Introduction générale

Définition 1. Un test statistique est une procédure de décision permettant de trancher entre deux hypothèses après l'observation d'un échantillon. Les deux hypothèses sont généralement appelées hypothsèse nulle et hypothèse alternative.

Exemple 1: Soient Θ_0 et Θ_1 deux sous ensembles disjoints de Θ. On veut savoir si la valeur du paramètre θ est dans Θ_0 où Θ_1, alors on réalise le test dont les hypothèses sont:

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

Puisque les valeurs de θ qui n'appartiennent pas à $\Theta_0 \cup \Theta_1$ ne sont pas envisagées, on peut admettre que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Catégories de tests:
Les tests sont classés selon les hypothèses formulées ou en d'autres termes selon le but à atteindre. On distingue différentes catégories de tests, parmi lesquelles:

1. **Test de conformité:**

Ils servent à vérifier si un paramètre (moyenne, variance, proportion,...) d'une population de distribution, connue est égal à une certaine valeur théorique appelée valeur hypothétique du paramètre.

2. **Tests de comparaison (ou égalité ou homogénéité):**

Ils servent à vérifier si les paramètres de deux (ou plusieurs) populations de distributions, connues sont égaux. Par exemple, test d'égalité des moyennes.

3. **Tests d'ajustement:**
Ils servent à vérifier si un échantillon provient d'une population de distribution donnée.
4. **Tests d'indépendance:**
Ils servent à vérifier si deux ou plusieurs populations sont indépendantes.

Tests paramétriques et tests nonparamétriques:
Un test est dit paramétrique si la population mère est de distribution connue; l'objet du test est alors de vérifier si certaines hypothèses relatives à un ou plusieurs paramètres de cette distribution. Les tests de conformité et de comparaison sont des tests paramétriques.

Hypothèses simples et hypothèses multiples ou composites:
Pour les tests paramétriques on distingue: hypothèses simples et hypothèses multiples.

Une hypothèse H est dite simple si elle de type "$\theta = \theta_0$" où $\theta_0 \in \Theta$.

Une hypothèse H est dite multiple si elle est du type "$\theta \in A$" où A est une partie de Θ ayant plus d'un élément.

Erreurs et risques:
Les deux hypothèses H_0 et H_1 sont telles que une et une seule vraie. Lors de la prise de décision qui aboutera à choisir H_0 ou H_1 quatre situations peuvent être envisagées:

- accepter H_0 et elle est vrais.
- rejeter H_0 et elle fausse.
- accepter H_0 alors qu'elle est fausse
- rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.

L'erreur qui consiste à rejeter une hypothèse vrais appelée *erreur de première espèce* et sa probabilité appelée *risque de première espèce.* On le note α.

L'erreur commise en acceptant une hypothèse fausse est appelée *erreur de deuxième espèce* et sa probabilité appelée *risque de deuxième espèce.* On le note β.

On a donc:

$$\alpha = \mathbf{P}\left[\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie}\right] = \mathbf{P}\left(H_1 \mid H_0\right)$$

et

$$\beta = \mathbf{P}\left[\text{accepter } H_0 \mid H_1 \text{ est vraie}\right] = \mathbf{P}\left(H_0 \mid H_1\right)$$

Ceci est résumé dans le tableau Tab.1 et la figure Fig.1 suivants:

		Vérité	
		H_0	H_1
Décision	H_0	$1-\alpha$	β
	H_1	α	$1-\beta$

Tab.1

En pratique, on fixe une *limite supérieure* généralement égale à **0.10; 0.05; 0.01**, au risque de première espèce. Cette limite est appelée:

niveau ou seuil de signification du test.

Puissance:

La puissance d'un test est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle H_0 quand l'alternative H_1 est vraie. On la note par

$$\pi := \mathbf{P}\left[\text{rejeter } H_0 \mid H_1 \text{ est vraie}\right] = 1 - \beta.$$

Lorsque H_1 est composite, la puissance est variable sur Θ_1. De même lorsque H_0 est composite, le risque de première espèce est variable sur Θ_0. On définit alors une fonction sur l'ensemble Θ qu'on appelle fonction puissance

$$\pi(\theta) := \mathbf{P}_\theta\left[\text{rejeter } H_0\right], \ \theta \in \Theta.$$

- Si $\theta \in \Theta_0$, $\pi(\theta) = \alpha(\theta)$ c'est le risque de première espèce.
- Si $\theta \in \Theta_1$, $\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ c'est la puissance du test.

Variable de décision

La statistique qui apporte le plus de renseignement sur le problème posé est appelée *variable de décision* ou *statistique du test*. La loi de probabilité doit être différente selon que H_0 ou H_1, sinon elle ne servait à rien.

Région de rejet

La *région de rejet* d'un test est l'ensemble des points $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pour lequel l'hypothèse nulle H_0 est écartée au profit de l'hypothèse alternative H_1. On appelle aussi *région critique* du test et on la note généralement par W. Elle est définie par la relation:

$$\mathbf{P}\left(W \mid H_0\right) = \alpha \tag{1}$$

Le complémentaire de la région critique est appelée région d'acceptation du test. Elle est notée par $\overline{W}$ et est définie par:

$$\mathbf{P}\left(\overline{W} \mid H_0\right) = 1 - \alpha$$

Remarques

1. L'indicatrice de W est appelée *fonction critique du test*. On note par
$$\delta\left(x_1, ..., x_n\right) := \mathbf{1}_W = \begin{cases} 1 & \text{si } \left(x_1, ..., x_n\right) \in W \\ 0 & \text{si } \left(x_1, ..., x_n\right) \notin W \end{cases}.$$
2. Le construction d'un test est en fait la détermination de la région critique W. D'où en vertu de la relation (1), la nécessité de connaitre la loi de probabilité de la variable de décision sous l'hypothèse H_0.
3. Puisque la puissance est $\pi = \mathbf{P}\left[W \mid H_1\right]$ alors, pour son calcul, il est nécessaire de connaitre la loi de probabilité de la variable de décision sous l'hypothèse H_1.

Remarques

1. On a

$$\pi\left(\theta\right)=\mathbf{P}\left(W\right)=\mathbf{P}\left[\delta\left(X_1,...,X_n\right)=1\right]$$
$$=\mathbf{E}\left[\delta\left(X_1,...,X_n\right)\right].$$

2. Certains auteurs s'intéressent au plus petit niveau de signification. Ils s'appellent dimension du test. C'est le risque de première espèce maximum (dimension du test)

$$\alpha:=\sup_{\theta\in\Theta_0}\alpha\left(\theta\right)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\pi\left(\theta\right).$$

Exemple

Soit $X \rightsquigarrow U(0,\theta)$, $\theta > 0$. On désire tester les deux hypothèses:

$$\begin{cases} H_0 : & 3 \leq \theta \leq 4 \\ H_1 : & \theta < 3 \text{ ou } \theta > 4. \end{cases}$$

On a $\Theta =]0,+\infty[$, $\Theta_0 = [3,4]$ et $\Theta_1 =]0,3[\cup]4,+\infty[$. On suppose que la région d'acceptation du test est

$$\overline{W} = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : \ 2.9 \leq Y_n \leq 4\},$$

où $Y_n := \max\{x_1,...,x_n\}$.

On rappelle que Y_n est l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ et que sa fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F_{Y_n}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (x/\theta)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

La fonction puissance du test est définie sur $\Theta =]0, +\infty[$ par

$$\begin{aligned}\theta \rightarrow \pi(\theta) &= \mathbf{P}_{\theta}(W) = \mathbf{P}_{\theta}(Y_n < 2.94) + \mathbf{P}_{\theta}(Y_n > 4) \\ &= F_{Y_n;\theta}(2.94) + 1 - F_{Y_n;\theta}(4).\end{aligned}$$

- Si $\theta > 4$ alors $\pi(\theta) = (2.9/\theta)^n + 1 - (4/\theta)^n$
- Si $3 \leq \theta \leq 4$ alors $\pi(\theta) = (2.9/\theta)^n$
- Si $\theta < 3$ alors $\pi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < 2.9 \\ (2.9/\theta)^n & \text{si } 2.9 \leq \theta < 3 \end{cases}$

D'où

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < 2.9 \\ (2.9/\theta)^n & \text{si } 2.9 \leq \theta < 4 \\ (2.9/\theta)^n + 1 - (4/\theta)^n & \text{si } \theta > 4 \end{cases}$$

La dimension du test est

$$\alpha = \sup_{3 \leq \theta \leq 4} \pi(\theta) = \pi(3) = (2.9/3)^n .$$

Pour un échantillon de taille $n = 68$ on trouve $\alpha \simeq 0.10$.

Test uniformément le plus puissant

Soit à tester l'hypothèse $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre l'hypothèse $H_1 : \theta \in \Theta_1$ où Θ_1 est composite.

Pour trancher entre H_0 et H_1, à niveau de signification α fixé, on doit trouver un test pour lequel la puissance est la plus grande possible. Quand il existe, un tel test est appelé upp.

Sa puissance est supérieure à celle de tout autre test (de même niveau de signification α).

Test uniformément le plus puissant

Un test δ^*, de niveau de signification α, est upp si et seulement si:

$$\pi(\theta, \delta^*) \geq \pi(\theta, \delta)$$

pour tout $\theta \in \Theta_1$ et pour tout autre test δ (de même niveau de signification α).

La région critique et la variable de décision correspondantes sont dites région critique et variable de décision optimals.

Dans le cas où H_1 est simple, on parle de test le plus puissant (pp).

