل فروق التكاليف (مؤشرات التحسين)، نجد أنها كلها موجبة أو معدمة، وهو ما يعني أن الحل المحسن (مرحلة أولى) أمثل: $x_{11}= 40$ ؛ $x_{13}= 10$؛ $x_{22}= 50$؛ $x_{23}= 10$؛ $x_{33}= 50$

والتكلفة الكلية المثلى: $CT= 540$

المؤسسة تنقل من المورد الأول إلى المصنع الأول 40 طن، ومن المورد الأول إلى المصنع الثالث 10 طن، ومن المورد الثاني إلى المصنع الثاني 50 طن، ومن المرد الثاني إلى المصنع الثالث 10 طن، ومن المورد الثالث إلى المصنع الثالث 50 طن. وتحقق أدنى تكلفة نقل 540 ون.

**4. البحث عن الحل الأمثل: طريقة التوزيع المعدلة**

**أ. اختبار أمثلية الحل الأساسي (المرحلة الأولى):**

ننطلق من الحل الأولي بطريقة **الركن الشمالي الغربي**، ونحاول اختبار أمثليته بهدف تحسينه إن أمكن، ويمر ذلك بخطوتين:

**الخطوة الأولى:** حساب قيم $U_i$ و $V_j$ بالنسبة للخانات المملوءة (المتغيرات الأساسية) فقط، حيث نستخدم العلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$؛ مع افتراض: $U_1= 0$ من أجل تسهيل الحسابات:

الخانة $x_{11}$: $U_1 + V_1= 5$، ولدينا: $U_1= 0$ (تفرض دائما لتسهيل الحل)، ومنه: $V_1= 5$.

الخانة $x_{12}$: $U_1+ V_2= 3$، ولدينا: $U_1= 0$، ومنه: $V_2= 3$.

الخانة: $x_{22}$: $U_2+ V_2= 2$، و $V_2= 3$، منه: $U_2= -1$

الخانة $x_{23}$: $U_2+ V_3= 5$، ولدينا: $U_2=-1$، ومنه: $V_3= 6$

الخانة $x_{33}$: $U_3+ V_3= 3$، ولدينا: $V_3= 6$، ومنه: $U_3= -3$

**الخطوة الثانية:** حساب فروق التكاليف أو مؤشرات التحسين $\delta_{ij}$ بالنسبة للخانات الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) فقط، نطبق العلاقة: $\delta_{ij}= C_{ij} -U_i+ V_j$

الخانة $x_{13}$ : $\delta_{13}= C_{13}- U_1- V_3 = 4- 0- 6= -2 < 0$ يمكن تحسن الحل الأول بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{21}$ : $\delta_{21}= C_{21} -U_2- V_1 = 6- (-1)- 5= 2 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{31}$ : $\delta_{31}= C_{31} -U_3- V_1 = 4- (-3)- 5= 2 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{32}$ : $\delta_{32}= C_{32} -U_3- V_2 = 1- (-3)- 3= 1 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

بعد حساب قيم الفروق في التكاليف $\delta_{13}$، نلاحظ وجود قيم سالبة لـ $\delta_{ij}$، وهذا يعني أن الحل الأساسي غير أمثل، ومنه يمكن تحسينه، وهذا باختيار أقل قيمة سالبة لفروق التكلفة $\delta_{ij}$ (هنا قيمة وحيدة سالبة – 2 للخلية $x_{13}$)، ثم نكون مسارا مغلقا انطلاقا من الخلية السالبة $x_{13}$، بحيث تكون كل الخانات على رؤوس هذا المسار مملوءة، ما عدا الخلية $x_{13}$ كما في الشكل.

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ $V_1= 5$ | $D_2$ $V_2= 3$ | $D_3$ $V_3= 6$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ $U_1= 0$ | **40** 5 | **10** 3 -Δ | 4 +Δ | 50/10/0 |
| $S_2$ $U_2= -1$ | 6 | **40** 2 +Δ | **20** 5 -Δ | 60/20/0 |
| $S_3$ $U_3= -3$ | 4 | 1 | **50** 3 | 50/0 |
| $b_j$ | 40/0 | 50/40/0 | 70/50/0 | 160=160 |

نضع على خلايا رؤوس المسار إشارات (+) و(-) بشكل متتابع، على أن ننطلق من الخانة $x_{13}$ بإشارة موجبة، ثم نظيف ونطرح للخانات في رؤوس المسار المقدار Δ ، حيث أن قيمة Δ هي أقل كمية في الخانات التي يوجد بها إشارة سالبة، وبالتالي فإن قيم Δ هي أقل كمية في الخانات التي يوجد بها Δ-، وهي 10، وبالتالي نحصل على جدول جديد:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ $V_1= 5$ | $D_2$ $V_2= 1$ | $D_3$ $V_3= 4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ $U_1= 0$ | **40** 5 | × 3 | **10** 4 | 50 |
| $S_2$ $U_2= 1$ | 6 | **50** 2 | **10** 5 | 60 |
| $S_3$ $U_3=-1$ | 4 | 1 | **50** 3 | 50 |
| $b_j$ | 40 | 50 | 70 | 160=160 |

**اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):**

**الخطوة الأولى:** حساب قيم $U_i$ و $V_j$ بالعلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$ بالنسبة للخانات المملوءة فقط، ونفترض أن $U_1= 0$:

الخانة $x_{11}$: $U_1+ V_1=5$ , $U_1= 0 \rightarrow V_1= 5$

الخانة $x_{13}$: $U_1+ V_3= 4$, $U_1= 0 \rightarrow V_3= 4$

الخانة $x_{23}$: $U_2+ V_3= 5$, $V_3= 4 \rightarrow U_2= 1$

الخانة $x_{22}$: $U_2+ V_2= 2$, $U_2= 1 \rightarrow V_2= 1$

$x_{33}$: $U_3+ V_3= 3$, $V_3= 4 \rightarrow U_3= -1$

الخطة الثانية: نقوم بحساب فروق التكاليف للخانات الفارغة فقط بالعلاقة: $\delta_{ij}= U_i+ V_j- C_{ij}$

الخانة $x_{12}$: $\delta_{12}= C_{12} -U_1- V_2 = 3- 0- 1= 2 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{21}$: $\delta_{21}= C_{21}- U_2- V_1 = 6- 1- 5= 0 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{31}$: $\delta_{31}= C_{31}- U_3- V_1 = 4- (-1)- 5= 0 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{32}$: $\delta_{32}= C_{32}- U_3- V_2 = 1- (-1)- 1= 1 \geq 0$ لا يمكن تحسين الحل الأولي بنقل كمية إلى هذه الخانة

بعد إعادة حساب كل فروق التكاليف (مؤشرات التحسين)، نجد أنها كلها موجبة أو معدمة، وهو ما يعني أن الحل الأخير أمثل.

$Z= 40(5)+ 10(4)+ 50(2)+ 10(5)+ 50(3)= 540.$

المؤسسة تنقل من المورد الأول إلى المصنع الأول 40 طن، ومن المورد الأول إلى المصنع الثالث 10 طن، ومن المورد الثاني إلى المصنع الثاني 50 طن، ومن المرد الثاني إلى المصنع الثالث 10 طن، ومن المورد الثالث إلى المصنع الثالث 50 طن. وتحقق أدنى تكلفة نقل 540 ون.

