Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes
Département de Mathématiques
Master 1: 2025/2026

Série N°2 : **Construction de tests statistiques**

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On souhaite tester l'hpothèse nulle $H_0 : \theta = 2$ contre l'alternative $H_1 : \theta = 1$ sur la base d'une seule observation. Déterminer les deux risques associés à la région de rejet $[1, \infty[$.*

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$. On suppose que la région de rejet du test*

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \leq 1 \\ H_1 : & \theta > 1 \end{cases}.$$

est $W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i \geq 0.9 \right\}$. Déterminer la fonction puissance de ce test, puis déduire son niveau de signification.

Exercice 3 *Sur la base d'un échantillon de taille $n = 9$, construire le test le plus puissant, au niveau $\alpha = 0.10$, sur la moyenne μ d'une variable aléatoire normale de variance $\sigma^2 = 2$:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = -1 \end{cases}.$$

Vérifier qu'il est sans biais.

Exercice 4 *Soit X une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 4. On prélève un échantillon de taille 16 pour réaliser le test*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases}.$$

1. *Construire le test uniformément le plus puissant au niveau $\alpha = 0.05$.*
2. *Déterminer sa fonction puissance, puis tracer son graphe.*
3. *Si $\mu = 12$, calculer le risque de deuxième espèce.*

Exercice 5 *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon, de taille $n \geq 1$, d'une population X normale centrée de variance σ^2. A partir d'un échantillon de taille 10, construire le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification $\alpha = 0.05$, des hypothèses*

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 \leq 1 \\ H_1 : & \sigma^2 > 1 \end{cases}.$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.

Exercice 6 *Dans une production il y a une proportion p d'articles défectueux. On prélève 15 articles pour réaliser le test*

$$\begin{cases} H_0 : p \leq 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{cases},$$

au niveau de signification 0.01. Déterminer le test optimal puis tracer le graphe de sa fonction puissance.

Exercice 7 *On pélève un échantillon de taille 64 d'une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 1. Déterminer le test unifomément le plus puissant, au niveau de signification 0.10, pour les hypoyhèses*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases}.$$

Tracer le graphe de sa fonction puissance.