Test sans biai et Test convergent

Un test δ, niveau de signification α, est dit **sans biais** si $1-\beta \geq \alpha$; en d'autres termes

$$\pi(\theta) \geq \alpha \text{ pour tout } \theta \in \Theta_1.$$

Un test est dit **convergent** si sa puissance tend vers 1:

$$1-\beta \to 1, \text{ quand } n \to \infty.$$

Tests entre hypothèses simples

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f_θ où θ est un paramètre inconnu. Il s'agit de tester

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1. \end{cases} \tag{2}$$

Soit

$$L_\theta(x_1, ..., x_n) := \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i),$$

la fonction de vraisemblance (ou bien la densité) de l' échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de X. On pose

$$L_i(x_1, ..., x_n) := L_{\theta_i}(x_1, ..., x_n), \ \ i = 0, 1.$$

Le rapport

$$\frac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)},$$

est appelé rapport de vraisemblance.

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

On suppose ici que la v.a X est continue. Un test δ_k est le test qui rejette H_0 au niveau de signification α, si et seulement si le rapport de vraisemblance est

$$\frac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} \geq k,$$

où $k = k(\alpha) \geq 0$.

On montre qye, si δ est un autre test tel que $\alpha(\delta) \leq \alpha(\delta_k)$, alors

$$\pi(\theta; \delta_k) \geq \pi(\theta; \delta),$$

c'est à dire δ_k **est le plus puissant.**

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

De plus, la région critique optimale est

$$W_k := \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} \geq k \right\},$$

où k est telle que $\mathbf{P}_0(W_k) = \alpha$, où $\mathbf{P}_i(A) := P(A \mid H_i)$, $i = 0, 1$.

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

Le test δ_k est alors défini comme suit:

$$\delta_k(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} \geq k \\ 0 & \text{si } \dfrac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} < k \end{cases}$$

où est la solution de l'équation

$$\mathbf{P}_0 \left\{ \frac{L_1(X_1, ..., X_n)}{L_0(X_1, ..., X_n)} \geq k \right\} = \alpha.$$

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

Exemple 4: Soit X une population normale d'espérance inconnue μ et de variance 1.

On veut tester l'hypothèse

$$H_0 : \mu = 0 \text{ contre l'hypothèse } H_1 : \mu = 1.$$

Pour cela en prélève un échantillon de taille 9. Quel est le test le plus puissant au niveau de signification 0.05?

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

Solution: Le rapport de vraisemblance

$$\frac{L_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)}{L_0\left(x_1,\ldots,x_n\right)}=\frac{\prod_{i=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_i-1\right)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}{x_i}^2\right\}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^9\exp\left\{-\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{2}\left(x_i-1\right)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^9\exp\left\{-\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{2}{x_i}^2\right\}}$$

Solution: Le rapport de vraisemblance

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i^2 - 2x_i + 1\right)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}{x_i}^2\right\}}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\left(x_i^2 - 2x_i + 1\right)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}{x_i}^2\right\}}$$

Apres simplification on trouve

$$\frac{L_1\left(x_1, ..., x_n\right)}{L_0\left(x_1, ..., x_n\right)} = \exp\left\{9\left(\overline{x} - \frac{1}{2}\right)\right\},$$

où $\overline{x} = \sum_{i=1}^{9} x_i/9$ est la moyenne empirique.

La région de rejet (critique) est donc

$$\begin{aligned} W_k &= \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^9 : \exp\left\{ 9\left(\overline{x} - \frac{1}{2} \right) \right\} \geq k \right\} \\ &= \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \geq \frac{1}{2} + \frac{\log k}{9} =: k' \right\}, \end{aligned}$$

où la constante k' est telle que:

$$P\left(W_k \mid \mu = 0\right) = 0.05 \Longleftrightarrow P_0\left(W_k\right) = P_0\left(\overline{X} \geq k'\right)$$

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

Or sous H_0 :

$$\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, 1/9\right),$$

ainsi $Z := 3\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, 1\right)$, d'où $P\left(Z \geq 3k'\right) = 0.05$, en d'autres termes $\Phi\left(3k'\right) = 0.95$ ou encore $k' = \frac{1}{3}\Phi^{-1}\left(0.95\right)$, où $\Phi^{-1}\left(\alpha\right)$ désigne la fonction de quantile d'ordre $0 < \alpha < 1$. De la table statistique de la loi normale (Gauss) en tire:

$$\Phi^{-1}\left(0.95\right) = 1.64,$$

par conséquent $k' = 1.64/3 = 0.54$.

La région critique optimale est donc:

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \geq 0.54 \right\}.$$

Le test optimal (le plus puissant) est par conséquent:

$$\delta\left(x_1, ..., x_n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \geq 0.54 \\ 0 & \text{si } \overline{x} < 0.54 \end{cases} \tag{3}$$

Lemme de Neyman-Pearson (cas continu)

Calculant la puissance $1-\beta$ du test δ :

$$\begin{aligned}
1-\beta &= \mathbf{P}\left(W \mid \mu = 1\right) = \mathbf{P}\left(\overline{X} \geq 0.54 \mid \mu = 1\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}_1\left(\overline{X} < 0.54\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}_1\left(3\left(\overline{X} - 1\right) < 3\left(0.54 - 1\right)\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(Z^* < -1.38\right), \text{ où } Z^* \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(Z^* < 1.38\right) = 0.91.
\end{aligned}$$

Ainsi le risque de deuxième espèce est $\beta = 1 - 0.91 = 0.09$.

Lemme de Neyman-Pearson (cas discret)

Il arrive que pour certaines valeurs de α, il n'existe pas de constante k vérifiant l'équation $\alpha(\delta_k) = k$; ce qui ce passe surtout dans le cas où X est discrète. Dans ce cas, on modifie δ_k en définissant le δ_k^* (qui sera le plus puissant):

$$\delta_k^*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} > k \\ p & \text{si } \dfrac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} = k \\ 0 & \text{si } \dfrac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_0(x_1, ..., x_n)} < k \end{cases}$$

où k et $0 < p < 1$ sont deux constantes définies, sous H_0, par l'équation:

$$\alpha(\delta_k^*) = \mathbf{P}_0\left\{\frac{L_1(X_1, ..., X_n)}{L_0(X_1, ..., X_n)} > k\right\} + p\mathbf{P}_0\left\{\frac{L_1(X_1, ..., X_n)}{L_0(X_1, ..., X_n)} = k\right\} = \alpha.$$

Lemme de Neyman-Pearson (cas discret)

On note que δ_k est appelé test du rapport de vraisemblance et δ_k^* est appelé test du rapport de vraisemblance *randomisé*.

Exemple: On prélève un échantillon de taille 8, d'une population X de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, pour tester l'hypothèse $H_0 : \lambda = 1$ contre $H_0 : \lambda = 2$ au niveau de signification $\alpha = 0.1$. Déterminer le test le plus puissant et quelle est sa puissance?

Solution: Rappelons que la loi de Poisson, de paramètre $\lambda > 0$, est définie par sa fonction de masse:

$$\mathbf{P}_\lambda\left(X = x\right) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x = 0, 1, 2, ...$$

et sa fonction de répartition

$$\mathbf{P}\left(X \leq x\right) = \sum_{k=0}^{x} \mathbf{P}_\lambda\left(X = k\right) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^k}{k!},\ x = 0, 1, 2, ...$$

Le rapport de vraisemblance qui correspond à ce test est:

$$\frac{L_1(x_1, ..., x_8)}{L_0(x_1, ..., x_8)} = \frac{\prod_{i=1}^{8} \mathbf{P}_{\lambda=2}(X = x_i)}{\prod_{i=1}^{8} \mathbf{P}_{\lambda=1}(X = x_i)} = \frac{\prod_{i=1}^{8} \frac{2^{x_i}}{x_i!} e^{-2}}{\prod_{i=1}^{8} \frac{1^{x_i}}{x_i!} e^{-1}} = e^{-8} 2^s,$$

où $s := x_1 + ... + x_8$.

Ainsi le test statistique le plus puissant est:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } e^{-8}2^{s} > k \\ p & \text{si } e^{-8}2^{s} = k \\ 0 & \text{si } e^{-8}2^{s} < k \end{cases}$$

où k et $0 < p < 1$ sont deux constantes définies sous H_0 par l'équation:

$$\mathbf{P}_0 \left(e^{-8}2^{S} > k \right) + p\mathbf{P}_0 \left(e^{-8}2^{S} = k \right) = 0.1,$$

où $S := X_1 + ... + X_8$.

En d'autres termes

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } s > c \\ p & \text{si } s = c \\ 0 & \text{si } s < c \end{cases}$$

où c et $0 < p < 1$ sont deux constantes définies sous H_0 par l'équation:

$$\mathbf{P}_0 (S > c) + p\mathbf{P}_0 (S = c) = 0.1.$$

Cette équation peut être réécrite comme suit:

$$\mathbf{P}_0 (S \leq c) = 0.90 + p\mathbf{P}_0 (S = c) > 0.90. \tag{4}$$

Sous H_0, l'échantillon de taille 8 provient d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, donc S est suit aussi une loi de Poisson de paramètre $8\lambda = 8$. De la table statistique de la loi de Poisson, on remarque que la petite valeur de c vérifiant $\mathbf{P}_0 \left(S \leq c \right) > 0.90$ est $c = 12$, qui correspond à $\mathbf{P}_0 \left(S \leq 12 \right) = 0.93$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 \left(S = 12 \right) &= \mathbf{P}_0 \left(S \leq 12 \right) - \mathbf{P}_0 \left(S \leq 11 \right) \\ &= 0.93 - 0.88 = 0.05, \end{aligned}$$

ce qui implique, de l'équation (4) , que

$$p = \frac{0.93 - 0.90}{0.05} = 0.60 = 60\%.$$

Lemme de Neyman-Pearson (cas discret)

En d'autres termes si $s = 12$ on rejette H_0 avec une probabilité de 60%, et si $S > 12$ en rejette H_0 à 100%. Ainsi le test le plus puissant est:

$$\delta = \delta(x_1, ..., x_8) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 12 \\ 0.60 & \text{si } s = 12 \\ 0 & \text{si } s < 12 \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_0 \left[\delta(X_1, ..., X_8)\right] \\ & = 1 \times \mathbf{P}_0(S > 12) + 0.60 \times \mathbf{P}_0(S = 12) + 0 \times \mathbf{P}_0(S < 12) \\ & = 1 - 0.93 + 0.60 \times 0.05 = 0.1 = \alpha. \end{aligned}$$

Tests d'une hypothèse simple contre une hypothèse alternative composite

La région critique du test du rapport de vraisemblance de l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative H_1 ne dépend pas de façon explicite de H_1. Donc cette région est la même pour n'importe quel $\theta > \theta_0$ où $\theta < \theta_0$.