## حل التمرين الثاني:

**1. تشكيل جدول النقل.**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 12 | 13 | 4 | 6 | 500 |
| $S_2$ | 6 | 4 | 10 | 11 | 700 |
| $S_3$ | 10 | 9 | 12 | 4 | 800 |
| $b_j$ | 400 | 900 | 200 | 500 | 2000 |

**2. صياغة نموذج النقل:**

دالة الهدف: $Min\ Z=(12x_{11}+ 13x_{12}+ 4x_{13}+ 6x_{14}+ 6x_{21}+ 4x_{22}+ 10x_{23}+ 11x_{24}+ 10x_{31}+ 9x_{32}+ 12x_{33}+ 4x_{34}$

قيود العرض: $x_{11}+ x_{12}+ x_{13}+ x_{14}= 500$ ; $x_{21}+ x_{22}+ x_{23}+ x_{24}= 700$ ; $x_{31}+ x_{32}+ x_{33}+ x_{34}= 800$

قيود الطلب: $x_{11}+ x_{21}+ x_{31}= 400$ ; $x_{12}+ x_{22}+ x_{32}= 900$ ; $x_{13}+ x_{23}+ x_{33}= 200$ ; $x_{14}+ x_{24}+ x_{34}= 500$

قيد عدم السالبية: $x_{ij} \geq 0$ ; $i=1 \dots 4,\ j= 1 \dots 3$

**3. البحث عن الحل الأولي**

**أ. الحل الأساسي: طريقة الركن الشمالي الغربي**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **400** [12] | **100** [13] | [4] | [6] | 500/100/0 |
| $S_2$ | [6] | **700** [4] | [10] | [11] | 700/0 |
| $S_3$ | [10] | **100** [9] | **200** [12] | **500** [4] | 800/700/500/0 |
| $b_j$ | 400/0 | 900/800/100/0 | 200/0 | 500/0 | 2000 |

الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

$x_{11}= 400$ ؛$x_{12}= 100$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{32}= 100$ ؛$x_{33}= 200$ ؛$x_{34}= 500$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 12(400)+ 13(100)+ 4(700)+ 9(100)+ 12(200)+ 4(500)= 14200$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

**ب. الحل الأساسي: طريقة أقل تكلفة**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **300** 12 | 13 | **200** 4 | 6 | 500/300/0 |
| $S_2$ | 6 | **700** 4 | 10 | 11 | 700/0 |
| $S_3$ | **100** 10 | **200** 9 | 12 | **500** 4 | 800/300/100/0 |
| $b_j$ | 400/300/0 | 900/200/0 | 200/0 | 500/0 | 2000 |

الحل الأساسي بطريقة أقل تكلفة:

$x_{11}= 300$ ؛$x_{13}= 200$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 100$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 500$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 12(300)+ 4(200)+ 4(700)+ 10(100)+ 9(200)+ 4(500)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

**ج. الحل الأساسي: طريقة فوجل التقريبية**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ | فروق التكاليف |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 12 | 13 | **200** 4 | **300** 6 | 500/300/0 | 2 6 × × × |
| $S_2$ | 6 | **700** 4 | 10 | 11 | 700/0 | 2 2 2 2 × |
| $S_3$ | **400** 10 | **200** 9 | 12 | **200** 4 | 800/600/400/0 | 5 5 1 1 1 |
| $b_j$ | 400/0 | 900/200/0 | 200/0 | 500/200/0 | 2000=2000 | |
| **فروق التكاليف** | 4 4 4 4 2 | 5 5 5 5 - | 6 × × × × | 2 2 7 × × | | |

الحل الأساسي بطريقة الركن فوجل التقريبية:

$x_{13}= 200$ ؛$x_{14}= 300$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 400$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 200$

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 4(200)+ 6(300)+ 4(700)+ 10(400)+ 9(200)+ 4(200)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

**2. البحث عن الحل الأمثل: طريقة حجر الوطء**

**أ. الانطلاق من الحل الأولي بطريقة فوجل:**

ننطلق من الحل الأساسي بطريقة فوجل، ويتضح من الجدول أعلاه وجود أربعة خانات فارغة، وهي الخانات $x_{11}$، $x_{12}$، $x_{21}$، $x_{23}$، $x_{24}$، $x_{33}$، ويتم تقييم هذه الخانات من خلال حساب فروق التكاليف كما يلي:

**الخانة $x_{11}$:** $x_{11}\to x_{14} \to x_{34} \to x_{31} \to x_{11}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{11}= 12- 6+ 4- 10= 0 \geq 0$، ومنه لا يوجد تحسين في التكلفة.

**الخانة $x_{12}$:** $x_{12}\to x_{14} \to x_{34} \to x_{32}\to x_{12}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{12}= 13- 6+ 4- 9= 2\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

**الخانة $x_{21}$:** $x_{21} \to x_{22} \to x_{23} \to x_{31} \to x_{21}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{21}= 6- 4+ 9- 10= 1\geq 0$، ومنه لا يوجد تحسين في التكلفة.

**الخانة $x_{23}$:** $x_{23}\to x_{13}\to x_{14} \to x_{34}\to x_{32}\to x_{22}\to x_{23}$؛ ومنه: $\Delta C_{23}= 10- 4+ 6- 4+ 9- 4= 13 \geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

**الخانة $x_{24}$:** $x_{24} \to x_{34} \to x_{32} \to x_{22} \to x_{24}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

الخانة $x_{33}$: $x_{33} \to x_{34} \to x_{14} \to x_{13} \to x_{33}$؛ ومنه فرق التكلفة: $\Delta C_{33}= 12- 4+ 6- 4= 10 \geq 0$، ومنه لا يمكن تحسين التكلفة.

بما أن كل الفروق على المسارات موجبة، فإنه لا يمكن تحسين الحل الأساسي الذي وجدناه بطريقة فوجل، وبالتالي فهو حل أمثل.

**ب. الانطلاق من الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي:**

**اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):**

بالنسبة للحل الأساسي بطريقة الركن الشمال الغربي وجدنا أن: $Z= 14200$، وهو ليس حل أمثل، مادام الحل الأولي بطريقة فوجل أحسن منه، ولتحسين الحل نتتبع المسارات المتعلقة لكل الخانات الفارغة وفق طريقة الحجر المتنقل:

الخانة $x_{13}$ : $x_{13}\to x_{12} \to x_{32} \to x_{33} \to x_{13}$ : $\Delta C_{13}= 4- 12+ 9- 13= -12<0$ **يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{14}$: $x_{14} \to x_{12} \to x_{32} \to x_{34} \to x_{14}$ : $\Delta C_{14}= 6- 13+ 9- 4= -2<0$ **يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{21}$: $x_{21} \to x_{11} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{21}$ : $\Delta C_{21}= 6- 4+ 13- 12= 3\geq 0$ **لا يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{23}$: $x_{23}\to x_{22} \to x_{32} \to x_{33} \to x_{23}$ : $\Delta C_{23}= 10- 4+ 9- 12= 3\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{24}$: $x_{24}\to x_{22}\to x_{32}\to x_{34}\to x_{24}$: $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{31}$: $x_{31}\to x_{32}\to x_{12}\to x_{11}\to x_{31}$ : $\Delta C_{31}= 10- 9+ 13- 12= 2\geq 0$ **يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

