Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2013/2014 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés

Travaux Dirigés (Série N° 1): $Ex.N^{\circ} 1 - Ex.N^{\circ} 5$

Rappels Mathématiques

Travaux Dirigés (Série N° 2): Ex.N° 6 – Ex.N° 9

Rappels Mathématiques

Travaux Dirigés (Série N° 2-bis) : Ex.N° 1 – Ex.N° 3

(Pour Master) Etude du mouvement du point

Travaux Dirigés (Série N° 3): $Ex.N^{\circ} 10 - Ex.N^{\circ} 12$

Etude des déformations

Travaux Dirigés (Série N° 4): $Ex.N^{\circ} 13 - Ex.N^{\circ} 14$

Etude des déformations

Travaux Dirigés (Série N° 5): $Ex.N^{\circ} 15 - Ex.N^{\circ} 16$

Etude des contraintes

Travaux Dirigés (Série N° 6): Ex.N° 17 – Ex.N° 18

Elasticité linéaire

Travaux Dirigés (Série N° 7): $Ex.N^{\circ} 19 - Ex.N^{\circ} 22$

Elastostatique - Fonction d'Airy

Travaux Dirigés (Série N° 8): Ex.N° 23 – Ex.N° 24

Torsion - Flexion

Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2018/2019 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série N° 1)

Exercice N° 1:

Soient $e_1(1,0,0)$, $e_2(0,1,0)$, $e_3(0,0,1)$ une base de R^3 ; on définie les vecteur A et B par :

 $A = 4 e_1 + 2 e_2 + e_3$ $B = 3 e_1 - 5 e_2 + 2 e_3$

- 1°) déterminer le produit scalaire (A . B) des vecteurs A et B.
- 2°) déterminer le produit vectoriel (A \wedge B) des vecteurs A et B.
- 3°) déterminer le produit tensoriel (A \otimes B) des vecteurs A et B.
- 4°) déterminer l'angle entre les vecteurs A et B.

Même chose pour les vecteurs A=(2, 1, 3) B=(1, 2, 4)

Exercice N° 2:

On considère la base $\{f_j\}$ de R^3 définit par les vecteurs suivants :

$$f_1 = (1,0,0)$$
 $f_2 = (\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$ $f_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

et le vecteurs :

$$A = 8 e_1 + 6 e_2 + 3 e_3$$

- 1°) la base {f_i} est-elle orthonormée?
- 2°) déterminer les projections du vecteur A sur les axes de vecteurs f₁, f₂ et f₃.
- 3°) déterminer les composantes du vecteur A dans la base (f₁,f₂,f₃).

Exercice N° 3:

Montrer que : $I+(*n)^2 = {}^t(n)(n)$ avec $n(n_1, n_2, n_3)$ un vecteur unitaire

Exercice N° 4:

On considère la fonction vectorielle définie par F=(u, v, w) telle que :

$$u = 8 x_1 + 6 x_2$$

 $v = 10 x_1 - 8 x_2$
 $w = 12 x_3$

- 1°) Déterminer le tenseur Grad F.
- 2°) Déterminer le tenseur transposé du Grad F noté Grad ^t F.
- 3°) Déterminer le tenseur A tel que $A = (Grad F + Grad^t F)/2$.
- 4°) Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A

Exercice N° 5:

a) Démontrer les propriétés suivantes du gradient, pour des champs de scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$ et

$$g(x, y, z)$$
: $Grad(f+g) = Grad(f) + Grad(g)$
 $Grad(af) = \alpha Grad(f)$

$$Grad(f,g) = gGrad(f) + fGrad(g)$$

b) Soit la fonction scalaire : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 (2 + x_2 x_3^3)$

Déterminer le Gradient de f.

Déterminer le Laplacien de f.

Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2018/2019 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Rappels Mathématiques)

(Exercices facultatifs)

Exercice N° 6:

Soit le vecteur X qui se décompose dans la base orthonormée $\{e_i\}$ par X = (1, 3, -2).