Proposition 2. Le test du rapport de vraisemblance défini, au paragraphe précédente, par le Lemme de Neyman-Pearson est uniformément le plus puissant pour l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta > \theta_0$ et pour l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta < \theta_0$.

Remarque 2:

1. Une hypothèse H est dite *bilatérale* si elle est de la forme $\theta \neq \theta_0$. Elle est dite *unilatérale à gauche si elle est de la forme* $\theta < \theta_0$. Elle est dite *unilatérale à droite si elle est de la forme* $\theta > \theta_0$.
2. Il n'existe pas en général de test upp pour $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative (*bilatérale*) $H_1 : \theta \neq \theta_0$; car s'il en existait il devrait être upp pour sous-alternatives (*unilatérale à droite*) $H_1' : \theta > \theta_0$ et *unilatérale à gauche*) $H_1'' : \theta < \theta_0$. Or les tests de H_0 contre H_1' et H_1'' sont d'après, la proposition, upp mais ils sont (évidement) différents l'un de l'autre. Nous allons voir par la suite que les upp's peux êtres déterminer pour une certaine classe de distributions.

a) **Alternative unilatérale**:

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Définition 2. On dit que la distribution d'une variable aléatoire X possède un rapport de vraisemblance croissant s'il existe une statistique $T = T(X_1, ..., X_n)$ telle que pour tout $\theta_1 > \theta_2$ le rapport de vraisemblance

$$\frac{L_1(x_1, ..., x_n)}{L_2(x_1, ..., x_n)}$$

est une fonction croissante en $t = T(x_1, ..., x_n)$.

Exemple 6: Soit $X \rightsquigarrow$Bernoulli(p) , $0 < p < 1$, définie par sa masse

$$\mathbf{P}\left(X = x\right) = p^{x}\left(1 - p\right)^{1-x}, \; x = 0, 1.$$

Soit $0 < p_1, p_2 < 1$, telles que $p_1 > p_2$. Nous avons

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_1^{x_i}\left(1 - p_1\right)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{n} p_2^{x_i}\left(1 - p_2\right)^{1-x_i}} = \frac{p_1^{t}\left(1 - p_1\right)^{n-t}}{p_2^{t}\left(1 - p_2\right)^{n-t}}, \; t = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Tests entres deux hypothèses composites

En d'autres termes

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^n \left(\frac{p_1\,(1-p_2)}{p_2\,(1-p_1)}\right)^t .$$

Il est clair que $a := \frac{1-p_1}{1-p_2} > 0$, $b := \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)} > 1$, donc la fonction $t \longrightarrow a^n \times b^t$ est une fonction croissante en t. Donc la distribution de X, possède un rapport de vraisemblance croissant.

Proposition 3. Si la distribution de X possède un rapport de vraisemblance croissant pour une statistique T, alors

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } t > c \\ p & \text{si } t = c \\ 0 & \text{si } t < c \end{cases}$$

est le test upp de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$ au niveau de signification α. Les constantes c et p se déterminent à partir de la condition

$$\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}\left(T > c\right) + p\mathbf{P}_{\theta=\theta_0}\left(T = c\right) = \alpha.$$

Lorsque X est continue, on prendra $p = 1$.

Exemple 7. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 1)$ et

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \leq 0 \\ H_1 : & \mu > 0 \end{cases}$$

avec $\alpha = 0.1$, $n = 65$. Pour $\mu_1 > \mu_2$, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_2} &= \exp\left\{n(\mu_1 - \mu_2)\left[\overline{x} - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\right]\right\} \\ &= \exp\{at + b\}, \end{aligned}$$

où $t = \overline{x}$, $a := n(\mu_1 - \mu_2) > 0$ et $b := a - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$.

Tests entres deux hypothèses composites

Il est clair que la fonction $t \longrightarrow \exp\{at+b\}$ est une fonction croissante en t. Donc la distribution de X possède un rapport de vraisemblance croissant. Comme X est continue, le test upp le plus puissant est défini par

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \geq c \\ 0 & \text{si } \overline{x} < c \end{cases}$$

avec $\mathbf{P}_{\mu=0}\left(\overline{X} \geq c\right) = 0.1$, ce qui implique $c = 1.28/\sqrt{65} = 0.16$. On a donc

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \geq 0.16 \\ 0 & \text{si } \overline{x} < 0.16 \end{cases}$$

La fonction puissance du test δ est définie par

$$\pi(\mu) = \begin{cases} \alpha(\mu) & \text{si } \mu \leq 0 \\ 1 - \beta(u) & \text{si } \mu > 0 \end{cases}.$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} \pi(\mu) &= \mathbf{P}\left(\overline{X} \geq 0.16 \mid \mu \in \mathbb{R}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\sqrt{65}\left(\overline{X} - \mu\right) < 1.28 - \sqrt{65}\mu \mid \mu \in \mathbb{R}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(Z < 1.28 - \sqrt{65}\mu \mid \mu \in \mathbb{R}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(1.28 - \sqrt{65}\mu\right), \ \ \mu \in \mathbb{R}. \\ &= \Phi\left(\sqrt{65}\mu - 1.28\right) \end{aligned}$$

Tests entres deux hypothèses composites

La fonction puissance π étant croissante sur $\mathbb{R}$, on trouve bien le fait que

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\mu \leq 0} \pi(\mu) = \pi(0) \\ &= \Phi(-1.28) = 1 - \Phi(1.28) \\ &= 1 - 0.899 = 0.1,\end{aligned}$$

qui correspond en effet au seuil (niveau) de signification du test.

Tests entres deux hypothèses composites

Le graphe de la fonction puissance $\mu \to \pi(\mu) = \Phi\left(\sqrt{65}\mu - 1.28\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$ est donné par la figure Fig.2

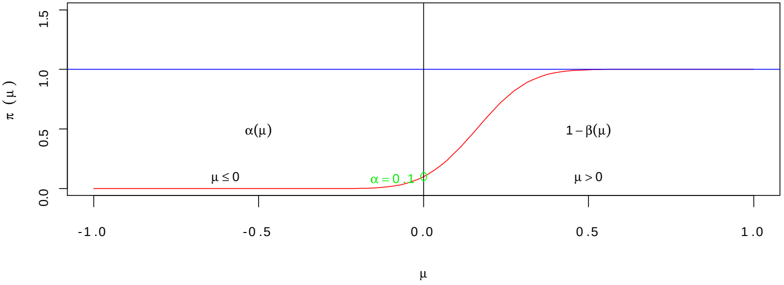


Fig.3

Hypothèse nulle bilatérale

$$\begin{cases} H_0 : & \theta \leq \theta_1 \text{ ou } \theta \geq \theta_2 \\ H_1 : & \theta_1 < \theta < \theta_2 \end{cases}$$

Soit X une population de densité:

$$f_X(x;\theta) = \exp\{a(x)\,u(\theta) + b(x) + \vartheta(\theta)\}, \tag{5}$$

telle que la fonction $u(\theta)$ est monotone.

Hypothèse nulle bilatérale

Exemple: $X \rightsquigarrow N(\mu, 1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}(x-\mu)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(x\mu - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\mu^2\right). \end{aligned}$$

Donc: $a(x) = x$, $u(\mu) = \mu$, $b(x) = -\frac{1}{2}x^2$ et $\vartheta(\mu) = -\frac{1}{2}\mu^2$. La fonction $\mu \longrightarrow u(\mu) = \mu$ est croissante (monotone).

Alors le test

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } c_1 < t < c_2 \\ p_i & \text{si } t = c_i;\ i = 1, 2 \\ 0 & \text{si } t < c_1 \text{ et } t > c_2 \end{cases}$$

est le upp pour les hypothèses ci-dessus au niveau de signification α, où $t = \sum_{i=1}^{n} a(x_i)$ et c_i et p_i vérifient les conditions

$$\mathbf{E}_{\theta_1}[\delta] = \mathbf{E}_{\theta_2}[\delta] = \alpha,$$

ce qui est equivalent à

$$\pi(\theta_1, \delta) = \pi(\theta_2, \delta) = \alpha.$$

Autrement dit

$$\mathbf{P}_{\theta_i}(T < c_1) + p_1 \mathbf{P}_{\theta_i}(T = c_1) + p_2 \mathbf{P}_{\theta_i}(T = c_2) + \mathbf{P}_{\theta_i}(T > c_2) = \alpha,\ i = 1,$$

Hypothèse nulle bilatérale

Remarque:

4) La proposition si dessus est valable pour le test de:

$$\begin{cases} H_0: & \theta < \theta_1 \text{ ou } \theta > \theta_2 \\ H_1: & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

Hypothèse nulle bilatérale

Exemple:

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 1)$. Nous avons affaire au test suivant:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \leq 1 \text{ ou } \mu \geq 2 \\ H_1 : & 1 < \mu < 2 \end{cases}$$

avec $n = 10$ et $\alpha = 0.1$.