لدينا خانتان يمكن تحسين من خلالهما: $x_{13}$ و $x_{14}$، لكن نختار المسار الأول (الخانة $x_{13}$)، لأن التخفيض في التكلفة أكبر (12-)، وبما أن: $Min(100, 200)= 100$، حيث 100 و200 هي قيم الخانات الممتلئة ذات الإشارة السالبة على مسار الخلية $x_{13}$

الجدول التالي يوضح مسار تحسين التكلفة انطلاقا من الخانة $x_{13}$ (ملونة الأصفر)

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **400** 12 | **100** - 13 | + 4 | 6 | 500 |
| $S_2$ | 6 | **700** 4 | 10 | 11 | 700 |
| $S_3$ | 10 | **100** - 9 | **200** + 12 | **500** 4 | 800 |
| $b_j$ | 400 | 900 | 200 | 500 | 2000 |

ومنه تخفيض التكلفة سيكون بـ: $(-12) \times 100= -1200$، وبالتالي تصبح التكلفة الكلية: $14200-1200= 13000$.

الحل المحسن يكون كما في الجدول التالي:

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **400** 12 | 13 | **100** 4 | 6 | 500/100/0 |
| $S_2$ | 6 | **700** 4 | 10 | 11 | 700/0 |
| $S_3$ | 10 | **200** 9 | **100** 12 | **500** 4 | 800/700/500/0 |
| $b_j$ | 400/0 | 900/800/100/0 | 200/0 | 500/0 | 2000 |

ومنه الحل المحسن: $x_{11}= 400$ ؛$x_{13}= 100$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{33}= 100$ ؛$x_{34}= 500$

التكاليف الكلية تصبح: $Z= 12(400)+ 4(100)+ 700(4)+ 200(9)+ 100(12)+ 500(4)= 13000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة)= 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل المحسن مقبول.

**اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثانية):**

نقوم باختبار المسارات المغلقة التي تنطلق من كل خانة فارغة (متغير غير أساسي)، وباقي رؤوسها الأفقية والعمودية تتكون من خلايا مملوءة( متغيرات أساسية)

الخانة $x_{12}$: $x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$ : $\Delta C_{12}= 13- 4+ 12- 9= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{14}$: $x_{14}\rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{14}$ : $\Delta C_{14}= 6- 10 +12- 4= 4 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{21}$: $x_{21}\rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{21}$ : $\Delta C_{21}= 6- 4+ 9- 12+ 4- 12= -9<0$ **يمكن تحسين**

الخانة $x_{23}$: $x_{23}\rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23}$ : $\Delta C_{23}= 10- 4+ 9- 12= 3\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{24}$: $x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24}$ : $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12\geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

$x_{31}$ : $x_{31} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{31}$ : $\Delta C_{31}= 10- 12+ 4- 12= -10< 0$ **يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

نختار مسار الخانة $x_{31}$، لأن التخفيض في التكلفة أكبر (- 10)، وبما أن: $Min(100, 400)= 100$، ومنه تخفيض التكلفة سيكون بـ: $(-10) \times 100= -1000$، وبالتالي تصبح التكلفة الكلية: $13000-1000= 12000$.

والمسار يوضحه الجدول التالي:

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | - 400 12 | 13 | + 100 4 | 6 | 500/100/0 |
| $S_2$ | 6 | 700 4 | 10 | 11 | 700/0 |
| $S_3$ | + 10 | 200 9 | - 100 12 | 500 4 | 800/700/500/0 |
| $b_j$ | 400/0 | 900/800/100/0 | 200/0 | 500/0 | 2000 |

جدول الحل بعد التحسين (المرحلة الثانية) يكون كما يلي:

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 300 12 | 13 | 200 4 | 6 | 500/100/0 |
| $S_2$ | 6 | 700 4 | 10 | 11 | 700/0 |
| $S_3$ | 100 10 | 200 9 | 12 | 500 4 | 800/700/500/0 |
| $b_j$ | 400/0 | 900/800/100/0 | 200/0 | 500/0 | 2000 |

الحل المحسن يصبح:

$x_{13}= 200$ ؛$x_{14}= 300$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 400$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 200$

تكلفة النقل الكلية: $\text{Min } Z= 4(200)+ 6(300)+ 4(700)+ 10(400)+ 9(200)+ 4(200)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية (الخانات المشغولة) = 6؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 4، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 4- 1= 6$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

**اختبار أمثلية الحل المحسن (المرحلة الثالثة):**

الخانة $x_{12}$: $x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{33} \to x_{12}$ : $\Delta C_{12}= 13- 9+ 10- 12= 2 \geq 0$ **لا يمكن تحسن الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{14}$: $x_{14} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{34} \to x_{14}$ : $\Delta C_{14}= 6- 12+ 10- 4= 0 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{21}$: $x_{21} \to x_{22} \to x_{32} \to x_{31} \to x_{21}$ : $\Delta C_{21}= 6- 4+ 9- 10= 1 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{23}$: $x_{23} \to x_{13} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{32} \to x_{22} \to x_{23}$: $\Delta C_{23} = 12- 4+ 12- 10+ 9- 4 = 15 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار.**

الخانة $x_{24}$: $x_{24} \to x_{22} \to x_{32} \to x_{34} \to x_{24}$ : $\Delta C_{24}= 11- 4+ 9- 4= 12 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

الخانة $x_{33}$: $x_{33} \to x_{31} \to x_{11} \to x_{13} \to x_{33}$ : $\Delta C_{33}= 12- 10+ 12- 4= 10 \geq 0$ **لا يمكن تحسين الحل على هذا المسار**

**نلاحظ أن فروق التكلفة كلها موجبة، وبالتالي لا يمكن تحسين الحل السابق، أي أنه حل أمثل، ومنه:**

$x_{13}= 200$ ؛$x_{14}= 300$ ؛$x_{22}= 700$ ؛$x_{31}= 400$ ؛$x_{32}= 200$ ؛$x_{34}= 200$

تكلفة النقل الكلية: $Z= 4(200)+ 6(300)+ 4(700)+ 10(400)+ 9(200)+ 4(200)= 12000$

## حل التمرين الثالث:

مسألة النقل غير متوازنة، لأن مجموع العرض (المتاح)= 50+ 30+ 20= 100؛ ومجموع الطلب(الاحتياج)= 10+40+25= 75؛ وبما أن مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب، لذا يجب إضافة مصنع جديد يغطي الفرق بين العرض والطلب 25، وهمنا أمام المؤسسة بديلان A وB، وعليه يكون جدول النقل المتوازن بعد إضافة كل بديل كما يلي:

**إعداد جدول النقل مع إضافة البديل الأول (مصنع A):**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 | 10 | 2 | 3 | 50 |
| $S_2$ | 3 | 7 | 9 | 8 | 30 |
| $S_3$ | 6 | 4 | 5 | 1 | 20 |
| $b_j$ | 10 | 40 | 25 | 25 | 100 |

**إعداد جدول النقل مع إضافة البديل الثاني (مصنع B):**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 | 10 | 2 | 4 | 50 |
| $S_2$ | 3 | 7 | 9 | 6 | 30 |
| $S_3$ | 6 | 4 | 5 | 5 | 20 |
| $b_j$ | 10 | 40 | 25 | 25 | 100 |