- a) effectuer le produit tensoriel $T = X \otimes X$ et écrire les composantes t_{ij} de T sous forme matricielle.
- 2) Soit $\{f_i\}$ j=1,2,3 une base orthonormée reliée à la base $\{e_i\}$ i=1,2,3 par la matrice de transformation orthogonale [P] par $\{f_i\}=[P]\{e_i\}$ telle que :

$$(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) calculer les composante t^*_{ij} du tenseur T dans la base $\{f_i\}$.
- b) calculer les composantes du vecteur X dans la base $\{f_i\}$ et calculer le produit tensoriel $X\otimes X$ dans la base $\{f_i\}$. Que constater vous ?

Exercice N° 7:

On considère une base orthonormée de R₃ définie par les vecteurs suivant :

$$f_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$
 $f_2 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ $f_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

- a) Vérifier que cette base est orthonormée.
- b) On donne les vecteurs suivants : A = (4, 1, 2); B = (1, 3, 5), déterminer la décomposition de ces vecteurs sur la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.
- c) Déterminer les projections de A et B sur les axes de f₁, f₂.et f₃.
- d) Calculer le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit tensoriel des vecteurs A et B.
- e) déterminer l'angle entre les vecteurs A et B

Exercice N° 8:

Pour n=2 écrire explicitement l'expression $S_1 = x_i y_i$.

Pour n=3 écrire explicitement l'expression $S_2 = A_{ijk} B_{ij}$.

Pour n=2 écrire explicitement l'expression $S_3 = a_{ijk} b_{ij} c_k$.

Exercice N° 9:

Utiliser la convention de sommation pour écrire les expressions suivantes, en précisant la valeur de n dans chaque cas :

A=
$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + a_{j3} x_3$$

B= $b_{11} d_{11} + b_{12} d_{12} + b_{13} d_{13} + b_{14} d_{14}$
C= $C^1_{11} + C^2_{12} + C^3_{13} + C^4_{14} + C^5_{15}$

Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2021/2022 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (serie N° 2)

Exercice N° 1:

Le mouvement d'un milieu continu est définit dans un repère orthonormé R=(O,e₁, e₂, e₃). par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)e^t + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t} \\ x_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)e^t - \frac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

- a) Montrer que le Jacobien est différent de zéro.
- b) Ecrire les équations inverse du mouvement définit par $X = \chi^{-1}(x, t)$.
- c) Donner en description Lagrangienne et en description Eulerienne les expressions de la vitesse et l'accélération.

Exercice N° 2:

On considère le champ de déplacement plan défini dans un repère orthonormé direct $R=(x_1,\,x_2,\,x_3)$.muni de la base $B=(O,\,e_1,\,e_2,\,e_3)$.par :

$$U(X_1, X_2) = X_1 X_2 (ae_1 + be_2)$$

- (X₁, X₂) étant les coordonnées de Lagrange et a et b des constantes strictement positives.
- a) déterminer le lieu des points dans la configuration initiale où la condition de non pénétrabilité de la matière n'est pas satisfaite.
 - b) déterminer dans la base B les composantes :
 - du tenseur des dilatations
 - du tenseur des déformations
 - du tenseur gradient des déplacements et ses deux composantes \mathscr{E} et Ω .
 - c) montrer que si a et b sont petites devant 1, on a bien $E = \mathcal{E}$.

Exercice N° 3:

L'espace R^3 est rapporté à un repère orthonormé R=(O, e_1 , e_2 , e_3). Un milieu continu a un mouvement définit par le champ de vitesses suivant :

$$V(M) = \alpha e_1 (e_2 .OM)$$

1°)

- a) Déterminer la représentation Lagrangienne du mouvement. (On désignera par (X_1, X_2, X_3) les coordonnées d'une particule à l'instant t = 0).
- b) Déterminer les composantes de la matrice M(t) représentant l'opérateur qui permet de passer de la position M_0 d'une particule à l'instant t = 0, à sa position M à l'instant t.
- c) A l'instant t, déterminer les composantes du tenseur gradient de la transformation au point M₀.
- d) Déterminer le tenseur inverse G=F⁻¹, puis le tenseur de dilatations C.