Hypothèse nulle bilatérale

Suivant la proposition ci-dessus la statistique du test est $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$ et le test upp est

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } c_1 \leq \sum_{i=1}^{10} x_i \leq c_2 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{10} x_i < c_1 \text{ et } \sum_{i=1}^{10} x_i > c_2 \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont solutions du systèmes:

$$\pi_{\mu=1}(\delta) = 0.1 \text{ et } \pi_{\mu=2}(\delta) = 0.1.$$

En d'autres termes

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mu=1}\left(c_1 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq c_2\right) = 0.1 \\ \mathbf{P}_{\mu=2}\left(c_1 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq c_2\right) = 0.1 \end{cases}$$

En standardisant l'échantillon, on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mu=1}\left(\frac{c_1-10}{\sqrt{10}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 10}{\sqrt{10}} \leq \frac{c_2-10}{\sqrt{10}}\right) = 0.1 \\ \mathbf{P}_{\mu=2}\left(\frac{c_1-20}{\sqrt{10}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 20}{\sqrt{10}} \leq \frac{c_2-20}{\sqrt{10}}\right) = 0.1 \end{cases}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \mathbf{P}\left(\frac{c_1-10}{\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{c_2-10}{\sqrt{10}}\right) = 0.1 \\ \mathbf{P}\left(\frac{c_1-20}{\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{c_2-20}{\sqrt{10}}\right) = 0.1 \end{cases}$$

où $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Hypothèse nulle bilatérale

Autrement dit

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{c_2-10}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1-10}{\sqrt{10}}\right) = 0.1 \\ \Phi\left(\frac{c_2-20}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1-20}{\sqrt{10}}\right) = 0.1 \end{cases}$$

La solution (numérique) de ce système nous donne:

$$c_1 = 13.67, \ c_2 = 16.32.$$

Hypothèse nulle bilatérale

Ainsi le test upp est:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } 13.67 \leq \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 16.32 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{10} x_i < 13.67 \text{ et } \sum_{i=1}^{10} x_i > 16.32 \end{cases}$$

La fonction puissance du test est

$$\begin{aligned}
\pi(\mu) &= \mathbf{P}_{\mu}\left(13.67 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 16.32\right), \ \mu \in \mathbb{R} \\
&= \mathbf{P}_{\mu}\left(\frac{13.67 - 10\mu}{\sqrt{10}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 10\mu}{\sqrt{10}} \leq \frac{16.32 - 10\mu}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{13.67 - 10\mu}{\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{16.32 - 10\mu}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{16.32 - 10\mu}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{13.67 - 10\mu}{\sqrt{10}}\right), \ \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Hypothèse alternative bilatérale

Cas particulier: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. En d'autres termes nous avons affaire au test suivant:

$$\begin{cases} H_0 : & \theta = \theta_0 \\ H_1 : & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Le test upp est

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \leq c_1 \text{ ou} \sum_{i=1}^n x_i \geq c_2 \\ p_i & \sum_{i=1}^n x_i = c_i, \ i = 1, 2, \\ 0 & \text{si } c_1 < \sum_{i=1}^n x_i < c_2. \end{cases}$$

Hypothèse alternative bilatérale

Dans ce cas, la fonction puissance $\pi(\theta)$ est minimale en θ_0. Les constantes c_i et p_i vérifient donc $\pi'(\theta_0) = 0$ en plus de la condition $\mathbf{E}_{\theta_0}[\delta] = \alpha$. Par conséquent, les constantes c_i et p_i se déterminent à partir de:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\theta_0}(T < c_1) + p_1 \mathbf{P}_{\theta_0}(T = c_1) + p_2 \mathbf{P}_{\theta_0}(T = c_2) + \mathbf{P}_{\theta_0}(T > c_2) = \alpha \\ \pi'(\theta_0) = \left. \dfrac{d}{d\theta} \pi(\theta) \right|_{\theta = \theta_0} = 0 \end{cases}$$

Exemple:
Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 1)$. Nous avons affaire au test suivant:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = 0 \\ H_1 : & \mu \neq 0 \end{cases}$$

avec $n = 9$ et $\alpha = 0.05$. Le test upp est

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{9} x_i \leq c_1 \text{ ou } \sum_{i=1}^{9} x_i \geq c_2 \\ 0 & \text{si } c_1 < \sum_{i=1}^{9} x_i < c_2 \end{cases}$$

En d'autres termes

$$\delta = \delta\left(x_1, ..., x_n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \leq k_1 \text{ ou } \overline{x} \geq k_2 \\ 0 & \text{si } k_1 < \overline{x} < k_2 \end{cases}$$

où $k_i := c_i/9$, $i = 1, 2$.

Hypothèse alternative bilatérale

Nous avons

$$\begin{aligned}\pi(\mu;\delta) &= \mathbf{E}_\mu[\delta] = \mathbf{P}_\mu\left(\overline{X} \leq k_1 \text{ ou } \overline{X} \geq k_2\right)\\ &= \mathbf{P}_\mu\left(\overline{X} \leq k_1\right) + \mathbf{P}_\mu\left(\overline{X} \geq k_2\right)\\ &= \mathbf{P}_\mu\left(3\left(\overline{X}-\mu\right) \leq 3(k_1-\mu)\right) + \mathbf{P}_\mu\left(3\left(\overline{X}-\mu\right) \geq (k_2-\mu)\right)\\ &= \Phi(3(k_1-\mu)) + 1 - \Phi(3(k_2-\mu)).\end{aligned}$$

En passant à la dérivée par rapport à μ, on trouve

$$\pi'(\mu;\delta) = -3\varphi(3k_1-3\mu) + 3\varphi(3k_2-3\mu), \text{ avec } \varphi = \Phi',$$

d'où $\pi'(0;\delta) = 3\left[\varphi(3k_2) - \varphi(3k_1)\right]$.

Hypothèse alternative bilatérale

En d'autres termes

$$\pi'(\mu;\delta) = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left\{-\frac{9k_2^2}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{9k_1^2}{2}\right\}\right].$$

Donc le fait que $\pi'(\mu;\delta) = 0 \Longleftrightarrow k_2^2 = k_1^2 \Longleftrightarrow k_2 = -k_1$, car $k_2 \neq k_1$. D'autres part

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mu=0}[\delta] = 0.05 &\Longleftrightarrow \Phi(3k_1) + 1 - \Phi(3k_2) = 0.05 \\ &\Longleftrightarrow 2\Phi(3k_1) = 0.05 \Longleftrightarrow \Phi(3k_1) = 0.025.\end{aligned}$$

De la table statistique on trouve $3k_1 = -1.96$, d'où $k_1 = -0.65$ et $k_2 = 0.65$. Le test δ upp est donc

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \leq -0.65 \text{ ou } \overline{x} \geq 0.65 \\ 0 & \quad \text{si } -0.65 < \overline{x} < 0.65. \end{cases}$$

Test du rapport de vraisemblance maximal

Ce test est utile surtout là où les méthodes précédentes sont échoué. Il s'applique aussi le cas où le paramètre θ est vectoriel:
$\theta = (\theta_1, ..., \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.
On appelle rapport de vraisemblance maximal la quantité:

$$R = R(x_1, ..., x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(x_1, ..., x_n; \theta)}.$$

Définition. On appelle test du rapport de vraisemblance maximal de:

$$\begin{cases} H_0: & \theta \in \Theta_0 \\ H_1: & \theta \in \Theta_1, \end{cases}$$

contre au niveau de signification α, le test δ dont la région critique est:

$$W := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ R > c\}.$$

La constante c se détermine par la relation:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{P}_\theta (R(X_1, ..., X_n) > c) = \alpha.$$

Remarque.

1) Un test équivalent, de même appellation, est souvent envisagé, Il est basé sur le rapport

$$R_1 := \frac{\sup_{\theta\in\Theta} L\left(x_1, ..., x_n; \theta\right)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L\left(x_1, ..., x_n; \theta\right)} = \frac{L\left(x_1, ..., x_n; \widehat{\theta}_{emv}\right)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L\left(x_1, ..., x_n; \theta\right)},$$

où $\widehat{\theta}_{emv}$ désigne l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) de θ dans Θ.

Test du rapport de vraisemblances maximal

Il est bien clair que

$$L\left(x_1,...,x_n;\widehat{\theta}\right)=\max\left\{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right),\sup_{\theta\in\Theta_1}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)\right\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sup_{\theta\in\Theta}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)} \\ &= \frac{\max\left\{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right),\sup_{\theta\in\Theta_1}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)\right\}}{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)} \\ &= \max\left\{\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)},\frac{\sup_{\theta\in\Theta_1}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(x_1,...,x_n;\theta\right)}\right\}. \end{aligned}$$

Parconséquent

$$R_1=\max\left\{1,R\right\}.$$

Exemple 11: Test de la moyenne d'une population normale de variance inconnue
Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, ici $\theta = \left(\mu, \sigma^2\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* =: \Theta$.