نلاحظ أن مسألة النقل صارت متوازنة، لأن مجموع العرض= مجموع الطلب= 100، لذا نبدأ بحل المسألة بطريقة التكلفة الأقل:

**البديل الأول (إضافة المصنع الجديد A):**

| $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 | 10 | 25 \| 2 | 25 \| 3 | 50/25/0 |
| $S_2$ | 10 \| 3 | 20 \| 7 | 9 | 8 | 30/20/0 |
| $S_3$ | 6 | 20 \| 4 | 5 | 10 | 20/0 |
| $b_j$ | 10/0 | 40/20/0 | 25/0 | 25/0 | 100=100 |

إذن تكلفة النقل الكلية عند إضافة البديل الأول (المصنع A):

$Z= 25(2)+ 25(3)+ 10(3)+ 20(7)+ 20(4)= 375$

**البديل الثاني (إضافة المصنع B):**

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 | 10 | **25** 2 | **25** 4 | 50/25/0 |
| $S_2$ | **10** 3 | **20** 7 | 9 | 6 | 30/20/0 |
| $S_3$ | 6 | **20** 4 | 5 | 5 | 20/0 |
| $b_j$ | 10/0 | 40/20/0 | 25/0 | 25/0 | 100=100 |

إذن تكلفة النقل الكلية عند إضافة البديل الثاني (المصنع B):

$Z= 25(2)+ 25(4)+ 10(3)+ 20(7)+ 20(4)= 400$

مجموع التكاليف للبديل الأول A= تكلفة النقل + تكاليف التشغيل= 375+ 2500= 2875

مجموع التكاليف للبديل الثاني B= تكاليف النقل+ تكاليف التشغيل= 400+ 2200= 2600

يتضح مما تقدم، أنه رغم أن تكاليف النقل والتوزيع للبديل الأول A كانت أقل (375 <400)، إلا أن أخذ تكاليف التشغيل في الحسبان، يجعل البديل الأول B هو الأفضل، لأن التكاليف الإجمالية للنقل والتشغيل هي الأقل.

**حل التمرين الرابع:**

بإتباع أسلوب التوزيع المعدل، نبحث عن الحل الأمثل لمسألة النقل التالية، وذلك باختبار الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | متاح |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | **100** 21 | **100** 11 | 31 | 200/100/0 |
| $S_2$ | 10 | **300** 10 | **200** 20 | 500/200/0 |
| $S_3$ | 13 | 9 | **300** 6 | 300/0 |
| احتياج | 100/0 | 400/300/100/0 | 500/300/0 | 1000 |

الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي: $x_{11}= 100$ ؛ $x_{12}= 100$ ؛ $x_{22}= 300$ ؛ $x_{23}= 200$ ؛ $x_{33}= 300$.

تكلفة النقل الكلية: $Min\ Z= 21(100)+ 11(100)+ 10(300)+ 20(200)+ 6(300)= 12000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية(الخانات المشغولة)= 5؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، ومنه الحل الأساسي مقبول.

**اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):**

الخطوة الأولى: نقوم بحساب قيم $U_i$ و $V_j$ بالعلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$ بالنسبة للخانات المملوءة فقط، ومن أجل تسهيل الحساب، نفترض أن: $U_1= 0$

الخانة $x_{11}$: $U_1+ V_1=21 , U_1= 0 \rightarrow V_1= 21$

الخانة $x_{12}$: $U_1+ V_2= 11, U_1= 0 \rightarrow V_2= 11$

الخانة $x_{22}$: $U_2+ V_2= 10, V_2= 11\rightarrow U_2= -1$

الخانة $x_{23}$: $U_2+ V_3= 20, U_2= -1 \rightarrow V_3= 21$

الخانة $x_{33}$: $U_3+ V_3= 6, V_3= 21 \rightarrow U_3= -15$

**الخطوة الثانية:** نقوم بحساب فروق التكلفة( مؤشرات الحل) بتطبيق العلاقة: $\delta_{ij}= C_{ij} - U_i - V_j$ ، وهذا للخلايا الفارغة فقط:

الخانة $x_{13}$: $\delta_{13}= C_{13} - U_1 - V_3= 31- 0- 21= 10\geq 0$ لا يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{21}$: $\delta_{21}= C_{21} - U_2 - V_1= 10- (-1)- 21= -10< 0$ يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{31}$: $\delta_{31}= C_{31} - U_3 - V_1= 13- (-15)- 21= 7\geq 0$ لا يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

الخانة $x_{32}$: $\delta_{32}= C_{32} - U_3 - V_2= 9- (-15)- 11= 13\geq 0$ لا يمكن تحسن الحل بنقل كمية إلى هذه الخانة

بما أن بعض فروق التكاليف $\delta_{ij}$ سالبة، فإن الحل الأساسي بطريقة الركن الشمالي الغربي غير أمثل، حيث أن المسار الذي ينطلق من الخانة $x_{21}$ يسمح بتحسين الحل كما في الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | | $D_2$ | | $D_3$ | | متاح |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 100 - | 21 | 100 + | 11 | | 31 | 200/100/0 |
| $S_2$ | + | 10 | 300 - | 10 | 200 | 20 | 500/200/0 |
| $S_3$ | | 13 | | 9 | 300 | 6 | 300/0 |
| احتياج | 100/0 | | 400/300/100/0 | | 500/300/0 | | 1000 |

إذن: ملء الخلية $x_{21}$ بـ: $Min( 100 , 300)= 100$، سيؤدي إلى تخفيض التكاليف بـ: $10(100)= 1000$، وبالتالي تحسين الحل. وهو ما يوضحه جدول الحل التالي بعد التحسين:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | | $D_2$ | | $D_3$ | | متاح |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | | 21 | 200 | 11 | | 31 | 200 |
| $S_2$ | 100 | 10 | 200 | 10 | 200 | 20 | 500 |
| $S_3$ | | 13 | | 9 | 300 | 6 | 300 |
| احتياج | 100 | | 400 | | 500 | | 1000 |

$x_{12}= 200$ ؛ $x_{21}= 100$ ؛ $x_{22}= 200$ ؛ $x_{23}= 200$ ؛ $x_{33}= 300$.

تكلفة النقل الكلية: $Z= 11(200)+ 10(100)+ 10(200)+ 20(200)+ 6(300)= 11000$

شرط المقبولية: عدد المتغيرات الأساسية( الخانات المشغولة)= 5؛ ولدينا عدد الأسطر= 3؛ عدد الأعمدة= 3، ومنه: $m+ n- 1= 3+ 3- 1= 5$، ومنه الحل مقبول.