2°)

- a) On considère, à l'instant t=0, le carré $A_0B_0C_0D_0$ de centre O, de cote η , tel que : $A_0B_0=\eta e_1$ et $A_0D_0=\eta e_2$. Déterminer le transformé de ce carré à l'instant T.
- b) On considère, à l'instant t=0, le cube dont la section dans le plan (O, e_1, e_2) est le carré $A_0B_0C_0D_0$. Déterminer, à l'instant T, le transformé de ce cube.
- c) Comparer les volumes du cube et de son transformé. Pouvait-on prévoir le résultat ?
- d) Calculer l'aire de la déformée de la face contenant B₀C₀.

Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2025/2026 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Serie N° 2)

Exercice N° 1:

Le mouvement d'un milieu continu est définit dans un repère orthonormé R=(O,e₁, e₂, e₃). par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)e^t + \frac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t} \\ x_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)e^t - \frac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

- a) Montrer que le Jacobien est différent de zéro.
- b) Ecrire les équations inverse du mouvement définit par $X = \chi^{-1}(x, t)$.
- c) Donner en description Lagrangienne et en description Eulerienne les expressions de la vitesse et l'accélération.

Exercice N° 2:

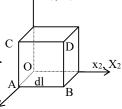
Le mouvement d'un milieu continu est définit dans un repère orthonormé $R=(O,e_1,e_2,e_3)$. par la relation vectorielle $x=\chi(X,t)$ tel que :

$$x_1 = X_1$$
 ; $x_2 = X_2 + t^2 X_3$; $x_3 = X_3 + t^2 X_2$

- 1°) Ecrire les équations inverse du mouvement définit par $X = \chi^{-1}(x, t)$.
- 2°) Donner en description Lagrangienne et en description Eulerienne les expressions de la vitesse et l'accélération.
- 3°) Déterminer au temps t=2s la vitesse et l'accélération pour :
 - a) La particule de coordonnées (1,2,1) à l'état initial (t=0)
 - b) La particule de coordonnées (1,0,1) à l'état actuel (t=2s)

On considère à l'instant t=0 le petit cube de côté dl définit dans un repère orthonormé direct $R=(O, e_1, e_2, e_3,)$.

- 4°) Déterminer la matrice du tenseur gradient de la transformation
- 5°) Déterminer la matrice du tenseur des dilatations (de Cauchy-green)
- 6°) Déterminer la matrice du tenseur des déformations (de Green-Lagrange).
- 7°) Déterminer et tracer à l'instant t=0.1 sec le transformé de la face ABCD du cube.
- 8°) Déterminer la déformation $E(u_0, u_0)$ dans la direction AD.



Exercice N° 3:

Dans l'espace rapporté au repère (O, e₁, e₂, e₃) un milieu continu occupe à l'instant t=0 le domaine

$$-1 < X_1 < +1$$
 $-1 < X_2 < +1$ $0 < X_3 < 1$

Le milieu subit une déformation entre l'instant 0 et t telle que la représentation lagrangienne de l'écoulement est donnée par :

$$x_1 = (1+\omega t) X_1 \cos(\omega t)$$

 $x_2 = X_2 + (1+\omega t) X_1 \sin(\omega t)$ (ω est une constante)
 $x_3 = X_3$

Déterminer dans le repère (O, e₁, e₂, e₃):

- a) Le tenseur des dilatations (de Cauchy-Green C)
- b) Le tenseur des déformations (de Green-Lagrange E)
- c) Le tenseur des déformations linéarisé dans le cas où le paramètre ω est petit.

Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2025/2026 Responsable du Module: Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série n°3)

Exercice N° 01:

On considère le champs de déplacements $U=P_0$ $P_1=(u_1, u_2, u_3)$ suivant :

$$u_1 = 9 k x_1 + 8 k x_2$$

 $u_2 = 16 k x_1 - 9 k x_2$
 $u_3 = 5 k x_3$

où k est suffisamment petite pour assurer la validité de l'hypothèse des petites déformations (k>0)

- 1°) Déterminer le tenseur de déformations linéairisé.
- 2°) Déterminer les allongements principaux et les directions principales.
- 3°) Soit une sphère en acier de un mètre (1m) de diamètre soumise au champ de déformation défini précédemment (prendre k=10⁻³).
 - a) Que devient cette sphère après déformation?
 - b) Déterminer ses longueurs caractéristiques (en mm).
 - c) Déterminer ses volumes initial et final