1) Test bilatéral:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Test du rapport de vraisemblance maximal

Dans ce cas: $\Theta := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+}^{*}$,

$$\Theta_0 := \left\{ \left(\mu, \sigma^2 \right) : \ \mu = \mu_0 \right\} \text{ et } \Theta_1 := \left\{ \left(\mu, \sigma^2 \right) : \ \mu \neq \mu_0 \right\}$$

La fonction de vraisemblance est

$$L(\theta) := L(X_1, ..., X_n, \theta) = \left(2\pi\sigma^2 \right)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \right\}.$$

Test du rapport de vraisemblance maximal

Nous avons

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) = L\left(\widehat{\theta}\right),$$

où

$$\widehat{\theta} = \left(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2\right) = \left(\overline{X}, \widetilde{S}^2\right)$$

est le EMV de θ dans Θ, où

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \widetilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

On peut vérifier facilement que

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta) = L\left(\widehat{\theta}_0\right),$$

où $\widehat{\theta}_0 = \left(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2\right)$ est l' EMV dans Θ_0, avec $\widehat{\sigma}_0^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$. Ainsi le rapport de vraisemblance maximal est

$$R_1(X_1, ..., X_n) = \frac{L\left(\widehat{\theta}\right)}{L\left(\widehat{\theta}_0\right)} = \frac{L\left(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2\right)}{L\left(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2\right)}.$$

Il est claire que

$$\frac{L\left(\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2\right)}{L\left(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\widehat{\sigma}^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\widehat{\sigma}}\right)^2\right)}{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\widehat{\sigma}_0^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\widehat{\sigma}_0}\right)^2\right)}$$

$$= \left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\widehat{\sigma}}\right)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\widehat{\sigma}_0}\right)^2\right)},$$

Test du rapport de vraisemblance maximal

qui égale à

$$\left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2}\frac{\exp\left(-\frac{n}{2\widehat{\sigma}^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)}{\exp\left(-\frac{n}{2\widehat{\sigma}_0^2}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_0\right)^2\right)}$$

$$=\left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2}\frac{\exp\left(-\frac{n}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{n}{2}\right)}=\left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2}.$$

Finalement le rapport de vraisemblance est

$$R_1\left(X_1,...,X_n\right)=\left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2}.$$

Le test rejette H_0 pour les plus grandes valeurs de R_1, c'est à dire

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : R_1 (x_1, ..., x_n) > k \right\},$$

où k est telle que

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Xi_0} \mathbf{P} \left(R_1 \left(X_1, ..., X_n \right) \geq k \right) = \alpha.$$

Dans la suite nous allons déterminer la loi de la statistique du test $R_1 = \left(\widehat{\sigma}_0^2 / \widehat{\sigma}^2 \right)^{n/2}$.

On peut vérifier facilement que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - a\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \left(\overline{X} - a\right)^2.$$

Donc

$$\widehat{\sigma}_0^2 = \widehat{\sigma}^2 + \left(\overline{X} - \mu_0\right)^2. \tag{6}$$

Ceci implique que

$$\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} = 1 + \frac{\left(\overline{X} - \mu_0\right)^2}{\widehat{\sigma}^2} = 1 + \frac{\left(\overline{X} - \mu_0\right)^2}{\widetilde{S}^2}.$$

Si on pose

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\widetilde{S}/\sqrt{n-1}},$$

on obtient

$$\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2} = 1 + \frac{T^2}{n-1}. \tag{7}$$

Test du rapport de vraisemblance maximal

La région critique est

$$W=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : R_1\left(x_1,...,x_n\right)>k\right\},$$

ce qui equivalent à

$$W=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : \left|T\left(x_1,...,x_n\right)\right|>c\right\}.$$

La constante c doit être obtenue par la relation

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Xi_0}\mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\left|T\right|\geq c\right)=\alpha.$$

On note que la variable aléatoire T est une Student à $(n-1)$ degré de liberté:

$$T := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\widetilde{S}/\sqrt{n-1}} \rightsquigarrow t_{n-1}.$$

La v.a est T est standardisée, et que et sa la loi est bien déterminée et ne dépend plus de Θ_0, donc le supremum n'as plus de rôle à jouer en fin. Ainsi

$$\mathbf{P}\left(|T| > c\right) = \alpha,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbf{P}\left(T < -c\right) + \mathbf{P}\left(T > c\right) = \alpha.$$

Puisque la distribution de T est symétrique alors

$$\mathbf{P}\left(T < -c\right) = \mathbf{P}\left(T > c\right).$$

D'où c est telle que

$$\mathbf{P}\left(T > c\right) = \alpha/2.$$

La valeur critique c est donc le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de t_{n-1} (Student à $n-1$ degré de liberté) qu'on le note par $t_{1-\alpha/2}$. En conclusion, la région critique du test est

$$W := \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widetilde{s}/\sqrt{n-1}} \right| > t_{1-\alpha/2} \right\}.$$

Application numérique:

On désigne par X la longueur (en mm) de fibres métalliques produites par une certaine unité industrielle, et on suppose que X est de distribution normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 5.2$ contre $H_0 : \mu \neq 5.2$ au niveau de signification $\alpha = 0.05$. Pour cela on observe 15 fibres et on obtient une moyenne empirique $\overline{x} = 5.4$ et une variance empirique $\widetilde{s}^2 = 0.17$.

Solution:

De la table statistique des quantiles de la loi de Student on trouve

$$t_{1-\alpha/2} = t_{1-\frac{0.05}{2}} = t_{0.975} = 2.145.$$

D'autre part on a

$$\frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\widetilde{s}/\sqrt{n-1}} = \frac{|5.4 - 5.2|}{\sqrt{0.17}/\sqrt{15-1}} = 1.815.$$

Comme $1.815 < 2.145$ on ne peut pas rejeter H_0 (on la garde).

2) **Test unilatéral:**

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Dans ce cas $\Theta_0 = \left\{ \left(\mu, \sigma^2 \right) \mid \mu \leq \mu_0 \right\}$, $\Theta_1 = \left\{ \left(\mu, \sigma^2 \right) \mid \mu > \mu_0 \right\}$ et $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$. La région critique

$$W := \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widetilde{s} / \sqrt{n-1}} > t_{1-\alpha} \right\},$$

où $t_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha)$ de t_{n-1} (Student à $n-1$ degré de liberté).

En effet, nous avons

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_i} L\left(X_1,...,X_n;\mu,\sigma^2\right) = L\left(X_1,...,X_n;\widehat{\mu}_i,\widehat{\sigma}_i^2\right),\ i=0,1,$$

où $\left(\widehat{\mu}_i,\widehat{\sigma}_i^2\right)$ est le EMV dans H_i, $i=0,1$. Le rapport de vraisemblance maximal est donc

$$R = R\left(X_1,...,X_n\right) = \frac{L\left(X_1,...,X_n;\widehat{\mu}_1,\widehat{\sigma}_1^2\right)}{L\left(X_1,...,X_n;\widehat{\mu}_0,\widehat{\sigma}_0^2\right)}.$$

On sait que la fonction de vraisemblance $\left(\mu, \sigma^2\right) \rightarrow L\left(X_1, ..., X_n; \mu, \sigma^2\right)$ atteint sont maximum global, i.e. $\left(\mu, \sigma^2\right) \in \Theta$, en

$$\widehat{\mu} = \overline{X} \text{ et } \widehat{\sigma}^2 = \widetilde{S}^2.$$

Nous distinguons ici deux cas:

$$\mu_0 \leq \overline{X} \text{ et } \mu_0 \geq \overline{X}.$$

1) Pour le cas $\mu_0 \leq \overline{X}$, (voir Fig. 6):

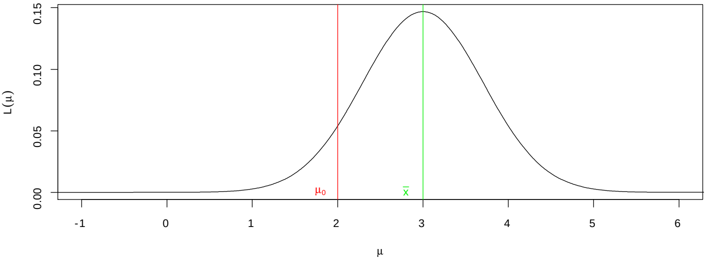


Fig.6

Nous avons

$$\sup_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2} L\left(X_1, ..., X_n; \mu, \sigma^2\right) = L\left(X_1, ..., X_n; \widehat{\mu}_0, \widehat{\sigma}_0^2\right),$$

où

$$\widehat{\mu}_0 = \mu_0 \text{ et } \widehat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu_0\right)^2.$$

Tandis que

$$\sup_{\mu > \mu_0} L\left(X_1, ..., X_n; \mu, \sigma^2\right) = L\left(X_1, ..., X_n; \widehat{\mu}_1, \widehat{\sigma}_1^2\right),$$

où

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X} \text{ et } \widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Ainsi le rapport de vraisemblance maximal est

$$R = \left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}_1^2}\right)^{n/2}.$$

On sait que la région critique du test rapport de vraisemblance maximal est de la forme

$$W = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid R(x_1, ..., x_n) > k\},$$

où k est telle que

$$\sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)} \{R(X_1, ..., X_n) \geq k\} = \alpha.$$

Il nous reste donc à déterminer la constante k qui dépend de α.

Nous avons établie à l'equation (7) ci-dessus que

$$R = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{n/2}.$$

On remarque, comme $\overline{X} \geq \mu_0$, alors

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\widetilde{S}/\sqrt{n-1}} \geq 0.$$

Le fait que $R(x_1, ..., x_n) > k$ est équivalent à

$$\left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{n/2} > k \Longleftrightarrow T^2 > k' \Longleftrightarrow T > c \text{ (car } T > 0).$$

Ainsi

$$\alpha = \sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)} \{R(X_1, ..., X_n) > k\}$$
$$= \sup_{(\mu,\sigma^2)\in\Theta_0} \mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)} (T > c) = \mathbf{P}(T > c),$$

car sans paramétrage on a $T \rightsquigarrow t_{n-1}$ (Student à $n-1$ degré de liberté), ainsi $k = t_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de t_{n-1}.