**اختبار أمثلية الحل(المرحلة الثانية):**

**الخطوة الأولى:** نقوم بحساب قيم $U_i$ و $V_j$ للخانات المملوءة فقط، بالعلاقة: $U_i+ V_j= C_{ij}$؛ ونفترض أن $U_1= 0$:

الخانة $x_{12}$: $U_1+ V_2=11 , U_1= 0 \rightarrow V_1= 11$

الخانة $x_{21}$: $U_2+ V_1= 10, V_1= 11 \rightarrow U_2= -1$

الخانة $x_{22}$: $U_2+ V_2= 10, U_2= -1\rightarrow V_2= 11$

الخانة $x_{23}$: $U_2+ V_3= 20, U_2= -1 \rightarrow V_3= 21$

الخانة $x_{33}$: $U_3+ V_3= 6, V_3= 21 \rightarrow U_3= -15$

**الخطة الثانية:** نقوم بحساب فروق التكلفة (مؤشرات التحسين) للخلايا الفارغة فقط، بالعلاقة: $\delta_{ij}= C_{ij} - U_i - V_j$:

الخانة $x_{11}$: $\delta_{11}= C_{11} - U_1 - V_1= 21- 0- 11= 10\geq 0$

الخانة $x_{13}$: $\delta_{13}= C_{13} - U_1 - V_3= 31- (0)- 21= 10\geq 0$

$x_{31}$ الخانة: $\delta_{31}= C_{31} - U_3 - V_1= 13- (-15)- 11= 17 \geq 0$
$x_{32}$ الخانة: $\delta_{32}= C_{32} - U_3 - V_2= 9- (-15)- 11= 13 \geq 0$

بما أن كل قيم $\delta_{ij}$ كلها غير سالبة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل:

$x_{12}= 200$ ؛ $x_{21}= 100$ ؛ $x_{22}= 200$ ؛ $x_{23}= 200$ ؛ $x_{33}= 300$.

وتكلفة النقل الكلية: $Z= 11(200)+ 10(100)+ 10(200)+ 20(200)+ 6(300)= 11000$

## حل التمرين الخامس:

1. الصيغة الرياضية:

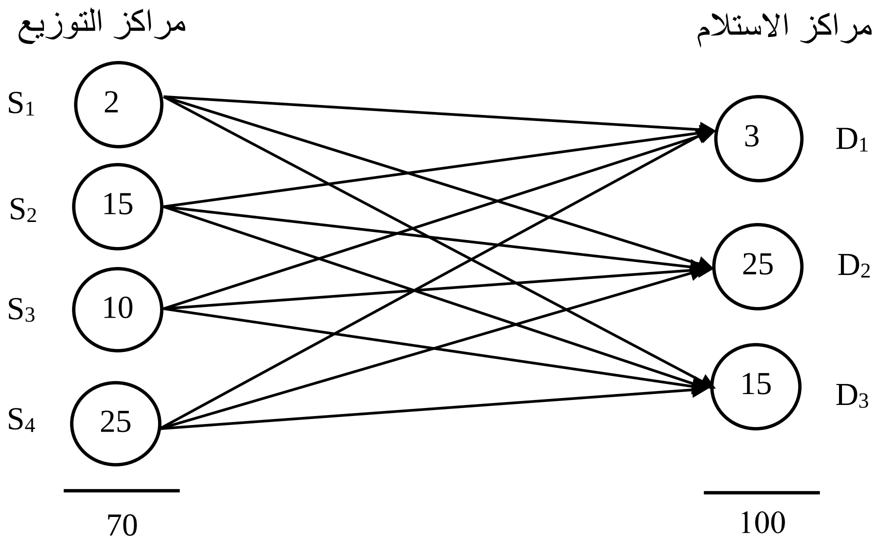
$Z= Min(8x_{11}+ 12x_{12}+ 3x_{13}+ 10x_{21}+ 6x_{22}+ 11x_{23}+ 1x_{31}+ 4x_{32}+ 8x_{33}+ 7x_{41}+ 11x_{42}+ 5x_{43})$ دالة الهدف

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+ x_{12}+ x_{13}= 20 \\ x_{21}+ x_{22}+ x_{23}= 15 \\ x_{31}+ x_{32}+ x_{33}= 10 \\ x_{41}+ x_{42}+ x_{43}= 20 \end{array}\right\} \text{شروط مراكز العرض}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+ x_{21}+ x_{31}+ x_{41}= 30 \\ x_{12}+ x_{22}+ x_{32}+ x_{42}= 30 \\ x_{13}+ x_{23}+ x_{33}+ x_{43}= 30 \end{array}\right\} \text{شروط مراكز الطلب}$$

$x_{ij} \geq 0$ قيد عدم السالبية

**2. رسم مسارات النقل والتوزيع:**




**3. البحث عن الحل الأولي بمختلف الطرق:**

**أ. طريقة الركن الشمالي الغربي:**

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 / **20** | 12 | 3 | 20/0 |
| $S_2$ | 10 / **10** | 6 / **5** | 11 | 15/5/0 |
| $S_3$ | 1 | 4 / **10** | 8 | 10/0 |
| $S_4$ | 7 | 11 / **10** | 5 / **15** | 25/0 |
| $b_j$ | 30/10/0 | 25/20/10/0 | 15/0 | **70=70** |

عدد الأسطر: $m= 4$، وعدد الأعمدة: $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 4+ 3- 1= 6$؛ عدد الخلايا المشغولة= 6، ومنه الحل الأولي بطريقة الركن الشمالي الغربي مقبول

تكلفة النقل الكلية: $CT= 20(8)+ 10(5)+ 5(6)+ 10(4)+ 10(11)+ 15(5)= 515$

**ب. طريقة أقل تكلفة:**

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 | 12<br>**5** | 3<br>**15** | 20/5/0 |
| $S_2$ | 10 | 6<br>**15** | 11 | 15/0 |
| $S_3$ | 1<br>**10** | 4 | 8 | 10/0 |
| $S_4$ | 7<br>**20** | 11<br>**5** | 5 | 25/5/0 |
| $b_j$ | 30/20/0 | 25/10/5/0 | 15/0 | 70=70 |

عدد الأسطر: $m= 4$، وعدد الأعمدة: $n= 3$، ومنه: $m+ n- 1= 4+ 3- 1= 6$؛ وعدد الخلايا المشغولة= 6، ومنه الحل الأولي بطريقة أقل تكلفة مقبول.

التكلفة الكلية للنقل: $CT= 5(12)+ 15(3)+ 15(6)+ 10(1)+ 20(7)+ 5(11)= 400$

**3. البحث عن الحل الأمثل بطريقة الحجر المتنقل:**

نشطلق من الحل الأول بطريقة أقل تكلفة، ونحاول اختباره أمثليته بطريقة الحجر المتنقل، وتحسينه إذا كان قابل للتحسين حتى الوصول للحل الأمثل:

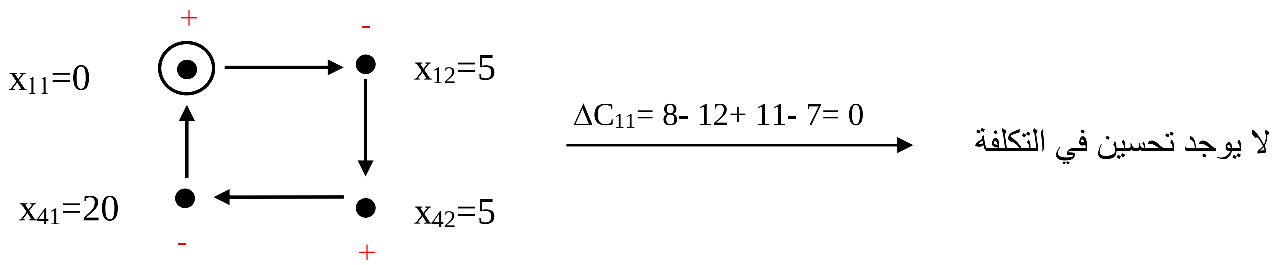
**اختبار أمثلية الحل الأولي (المرحلة الأولى):**

