Chapitre IV

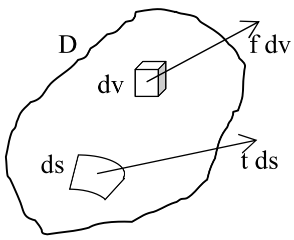
Tenseur de contraintes

IV-1 Types de forces extérieures

Soit un domaine D de volume (V) et de surface extérieure (S)

Les forces (ou efforts) extérieures appliquées au domaine se présentent sous forme de deux types :

-Les force de volume (ou volumiques) exercées sur toutes les particules de D.



Sur un volume dv la résultante est f·dv (f : [N/m^3])

-Les forces de surfaces (ou surfaciques) exercées sur les particules constituants la frontière(S) de D.

Sur une surface ds la résultante est t·ds (t : [N/m^2])

IV-2- Vecteur de contrainte

On considère un domaine élémentaire divisé en deux régions (I) et (II).

Les deux régions sont séparées par une surface (ds)

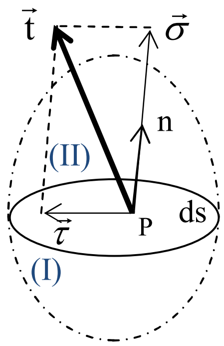
Les forces de contact de (II) sur (I) ont pour résultante : $\vec{t}$ ds

$\vec{t}$ est le vecteur contrainte en P relatif à $\vec{n}$.

$$\vec{t} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

$\vec{\sigma}$ est la projection $\vec{t}$ sur $\vec{n}$ appelée contrainte normale.

$\vec{\tau}$ est la projection $\vec{t}$ sur (ds) appelée contrainte tangentielle (ou contrainte de cisaillement)



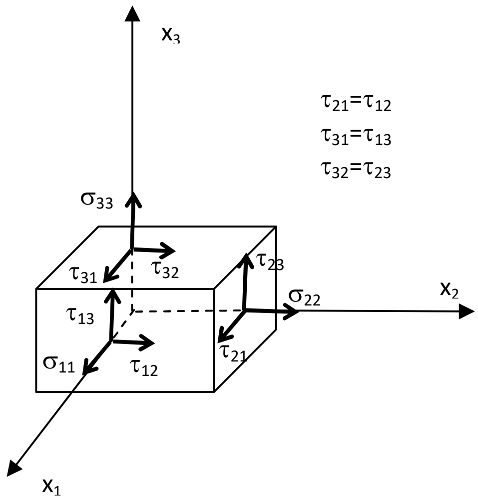
IV-3- Tenseur des contraintes

<u>Théorème de Cauchy</u> : En tout point et chaque instant, la dépendance du vecteur contrainte $\vec{t}$ par rapport à la normale $\vec{n}$ est linéaire. Il existe donc un champ tensoriel du second ordre tel que :

$\vec{t} = \Sigma\,\vec{n}$ ou $t_i = \sigma_{ij}\, n_j$

Le tenseur des contraintes est définit par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



σ_{ii} : contrainte normale

τ_{ij} : contrainte tangentielle

Ainsi le vecteur de contrainte relatif à la facette de normale $\vec{n}$ se décompose en :

Contrainte normale $\sigma = \vec{n}^{\,t}\ \Sigma\, \vec{n}$

Contrainte tangentielle $\tau = \left|(*\vec{n})\ \Sigma\ \vec{n}\right| = \sqrt{\left[\Sigma(\vec{n})\right]^2 - \sigma^2}$

IV-4- Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre expriment la nullité de la somme des forces et la somme des moments par rapport à un point.

$$\iint_s \vec{t}ds \ + \iiint_V \vec{f}dv = \vec{0}$$
$$\iint_s \overrightarrow{OP} \wedge \vec{t}ds \ + \iiint_V \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}dv = \vec{0}$$

ou :

$$\iint_s \sigma_{ij}\ n_j\ ds \ + \iiint_V f_i dv = 0$$
$$\iint_s (x_i \sigma_{jk}\ n_k - x_j \sigma_{ik}\ n_k)ds \ + \iiint_V (x_i f_j - x_j f_i)dv = 0$$

Le théorème de la divergence permet la transformation de l'intégrale double en intégrale triple :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i\right)dv = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik})}{\partial x_j} + x_i f_j - x_j f_i\right)dv = 0$$

La deuxième équation d'équilibre traduit la symétrie du tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Le tenseur des contraintes s'écrit alors : $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$

La première équation d'équilibre traduit l'équilibre local des forces : $\vec{f} + \mathrm{div}(\Sigma) = \vec{0}$

ou $f_i + \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

par projection sur les axes ces équation s'écrivent sous la forme suivante :

coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3):

$$f_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$f_2 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$f_3 + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) :

$$f_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right) + \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial x_3} = 0$$

$$f_\theta + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta}\right) + \frac{\partial \sigma_{\theta 3}}{\partial x_3} = 0$$

$$f_3 + \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \sigma_{\theta 3}}{\partial \theta} + \sigma_{r3}\right) + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

IV-5- Contraintes principales et directions principales

Dans le repère principal de base $\{X_1 , X_2 , X_3\}$ le tenseur des contraintes est diagonal et s'écrit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} il faut résoudre l'équation suivante -:

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0$$

Pour déterminer les directions principales X_1 , X_2 et X_3 il faut résoudre l'équation vectorielle :

$$(\Sigma - \sigma_i I)\,\vec{X}_i = \vec{0}$$

Les vecteurs unitaires X_1 , X_2 et X_3 de la base principale vérifient les relations vectorielles

suivantes : $\begin{cases} X_1 = X_2 \wedge X_3 \\ X_2 = X_3 \wedge X_1 \\ X_3 = X_1 \wedge X_2 \end{cases}$