Notre région critique est alors

$$W := \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widetilde{s} / \sqrt{n-1}} > t_{1-\alpha} \right\}.$$

2) Considérons maintenant le cas $\mu_0 \geq \overline{X}$, (voir Fig. 7):

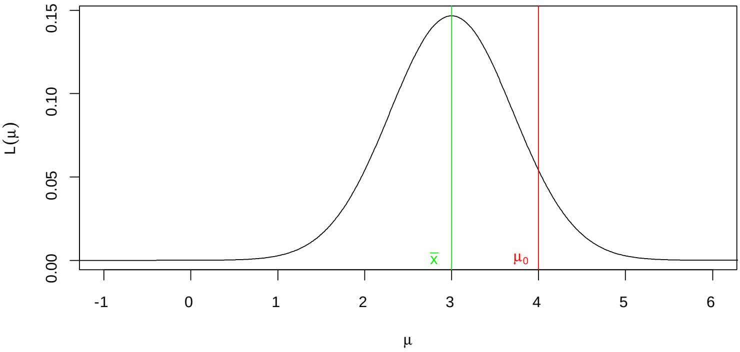


Fig. 7

Test du rapport de vraisemblance maximal

Dans cette situation nous avons

$$\sup_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2} L\left(X_1, ..., X_n; \mu, \sigma^2\right) = L\left(X_1, ..., X_n; \widehat{\mu}_0, \widehat{\sigma}_0^2\right),$$

où

$$\widehat{\mu}_0 = \overline{X} \text{ et } \widehat{\sigma}_0^2 = \widetilde{S}^2.$$

Tandis que

$$\sup_{\mu>\mu_0,\sigma^2} L\left(X_1,...,X_n;\mu,\sigma^2\right)=L\left(X_1,...,X_n;\widehat{\mu}_1,\widehat{\sigma}_1^2\right),$$

où

$$\widehat{\mu}_1=\mu_0 \text{ et } \widehat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_0\right)^2.$$

Test du rapport de vraisemblance maximal

Comme $\overline{X} \leq \mu_0$, donc

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\widetilde{S}^2 / \sqrt{n-1}} \leq 0.$$

La méthode utilisée pour avoir l'équation (**??**) , nous mène aussi à obtenir l'équation suivante:

$$1/R = \left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{n/2}.$$

Test du rapport des vraisemblances maximale

Donc le fait que

$$R(x_1, ..., x_n) > k \Longleftrightarrow 1/R(x_1, ..., x_n) < 1/k.$$

Ceci est équivalent à

$$\left(1 + \frac{T^2}{n-1}\right)^{n/2} < 1/k \Longleftrightarrow T^2 < k^{'} \Longleftrightarrow T > c \text{ (car } T < 0),$$

et ceci nous conduit au même résultat que celui du premier cas: $\mu_0 \leq \overline{X}$.

Application: On reprend l'application numérique de l'exemple précédent pour tester:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \leq 5.2 \\ H_1 : & \mu > 5.2 \end{cases}$$

De la table de Student on obtient $t_{1-0.05} \equiv t_{0.95} = 1.761$. D'où l'hypothèse H_0 est à rejeter (car $1.815 > 1.761$).

Remarque:

1) La région critique du test des hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

et

$$W := \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{\overline{x} - \mu_0}{\widetilde{s} / \sqrt{n-1}} < t_\alpha \right\}.$$

2) La fonction puissance de ces tests est basée sur la distribution de Student non centrée.

Test de la variance d'une population $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$:

-**Le cas bilatéral**: Soit à tester

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 \neq \sigma_0^2. \end{cases}$$

Test de la variance d'une population $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$:

-**Le cas bilatéral**: Soit à tester

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 \neq \sigma_0^2. \end{cases}$$

Nous traitons deux cas: μ connue et μ inconnue. Le rapport de vraisemblance maximale est

$$R = \frac{\sup\limits_{(\mu,\sigma^2):\sigma^2\neq\sigma_0^2} L\left(x_1,...,x_n;\sigma^2\right)}{\sup\limits_{(\mu,\sigma^2):\sigma^2=\sigma_0^2} L\left(x_1,...,x_n;\sigma^2\right)} = \frac{\sup\limits_{\sigma^2\neq\sigma_0^2} L\left(x_1,...,x_n;\mu,\sigma^2\right)}{L\left(x_1,...,x_n;\mu,\sigma_0^2\right)}.$$

a) μ connue: Dans ce cas nous avons

$$R = \frac{L\left(x_1, \ldots, x_n; \mu, \widehat{\sigma}^2\right)}{L\left(x_1, \ldots, x_n; \mu, \sigma_0^2\right)},$$

où $\widehat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\mu - x_i\right)^2$ est l'EMV de σ^2. Explicitement le rapport R se simplifie en

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2} \frac{\exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\widehat{\sigma}}\right)^2}{\exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{\sigma_0}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\widehat{\sigma}^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mu\right)^2.$$

Test du rapport de vraisemblances maximal

Comme $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = n\widehat{\sigma}^2$, alors

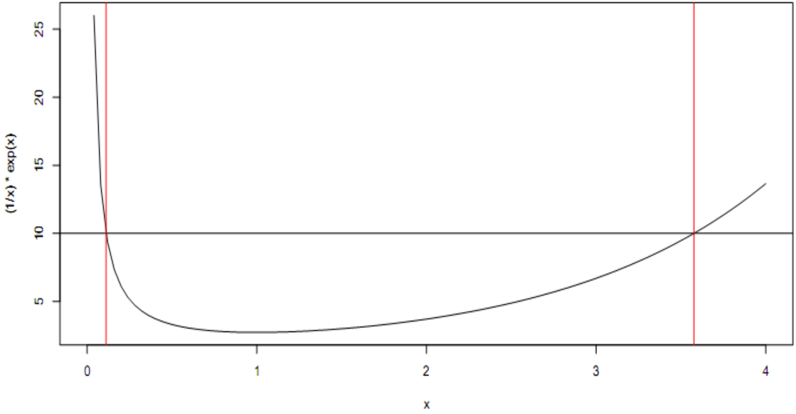
$$R = \left(\frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2} \exp\frac{n}{2}\left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}-1\right)$$
$$= \left[\frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\exp\left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}-1\right)\right]^{n/2}.$$

Le région critique est

$$W = \left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \left[\frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\exp\left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}-1\right)\right]^{n/2} \geq c'\right\}$$
$$= \left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \frac{\sigma_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\exp\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq c\right\}.$$

Test du rapport de vraisemblances maximal

Posons $x = \widehat{\sigma}^2 / \sigma_0^2$ et $g(x) := x^{-1} \exp x$.La fonction g décroit sur $0 < x < 1$ puis elle croit sur $x > 1$ et elle atteint son minimum en $x = 1$ dans $x > 0$.



On rappel que sous H_1 on a $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, en d'autres termes $x > 1$ ou $x < 1$. En vertu de a continuité et la monotonie (la bijection) de la fonction g sur chaque intervalle, on peu dire que $g(x) \geq c$ est équivalent à l'existence de deux constantes $0 < \rho_1 < 1$ et $\rho_2 > 1$, telle que $x \leq \rho_1$ ou $x \geq \rho_2$. Ainsi la région critique est

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq \rho_1 \text{ ou } \frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq \rho_2 \right\}.$$

Test du rapport de vraisemblances maximal

Par commodité on note $V^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, $v^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$, et $k_i / n = \rho_i$. Donc

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{nv^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \text{ ou } \frac{nv^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right\},$$

où k_1 et k_2 sont des solutions de l'équation

$$\mathbf{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\frac{nV^2}{\sigma_0^2} \leq k_1 \text{ ou } \frac{nV^2}{\sigma_0^2} \geq k_2 \right) = \alpha.$$

Test du rapport de vraisemblances maximal

En d'autres ternes

$$\mathbf{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\frac{nV^2}{\sigma_0^2}\leq k_1\right)+\mathbf{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\frac{nV^2}{\sigma_0^2}\geq k_2\right)=\alpha.$$

Comme solution de cette équation, on prend

$$\mathbf{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\frac{nV^2}{\sigma_0^2}\leq k_1\right)=\mathbf{P}_{\sigma^2=\sigma_0^2}\left(\frac{nV^2}{\sigma_0^2}\geq k_2\right)=\alpha/2.$$

Rappelons que $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\rightsquigarrow\chi_n^2$ c'est à dire $nV^2/\sigma_0^2\rightsquigarrow\chi_n^2$, ainsi

$$\mathbf{P}\left(\chi_n^2\leq k_1\right)=\mathbf{P}\left(\chi_n^2\geq k_2\right)=\alpha/2.$$

b) μ inconnue: en utilisant les arguments précédents, nous montrons aussi que la statistique de test (ou la variable de décision) dans ce cas est:

$$\frac{n\widetilde{S}^2}{\sigma_0^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1},$$

où $\widetilde{S}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$. La région critique est donc

$$W = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid n\widetilde{s}^2/\sigma_0^2 \leq \ell_1 \text{ ou } n\widetilde{s}^2/\sigma_0^2 \geq \ell_2\right\},$$

où $\widetilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$, et ℓ_i, $i = 1, 2$ sont deux constantes telles que

$$\mathbf{P}\left(\chi^2_{n-1} \leq \ell_1\right) = \mathbf{P}\left(\chi^2_{n-1} \geq \ell_2\right) = \alpha/2.$$

- **Le cas unilatéral à droite** : Soit à tester

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 > \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique est

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{cc} v^2 \geq k\sigma_0^2 / n & \text{si } \mu \text{ est connue} \\ \widetilde{s}^2 \geq \ell\sigma_0^2 / n & \text{si } \mu \text{ est inconnue} \end{array} \right\}.$$

où k et ℓ sont deux constantes telles que

$$\mathbf{P}\left(\chi_n^2 \geq k\right) = \mathbf{P}\left(\chi_{n-1}^2 \geq \ell\right) = \alpha.$$

Test du rapport de vraisemblances maximal

- **Le cas unilatéral à gauche** : Soit à tester

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

La région critique est

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{cc} v^2 \leq k\sigma_0^2/n & \text{si } \mu \text{ est connue} \\ \widetilde{s}^2 \leq \ell\sigma_0^2/n & \text{si } \mu \text{ est inconnue} \end{array} \right\},$$

où k et ℓ sont deux constantes telles que

$$\mathbf{P}\left(\chi_n^2 \leq k\right) = \mathbf{P}\left(\chi_{n-1}^2 \leq \ell\right) = \alpha.$$

Remarque: Les deux tests

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_0: & \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2. \end{cases}$$

se traitent de la même manière. Idem, les deux tests

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_0: & \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: & \sigma^2 < \sigma_0^2. \end{cases}$$

se traitent aussi de la même façon.