المتغيرات غير الأساسية: $x_{11}=0$؛ $x_{21}=0$؛ $x_{23}=0$؛ $x_{32}=0$؛ $x_{33}=0$؛ $x_{43}=0$

**المتغير غير الأساسي $x_{11}$: الخانة (1 , 1)**

المسار المغلق: $x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{42}\rightarrow x_{41}\rightarrow x_{11}$

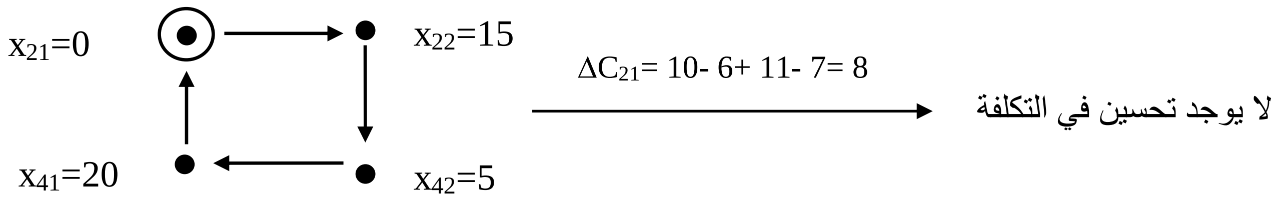
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{11}= 8-12+ 11- 7= 0\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).




**المتغير غير الأساسي $x_{21}$: الخانة (2 , 1)**

المسار المغلق: $x_{21}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{42}\rightarrow x_{41}\rightarrow x_{21}$

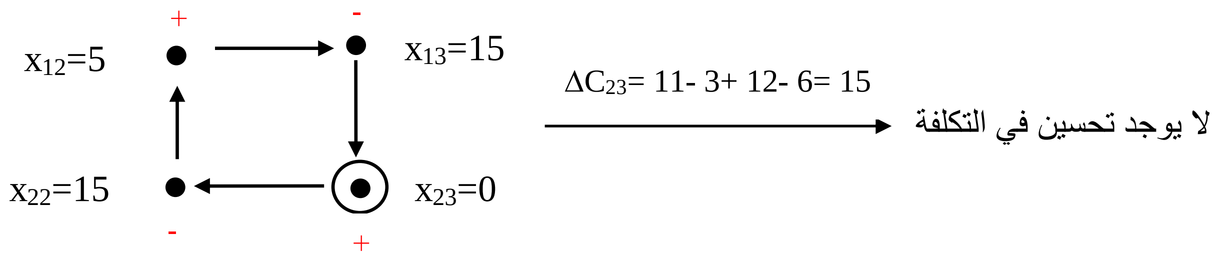
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{21}= 10- 6+ 11- 7= 8\geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



**المتغير غير الأساسي $x_{23}$: الخانة (2 , 3)**

المسار المغلق: $x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{23}$

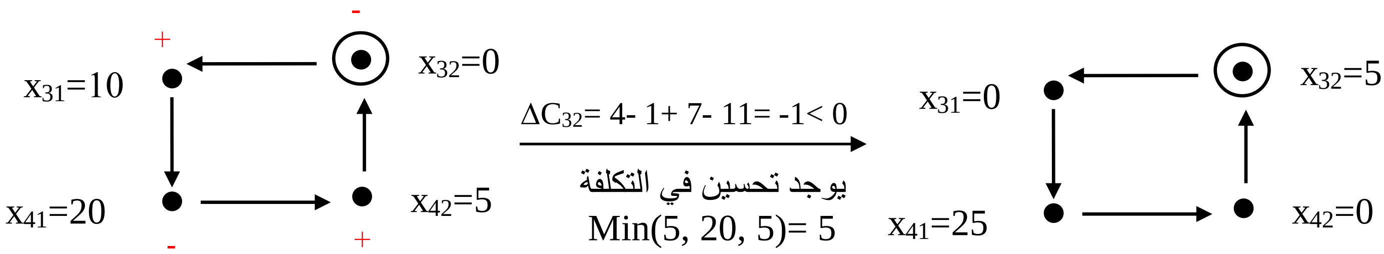
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{23} = 11 - 3 + 12 - 6 = 15 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار)




**المتغير غير الأساسي $x_{32}$: الخانة (3 , 2)**

المسار المغلق: $x_{32} \rightarrow x_{42} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32}$

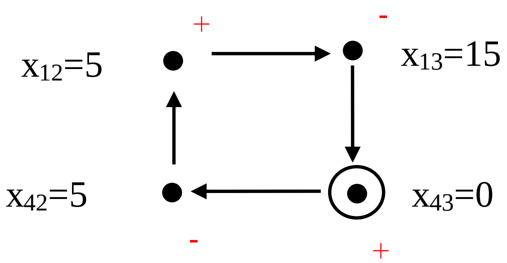
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\delta_{32} = 4 - 11 + 7 - 1 = -1 < 0$ ( يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار)

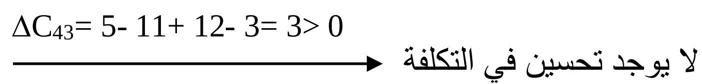



**المتغير غير الأساسي $x_{43}$ : الخانة (4 , 3)**

المسار المغلق: $x_{43} \rightarrow x_{42} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{43}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{43} = 5 - 11 + 12 - 3 = 3 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).

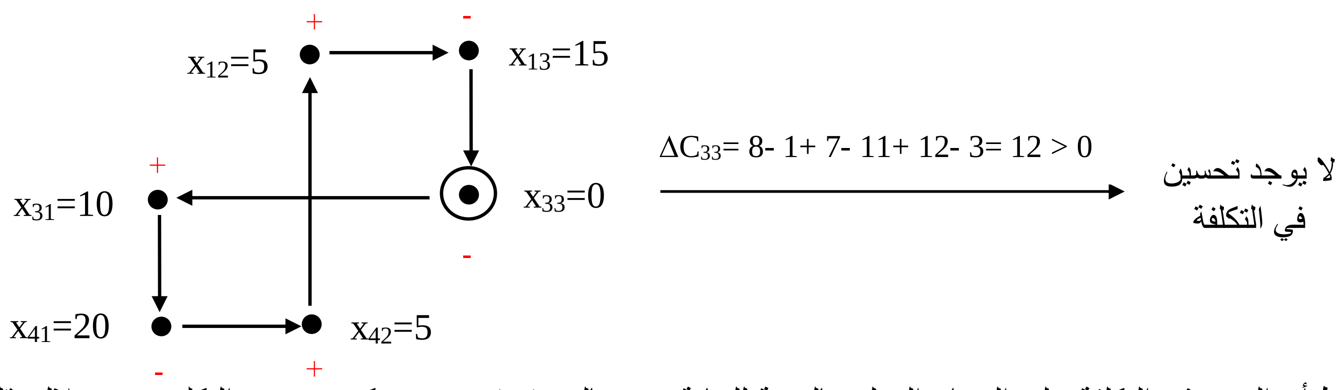



**المتغير غير الأساسي $x_{33}$: الخانة (3 , 3)**

المسار المغلق: $x_{33} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{42} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{33}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{33} = 8 - 1 + 7 - 11 + 12 - 3 = 12 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).