Les invariants scalaires attachés au tenseur des contraintes sont :

$$s_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = tr(\Sigma)$$

$$s_2 = \sigma_I\,\sigma_{II} + \sigma_{II}\,\sigma_{III} + \sigma_I\,\sigma_{III}$$

$$s_3 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} = \det(\Sigma)$$

IV-6- Représentation géométrique de l'état de contrainte en un point (tricercle de Mohr)

Soit le plan des points (σ,τ), on cherche le domaine engendré par les points $M(\sigma,\tau)$ lorsque l'extrémité du vecteur unitaire $\vec{n}$ décrit la sphère de centre P et de rayon 1.

Les contraites principales sont notées de façon à avoir : $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Le domaine engendré par les points $M(\sigma,\tau)$ est limité par les trois cercles suivant :

cercle (1,2) :

$C_{12} = (\sigma_I + \sigma_{II})/2$

$R_{12} = (\sigma_I - \sigma_{II})/2$

cercle (1,3) :

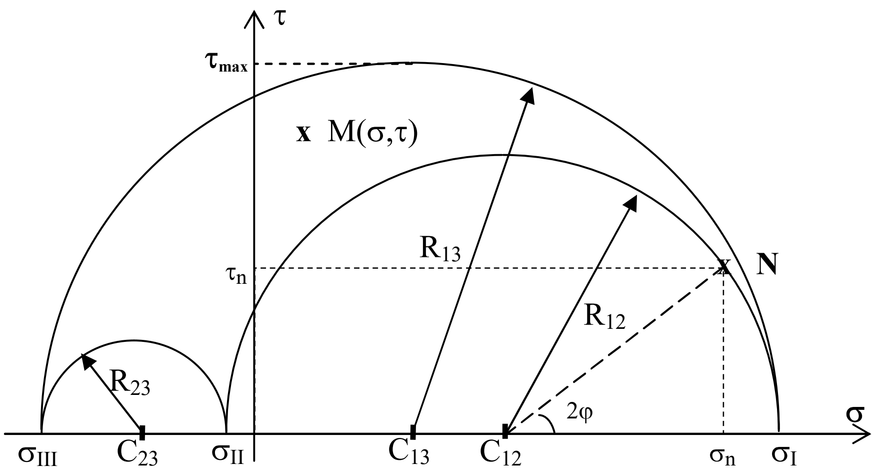
$C_{13} = (\sigma_I + \sigma_{III})/2$

$R_{13} = (\sigma_I - \sigma_{III})/2$

cercle (2,3) :

$C_{23} = (\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$

$R_{23} = (\sigma_{II} - \sigma_{III})/2$



En général pour le cercle (i,j) : le centre $(0, C_{ij})$ avec $C_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$ et $(\sigma_i > \sigma_j)$

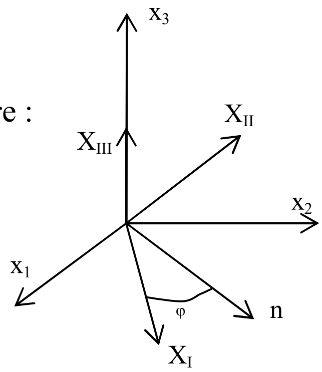
le rayon R_{ij} avec $R_{ij} = (\sigma_i - \sigma_j)/2$

<u>Cas particulier :</u>

Si le vecteur $\vec{n}$ appartient au plan (X_1 , X_2) alors l'ensemble des points $N(\sigma,\tau)$ sera le cercle de centre C_{12} et de rayon R_{12} avec comme équation :

$$[\sigma - \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})]^2 + \tau^2 = [\tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})]^2$$

En considérant $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\varphi = (n, X_1)$: angle polaire, on peut écrire :



$\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}) + \tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})\cos(2\varphi)$

$\tau_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})\sin(2\varphi)$

IV-7- Partie sphérique et partie déviatrice

Dans le repère principal :

$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_d$ avec $\Sigma_s = \dfrac{s_1}{3} I$ $(s_1 = tr(\Sigma))$: la partie sphérique de Σ

$\Sigma_d = \Sigma - \dfrac{s_1}{3} I$: la partie déviatrice de Σ

IV-8- Tension et cission octaédrale

La Tension et la cission octaédrale sont définies pour la direction

$n_o = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tel que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$; donc $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1/3$ $\Rightarrow$ $n_o = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

la tension octaédrale σ_o :

$$\sigma_o = \vec{n}_o^t \, \Sigma \, \vec{n}_o = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{1}{3} s_1$$

la cission octaédrale τ_o :

$$\tau_o = |(*\vec{n}_o) \, \Sigma \, \vec{n}_o| = \sqrt{[\Sigma(\vec{n}_o)]^2 - \sigma_o^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2}$$

IV-9- États de contrainte particuliers

État sphérique : cas où les trois contraintes principales sont égales :

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = s_1/3$$

État uniaxial de contrainte : cas où deux contraintes principales sont nulles

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_I \neq 0$$

État de cisaillement pur : cas où toutes les contraintes σ_{ij} sont nulles sauf une seule composante de cisaillement : $\sigma_{ij} = 0$ et $\tau_{12} \neq 0$

État de contrainte plane : cas où les contraintes σ_{11} ,σ_{22} et τ_{12} sont indépendantes de x_3.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \tau_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \tau_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$