Test de confirmité ou de comparaison

Ces tests se transforment en test de conformité par changement de variables.

Deux échantillons de tailles n_1 et n_2 sont extraits, indépendamment l'une de l'autre, de deux populations $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$. Les deux échantillons sont notés

$$\left(X_1^{(1)}, ..., X_1^{(n_1)}\right) \text{ et } \left(X_2^{(1)}, ..., X_2^{(n_2)}\right)$$

4.1 **Tests d'égalité de deux moyennes de populations normales:**

a) **Hypothèse alternative bilatérale (**Cas où σ_1^2 et σ_2^2 sont connues)

$$\begin{cases} H_0 : & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : & \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

Test de conformité ou de comparaison

En utilisant aussi, le principe du rapport de vraisemblance maximale, on montre aussi que la statistique de test utilisée est

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \ \text{(sous } H_0\text{)}, \tag{8}$$

où $\overline{X}_j = n_j^{-1} \sum_{i=1}^{n_j} X_j^{(i)}$, $j = 1, 2$. La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \geq z_{1-\alpha/2} \right\},$$

où $z_{1-\alpha/2}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est à dire $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.

b) **Hypothèse alternative unilatérale à gauche (**Cas où σ_1^2 et σ_2^2 sont connues)

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 < \mu_2. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0: & \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 < \mu_2. \end{cases}$$

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \leq z_\alpha \right\},$$

où z_α (la valeur critique) est le quantile d'ordre α de $\mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$.

c) **Hypothèse alternative unilatérale à droite (**Cas où σ_1^2 et σ_2^2 sont connues)

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 > \mu_2. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0: & \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 > \mu_2. \end{cases}$$

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \geq z_{1-\alpha} \right\},$$

où $z_{1-\alpha}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de $\mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$.

a) **Hypothèse alternative bilatérale (**Cas où $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ sont inconnues)

$$\begin{cases} H_0 : & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : & \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

L'évident est de remplacer, dans la statistique (8) , les variances σ_j^2 par leurs estimateurs $\widetilde{S}_j^2$, pour avoir

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\widetilde{S}_1^2}{n_1} + \frac{\widetilde{S}_2^2}{n_2}}}.$$

Test de conformité ou de comparaison

Comme la loi de cette statistique n'as pas une forme analytique bien déterminée, car $\widetilde{S}_1^2/n_1 + \widetilde{S}_2^2/n_2$ ne peux être une v.a de qui-deux que si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. En effet supposons que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, alors

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0,1\right).$$

D'être autre coté, on peu vérifier facilement que

$$\widetilde{S}^2 = \frac{n_1\widetilde{S}_1^2 + n_2\widetilde{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

est un estimateur sans biais de σ^2, où $\widetilde{S}_j^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_j^{(i)} - \overline{X}_j\right)^2$, $j = 1, 2$.

En effet,

$$\mathbf{E}\left[\widetilde{S}^2\right] = \mathbf{E}\left[\frac{n_1\widetilde{S}_1^2 + n_2\widetilde{S}_2^2}{n_1+n_2-2}\right] = \frac{n_1\mathbf{E}\left[\widetilde{S}_1^2\right] + n_2\mathbf{E}\left[\widetilde{S}_2^2\right]}{n_1+n_2-2}$$

$$= \frac{n_1\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)\sigma_1^2 + n_2\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2} = \sigma^2.$$

En outre nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left(n_1+n_2-2\right)\widetilde{S}^2/\sigma^2\\
&=n_1\widetilde{S}_1^2/\sigma_1^2+n_2\widetilde{S}_2^2/\sigma_2^2\\
&=\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_1^{(i)}-\overline{X}_1\right)^2/\sigma_1^2+\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_2^{(i)}-\overline{X}_2\right)^2/\sigma_2^2\\
&=\chi^2_{n_1-1}+\chi^2_{n_2-1}=\chi^2_{n_1+n_2-2},
\end{aligned}
$$

où $\chi^2_{n_1-1}$ et $\chi^2_{n_2-1}$ sont, respectivement, deux v.a de qui-deux indépendantes à n_1-1 et n_2-1 degrés de liberté.

Rappelons que, étant donné $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Q \rightsquigarrow \chi^2_m$ indépendantes, alors

$$\frac{Z}{\sqrt{Q/m}} \rightsquigarrow t(m),$$

où $t(m)$ est une loi de Student à m degré de liberté. En prenant

$$Z := \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},\ \ Q := (n_1 + n_2 - 2)\frac{\widetilde{S}^2}{\sigma^2}$$

et $m := n_1 + n_2 - 2$, on obtient (après simplifications)

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\widetilde{S}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2),$$

où $t(n_1 + n_2 - 2)$ est la loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degré de liberté.

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\left| \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \right|}{\widetilde{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha/2} \right\},$$

où

$$\widetilde{s} := \sqrt{\frac{n_1 \widetilde{s}_1^2 + n_2 \widetilde{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

et $t_{1-\alpha/2}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$.

b) **Hypothèse alternative unilatérale à droite (**cas où σ_1^2 et σ_2^2 inconnues mais sont égales)

$$\begin{cases} H_0 : & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : & \mu_1 > \mu_2. \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} H_0 : & \mu_1 < \mu_2 \\ H_1 : & \mu_1 > \mu_2. \end{cases}$$

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\widetilde{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha} \right\},$$

où $t_{1-\alpha}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de $t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$.

c) **Hypothèse alternative unilatérale à gauche (**cas où σ_1^2 et σ_2^2 inconnues mais sont égales)

$$\begin{cases} H_0 : & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : & \mu_1 < \mu_2. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : & \mu_1 > \mu_2 \\ H_1 : & \mu_1 < \mu_2. \end{cases}$$

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\widetilde{s}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq t_\alpha \right\}, \tag{9}$$

où t_α (la valeur critique) est le quantile d'ordre α de $t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$.

Test de Welch (cas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$). Si n_1 et n_2 sont supérieurs à 20, la région critique (9) reste encore approximativement valable. Pour les petites échantillons, ceci devient un problème délicat. En effet, comme les variances ne sont pas égales, on ne peut pas effectuer une modification pour avoir une variable de Student. Pour résoudre ce problème, Welch (1947) a obtenu une approximation de la loi de cette statistique par la loi de Student à ν degré de liberté où

$$\nu := \frac{\left(\widetilde{s}_1^2 / n_1 + \widetilde{s}_2^2 / n_2\right)^2}{\widetilde{s}_1^4 / \left(n_1^2 \left(n_1 - 1\right)\right) + \widetilde{s}_2^4 / \left(n_2^2 \left(n_2 - 1\right)\right)}. \tag{10}$$

Plus précisément, la statistique de test utilisée est

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\widetilde{S}_1^2 / n_1 + \widetilde{S}_2^2 / n_2}} \simeq t(\nu),$$

où $t(\nu)$ est la loi de Student à ν degré de liberté. On note qu'en vertu de l'équation (10), on montre que

$$\min(n_1, n_2) - 1 \leq \nu \leq n_1 + n_2 - 2. \tag{11}$$

La région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{\widetilde{s}_1^2 / n_1 + \widetilde{s}_2^2 / n_2}} \geq t_{1-\alpha/2}(\nu) \right\},$$

où $t_{1-\alpha/2}(\nu)$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $t(\nu)$.

Il est évident que la valeur de ν calculée, dans (10) , n'est pas nécessairement un entier naturel. Dans ce cas, on effectue une interpolation linéaire afin de calculer la valeur critique associée $t_{1-\alpha/2}(\nu)$. Rappelons que l'interpolation linéaire d'une fonction f au point $x \in [a, b]$ est donnée par:

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

En prenant $f = t_{1-\alpha/2}$, $x = \nu$, $a = \lfloor \nu \rfloor$, et $b = \lceil \nu \rceil$, on écrit:

$$t_{1-\alpha/2}(\nu) \simeq t_{1-\alpha/2}(\lfloor \nu \rfloor) + (\nu - \lfloor \nu \rfloor)\frac{t_{1-\alpha/2}(\lceil \nu \rceil) - t_{1-\alpha/2}(\lfloor \nu \rfloor)}{\lceil \nu \rceil - \lfloor \nu \rfloor},$$

où $\lfloor \nu \rfloor$ et $\lceil \nu \rceil$ désignent la partie inférieure et la partie supérieure de ν respectivement.

Application: Prenons le test

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 \neq \mu_2, \end{cases}$$

avec $\alpha = 0.05$, $(n_1 = 34, \overline{x}_1 = 8.103, \widetilde{s}_1 = 0.507)$ et $(n_2 = 25, \overline{x}_2 = 8.503, \widetilde{s}_2 = 0.816)$.