نلاحظ أن التغير في التكلفة على المسار المغلق بالنسبة للخانة $x_{32}$ سالب (-1)، ومنه يمكن تخفيض التكلفه، من خلال نقل أكبر كمية ممكنة: $Min(5 , 10) = 5$، والتكلفة الكلية تنخفض بـ: $5(-1) = -5$، وهو ما يوضحه الجدول التالي:

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | (8) | (12) **5** | (3) **15** | 20/5/0 |
| $S_2$ | (10) | (6) **15** | (11) | 15/0 |
| $S_3$ | - (1) **10** | + (4) | (8) | 10/0 |
| $S_4$ | + (7) **20** | - (11) **5** | (5) | 25/5/0 |
| $b_j$ | 30/20/0 | 25/10/5/0 | 15/0 | 70=70 |

لتحسين الحل: نضيف للخانة $x_{32}$ كمية 5؛ نطرح من الخانة $x_{42}$ كمية 5، نضيف للخانة $x_{41}$ كمية 5، ونطرح من الخانة $x_{31}$ كمية 5، وبالتالي يصبح **الحل المحسن** كما في الجدول التالي:

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | (8) | (12) **5** | (3) **15** | 20 |
| $S_2$ | (10) | (6) **15** | (11) | 15 |
| $S_3$ | (1) **5** | (4) **5** | (8) | 10 |
| $S_4$ | (7) **25** | (11) | (5) | 25 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 15 | 70=70 |

تكلفة النقل الكلية: $CT= 5(12)+ 15(3) + 15(6) + 5(1) + 5(4) + 25(7) = 395$

نلاحظ أن الحل الأولي بطريقة أقفل تكلفة تحسن من تكلفة نقل كلية 400 إلى 395، أي بتحسن يساوي 5.

مقبولية الحل المحسن: $m+ n- 1= 4+3-1= 6$؛ و هو يساوي عدد الخانات المملوءة 6، ومنه الحل المحسن مقبول.

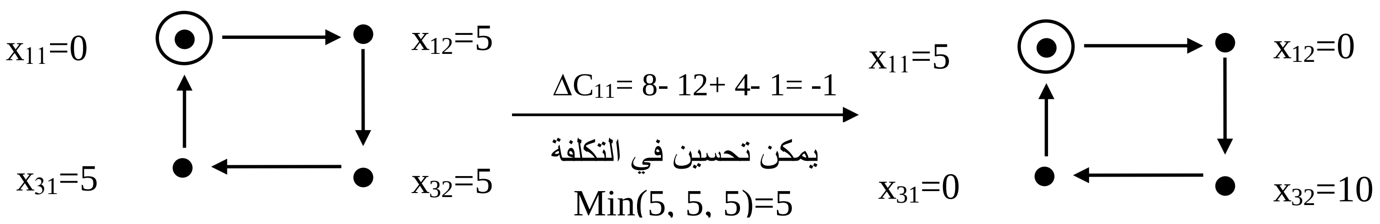
**اختبار أمثلية الحل المحسن: المرحلة الثانية**

الخانات الفارغة (المتغيرات غير الأساسية): $x_{11}=0$؛ $x_{21}=0$؛ $x_{23}=0$؛ $x_{33}=0$؛ $x_{42}=0$؛ $x_{43}=0$ .

**المتغير غير الأساسي $x_{11}$: الخانة (1 , 1)**

المسار المغلق: $x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{11}$

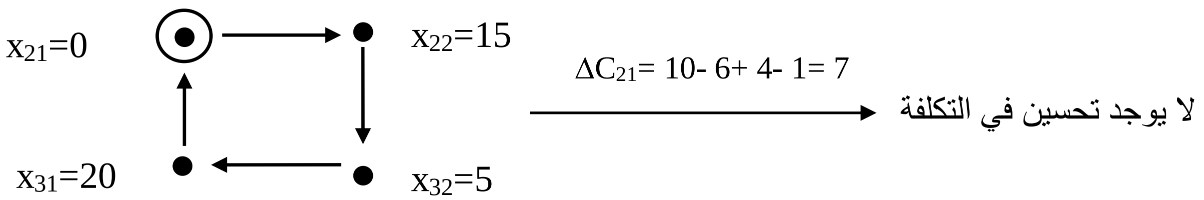
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{11}= 8-12+ 4- 1= -1< 0$ (يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



**المتغير غير الأساسي $x_{21}$: الخانة (2 , 1)**

المسار المغلق: $x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21}$

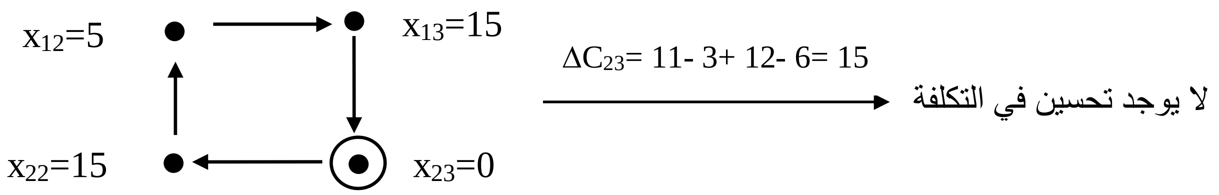
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{21} = 10-6+4-1 = 7 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).




**المتغير غير الأساسي $x_{23}$: الخانة (2 , 3)**

المسار المغلق: $x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23}$

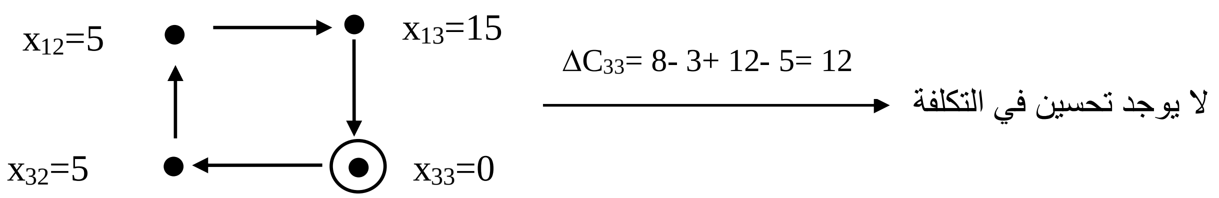
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{23} = 11-3+12-6 = 15 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).




**المتغير غير الأساسي $x_{33}$: الخانة (3 , 3)**

المسار المغلق: $x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{33}$

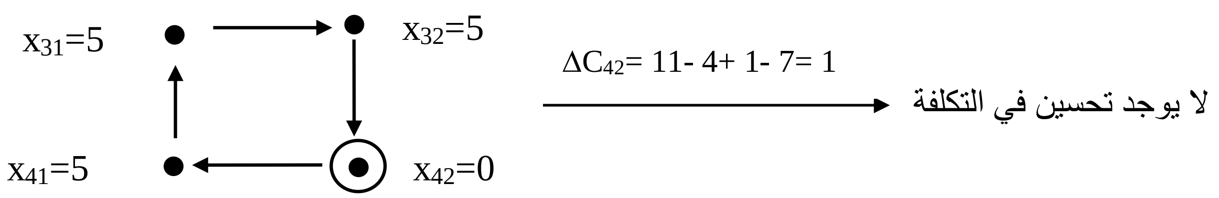
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{33} = 8-3+12-5 = 12 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).