En remplaçant dans la formule (10) on obtient

$$\nu = \frac{\left((0.507)^2 / 34 + (0.816)^2 / 25\right)^2}{(0.507)^4 / \left(34^2 (34-1)\right) + (0.816)^4 / \left(25^2 (25-1)\right)} = 37.369.$$

Il est clair que les deux inégalités (11) sont vérifiées. On effet

$$24 = (25-1) \leq 37.369 \leq 34 + 25 - 2 = 57.$$

Nous avons $\lfloor \nu \rfloor = 37$, $\lceil \nu \rceil = 38$, et en utilisant le langage R on obtient

$$t_{0.975}(37) = 2.026 \text{ et } t_{0.975}(38) = 2.024.$$

Ainsi

$$t_{0.975}\,(37.369) = \frac{37.369 - 37}{38 - 37}\,(2.024 - 2.026) + 2.026$$
$$= 2.025.$$

La région critique est donc

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(34)}; x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(25)} \right) \in \mathbb{R}_+^{59} \mid \frac{\left| \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \right|}{\sqrt{\widetilde{s}_1^2 / 34 + \widetilde{s}_2^2 / 25}} \geq 2.025 \right\}.$$

La valeur observée de la statistique de test est

$$\frac{\left|\overline{x}_{1,obs}-\overline{x}_{2,obs}\right|}{\sqrt{\widetilde{s}_1^2/34+\widetilde{s}_2^2/25}}=\frac{|8.103-8.503|}{\sqrt{0.507^2/34+0.816^2/25}}=2.163>2.025.$$

Donc on rejette H_0 pour accepter $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

La valeur observée de la statistique de test est

$$\frac{\left|\overline{x}_{1,obs}-\overline{x}_{2,obs}\right|}{\sqrt{\widetilde{s}_1^2/34+\widetilde{s}_2^2/25}}=\frac{\left|8.103-8.503\right|}{\sqrt{0.507^2/34+0.816^2/25}}=2.163>2.025.$$

Donc on rejette H_0 pour accepter $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2. \end{cases}$$

La statistique de test (variable de décision) à utiliser est:

$$\frac{\frac{n_1 \widetilde{S}_1^2 / \sigma_1^2}{n_1 - 1}}{\frac{n_2 \widetilde{S}_2^2 / \sigma_2^2}{n_2 - 1}} \rightsquigarrow F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right), \quad \left(\text{sous } H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right), \tag{12}$$

où $F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ désigne la loi de Fisher à $\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ degrés de liberté.

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

A un seuil de signification α, la region critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(n_1)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(n_2)} \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \geq \frac{n_2 (n_1 - 1)}{n_1 (n_2 - 1)} c_1 \text{ ou } \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \leq \frac{n_2 (n_1 - 1)}{n_1 (n_2 - 1)} c_2 \right.$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes telles que

$$\mathbf{P}\left(F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right) \geq c_1\right) = \mathbf{P}\left(F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right) \leq c_2\right) = \alpha/2.$$

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

Exemple. On veut comparer les dispersions des dépenses hebdomadaires des étudiants de deux Universités A et B a un niveau de signification de 5%. Pour cela il sélectionne deux échantillons aléatoires de 20 et 30 étudiants respectivement et obtient les réponses suivantes:

A	120, 150, 180, 200, 130, 150, 170, 160, 190, 100, 125, 145, 175, 200, 120, 130, 135, 165, 150, 180
B	115, 118, 135, 185, 195, 170, 155, 180, 191, 200 100, 98, 105, 135, 145, 155, 118, 120, 112, 130 118, 125, 135, 155, 165, 156, 187, 198, 127, 130

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

Note test est de la forme

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1: & \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2. \end{cases}$$

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

Tout d'abord on doit vérifier la normalité de deux échantillons. Pour cela on va utiliser **le test de normalité de Shapiro&Wilk** (Shapiro and Wilk, 1964) à l'aide du logiciel R:

```
A<-c(120,150,180,200,130,150,170,160,190,100,125,145,
175,200,120,130,135,165,150,180)
```

```
B<-c(115,118,135,185,195,170,155,180,191,200,100,
98,105,135,145,155,118,120,112,130,118,125,135,
155,165,156,187,198,127,130)
```

```
shapiro.test(A)
shapiro.test(B)
```

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

Après l'excusions, voici les résultats obtenus

```
Shapiro-Wilk normality test
data:  A
W = 0.96807, p-value = 0.7138
et
Shapiro-Wilk normality test
data:  B
W = 0.93314, p-value=0.05952
```

Pour les deux cas la p-valeur est supérieure à 0.05, donc on accepte la normalité des deux échantillons.

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

La région critique de ce test est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(20)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(30)} \right) \in \mathbb{R}_+^{50} \mid \right.$$
$$\left. \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \geq \frac{30\,(20-1)}{20\,(30-1)} c_1 \text{ ou } \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \leq \frac{30\,(20-1)}{20\,(30-1)} c_2 \right\}.$$

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

En d'autres termes

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(20)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(30)} \right) \in \mathbb{R}_+^{50} \mid \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \geq 0.982\, c_1 \text{ ou } \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \leq 0.982\, c_2 \right\},$$

où

$$\mathbf{P}\left(F\left(19, 29\right) \geq c_1\right) = \mathbf{P}\left(F\left(19, 29\right) \leq c_2\right) = 0.05/2 = 0.025.$$

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

En utilisant le logiciel R on écrit:

```
##### le quantile d'ordre 0.975 de Fisher à (19,29) degŕe de liberté

c1<-qf(0.975,19,29)

##### le quantile d'ordre 0.025 de Fisher à (19,29) degré deliberté

c2<-qf(0.025,19,29)
```

Test de conformité ou de comparaison des variances (les moyennes inconnues)

Après l'excusion, on obtient: $c_1 = 2.231$ et $c_2 = 0.416$, ainsi la région critique est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(20)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(30)} \right) \in \mathbb{R}_+^{50} \mid \right.$$
$$\left. \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \geq 2.190 \text{ ou } \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \leq 0.408 \right\}.$$

Les valeurs observées des variances des deux échantillons A et B sont, respectivement, $\widetilde{s}^2_{1,obs} = 772.187$ et $\widetilde{s}^2_{2,obs} = 936.630$. On remarque que le rapport

$$\frac{\widetilde{s}^2_{1,obs}}{\widetilde{s}^2_{2,obs}} = \frac{772.187}{953.0622} = 0.810\,22,$$

ni ≥ 2.190 ni ≤ 0.408, donc les deux échantillons n'appartiennent pas à la région de rejet W. Ce qui signifie que l'hypothèse qui prétende que les dispersions des dépenses hebdomadaires des étudiants de deux Universités A et B sont égales est en effet vraie.

La p-valeur (the p-value)

D'après le Lemme de Neyman-Pearson, ci-dessus. la statistique de décision (test) entre deux hypothèses simples, est basée sur le rapport de vraisemblance

$$T = T\left(X_1, ..., X_n\right) := \frac{L_1\left(X_1, .., X_n\right)}{L_0\left(X_1, .., X_n\right)} \text{ (ne dépend pas de } \theta\text{)}.$$

Pour un seuil (niveau) α fixé, la région critique est définie par $W = \left\{T \geq k_\alpha\right\}$, où k_α est telle que $\mathbf{P}_0\left(T \geq k_\alpha\right) = \alpha$.

La p-valeur (the p-value)

Etant donné une observation $(x_1, ..., x_n)$ de l'échantillon $(X_1, .., X_n)$, nous disposons donc d'une valeur observée de T, notée

$$T_{obs} := T(x_1, ..., x_n)$$

Nous allons affaire à une valeur cruciale appelée la *p-valeur* (en anglais the *p-value*) définie par la probabilité

$$p := \mathbf{P}_0 (T \geq T_{obs}).$$

Cette probabilité est fréquemment utilisée comme une règle de décision pour les tests statistiques implémentés dans les logiciels de programmations, tels que le R, Matlab, S, SAS,... Les résultats des tests statistiques sont exprimés en général par le T_{obs} et la p-valeur.

La p-valeur (the p-value)

Supposons que

$$\mathbf{P}_0\left(T \geq T_{obs}\right) < \alpha = \mathbf{P}_0\left(T \geq k\right)$$

se qui implique $T_{obs} > k$, et par conséquent $(x_1, ..., x_n) \in W$ conduisant à la rejection de l'hypothèse nulle H_0. Le cas contraire conduit évidement à garder l'hypothèse nulle H_0

La p-valeur (the p-value)

A titre d'application, considérons l'Exemple 1 ci-dessus en prenant l'échantillon de taille 9 issu d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

$$-1.64; 0.13; 0.04; 1.29; 1.83; 0.49; 1.45; -1.08; -0.23.$$

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 0$ contre l'hypothèse $H_1 : \mu = 1$, au niveau de signification $\alpha = 0.05$. La statistique de décision dans cette exemple est $T = \overline{X}$ et la région critique

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^9 : \overline{x} \geq 0.54 \right\}.$$

Le test optimal (le plus puissant) est par conséquent:

$$\delta(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} \geq 0.54 \\ 0 & \text{si } \overline{x} < 0.54 \end{cases} \tag{13}$$

La p-valeur (the p-value)

Nous avons

$$
\begin{aligned}
T_{obs} &= \frac{1}{9}\left(-1.64 + 0.13 + 0.04 + 1.29 + 1.83 + 0.49 + 1.45 - 1.08 - 0.23\right) \\
&= 0.25.
\end{aligned}
$$

La p-valeur qui correspond à cet échantillon (observé) est

$$
\begin{aligned}
p &= \mathbf{P}_0\left(T \geq 0.25\right) = \mathbf{P}\left(Z \geq 3\left(0.25\right)\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(Z \leq 0.75\right) = 1 - \Phi\left(0.75\right) = 1 - 0.77 = 0.23.
\end{aligned}
$$

Nous avons $p = 0.23 > 0.05 = \alpha$, ceci nous conduit à ne pas rejeter H_0.
En utilisant la règle du test δ donnée dans (13) en remarque que $T_{obs} = \overline{x} = 0.25 < 0.54$ donc $\delta = 0$, ce qui conduit aussi à garder H_0.

La p-valeur (the p-value)