**المتغير غير الأساسي $x_{42}$: الخانة (4 , 2)**

المسار المغلق: $x_{42} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{42}$

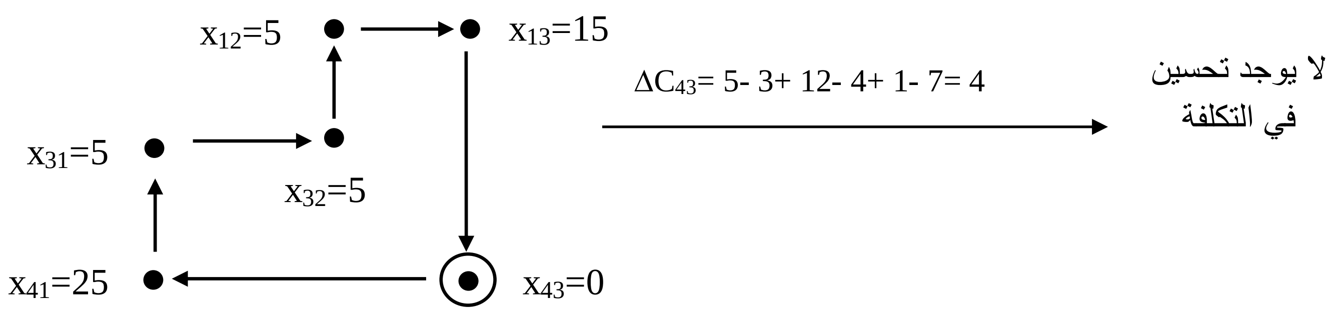
التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{42} = 11-4+1-7 = 1 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).




**المتغير غير الأساسي $x_{43}$: الخانة (4 , 3)**

المسار المغلق: $x_{43} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{41} \rightarrow x_{43}$

التغير في التكلفة على هذا المسار: $\Delta C_{43} = 5-3+12-4+1-7 = 4 \geq 0$ (لا يمكن تخفيض التكلفة على هذا المسار).



بالنسبة للخانة $x_{11}$ بما أن التغير في التكلفة سالب (1-) على المسار فيمكن تحسين الحل بتخفيض التكلفة، من خلال نقل أكبر كمية ممكنة: Min( 5 , 10)= 5، والتكلفة الكلية تنخفض بـ: 5(1-)= -5. والجدول التالي يوضح مسار التحسين انطلاقا من الخانة $x_{11}$:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | + 8 | 12 - **5** | 3 **15** | 20 |
| $S_2$ | 10 - | 6 + **15** | 11 | 15 |
| $S_3$ | 1 **5** | 4 **5** | 8 | 10 |
| $S_4$ | 7 **25** | 11 | 5 | 25 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 15 | 70=70 |

من خلال الجدول السابق، يمكن تحسين الحل من خلال : إضافة للخانة $x_{32}$ كمية 5؛ طرح من الخانة $x_{42}$ كمية 5، نضيف للخانة $x_{41}$ كمية 5، ونطرح من الخانة $x_{31}$ كمية 5، وبالتالي يصبح **الحل المحسن** كما في الجدول التالي:

| $D_j$ / $S_i$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 **5** | 12 | 3 **15** | 20 |
| $S_2$ | 10 | 6 **15** | 11 | 15 |
| $S_3$ | 1 | 4 **10** | 8 | 10 |
| $S_4$ | 7 **25** | 11 | 5 | 25 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 15 | 70=70 |

ومنه التكلفة الكلية: CT= 5(8)+ 15(3) + 15(6) + 10(4) + 25(7) = 390

**اختبار أمثلية الحل المحسن ( المرحلة الثالثة):**

نلاحظ أنه يوجد 5 خانات مملوءة (متغيرات أساسية)؛ هذا الأخير يختلف عن: n+ m- 1= 4+ 3- 1= 6، لذا هذه الحالة غير طبيعية (تسمى حالة انحلال أو حالة حل ناقص)، حيث يصعب إيجاد مسارات مغلقة لبعض المتغيرات غير الأساسية، خاصة بالنسبة للمتغير غير الأساسي $x_{12}$، ولهذا نفترض أن أحد المتغيرات غير الأساسية يساوي 0، وهو ما يعني تحويله إلى متغير أساسي عن طريق إعطائه كمية 0، وليكن $x_{31}$ (لأنه أقل الخانات الفارغة تكلفة)، وعليه يكون الجدول كما يلي:

| $S_i$ \ $D_j$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $a_i$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $S_1$ | (8) **5** | (12) | (3) **15** | 20 |
| $S_2$ | (10) | (6) **15** | (11) | 15 |
| $S_3$ | (1) **0** | (4) **10** | (8) | 10 |
| $S_4$ | (7) **25** | (11) | (5) | 25 |
| $b_j$ | 30 | 25 | 15 | 70=70 |

نقوم بتكوين مسارات مغلقة للخانات الفارغة: $x_{12}$؛ $x_{21}$؛ $x_{23}$؛ $x_{33}$؛ $x_{42}$؛ $x_{43}$، ونحسب التغير في التكلفة $\Delta C_{ij}$ لكل منها (مؤشرات التحسين) كما يلي:

الخانة $x_{12}$: $x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{32} \to x_{12}$ : $\Delta C_{12}= 12- 8+ 1- 4= 1 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة $x_{21}$: $x_{21} \to x_{22} \to x_{32} \to x_{31} \to x_{21}$ : $\Delta C_{21}= 10- 6+ 4- 1= 7 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة $x_{23}$ : $x_{23} \to x_{13} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{32} \to x_{22} \to x_{23}$ : $\Delta C_{23}= 11- 3+ 8- 1+ 4- 6= 13 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة $x_{33}$: $x_{33} \to x_{13} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{33}$ : $\Delta C_{33}= 8- 3+ 8- 1= 12 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة $x_{42}$: $x_{42} \to x_{41} \to x_{31} \to x_{32} \to x_{42}$ : $\Delta C_{42}= 11- 4+ 1- 7= 1\geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

الخانة $x_{43}$: $x_{43} \to x_{41} \to x_{11} \to x_{13} \to x_{43}$ : $\Delta C_{43}= 5- 3+ 8- 7= 3 \geq 0$ لا يمكن تخفيض التكلفة

نلاحظ أن كل التغيرات في التكلفة على كل المسارات تأخذ قيم موجبة، وبالتالي لا يمكن تحسين الحل على أي من هذه المسارات، ولذلك فالحل المحسن الأخير هو الحل الأمثل.

إذن الحل الأمثل: $x_{11}= 5$ ؛ $x_{13}= 15$ ؛ $x_{22}= 15$ ؛ $x_{32}= 10$ ؛ $x_{41}= 25$

**والتكلفة الكلية المثلى للنقل**: $CT= 5(8)+ 15(3) + 15(6) + 10(4) + 25(7) = 390$