Exercice N° 02:

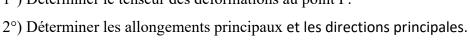
On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'exerce aucune force extérieure. On mesure dans le plan tangent à la surface, les dilatations linéaires unitaires suivant les trois axes choisis x, β et α comme l'indique la figure ci-contre. Les résultats des mesures sont :

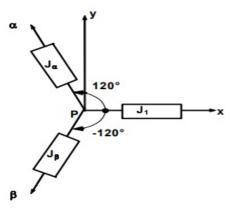
Jauge
$$J_1 = 200.10^{-6}$$

Jauge $J_{\alpha} = 80.10^{-6}$

Jauge
$$J_{\beta}$$
= -40.10⁻⁶

1°) Déterminer le tenseur des déformations au point P.





Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2022/2023 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série n°3)

Exercice N° 01:

On considère le champs de déplacement $U=P_0$ $P_1=(u_1, u_2, u_3)$ suivant :

$$u_1 = 7 k x_1 - 8 \sqrt{3} k x_3$$

 $u_2 = 25 k x_2$
 $u_3 = 2 \sqrt{3} k x_1 + 13 k x_3$

où k est suffisamment petite pour assurer la validité de l'hypothèse des petites déformations (k>0)

- 1°) Déterminer les tenseurs de déformation linéarisé et de rotation.
- 2°) Déterminer les allongements principaux et les directions principales.
- 3°) Déterminer l'allongement unitaire et le glissement dans la direction n faisant un angle de 60° avec l'axe x_1 (e₁) et perpendiculaire à l'axe x_2 (e₂).

Exercice N° 02:

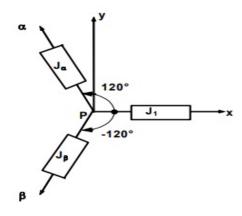
On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'exerce aucune force extérieure. On mesure dans le plan tangent à la surface, les dilatations linéaires unitaires suivant les trois axes choisis x, β et α comme l'indique la figure ci-contre. Les résultats des mesures sont :

Jauge
$$J_1 = 200.10^{-6}$$

Jauge
$$J_{\alpha} = 80.10^{-6}$$

Jauge
$$J_{\beta} = -40.10^{-6}$$

- 1°) Déterminer le tenseur des déformations au point P.
- 2°) Déterminer les allongements principaux et les directions principales.



Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2017/2018 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Tenseur des déformations)

(Exercices facultatifs)

Exercice N° 13:

On considère le champs de déplacement $U=P_0$ $P_1=(u_1, u_2, u_3)$ suivant :

$$u_1 = 7 k x_1 - 8 \sqrt{3} k x_3$$

 $u_2 = 25 k x_2$
 $u_3 = 2 \sqrt{3} k x_1 + 13 k x_3$

où k est suffisamment petite pour assurer la validité de l'hypothèse des petites déformations (k>0)

- 1°) Déterminer les tenseurs de déformation pure et de rotation.
- 2°) Déterminer les allongements principaux et les directions principales.
- 3°) Tracer le tricercle de Mohr dans les axes (ε,g) associé aux déformations.
- 4°) Quelle est la valeur du glissement relatif maximal g_{max} ? A quelle direction q correspond-elle, et dans quel plan?
- 5°) Déterminer l'allongement unitaire et le glissement dans la direction n faisant un angle de 60° avec l'axe x₁ (e₁) et perpendiculaire à l'axe x₂ (e₂). Retrouver ce résultat en utilisant le tricercle de Mohr.

Exercice N° 14:

On considère une pièce cylindrique de révolution autour de l'axe ox₃. Cette pièce de hauteur h et de rayon R est faite en matière parfaitement élastique, homogène et isotrope.

On la soumet à un ensemble de sollicitations qui conduisent à des déplacements de chaque point répondant aux caractéristiques suivantes:

Chaque section droite de la pièce tourne dans son plan autour de ox_3 d'un petit angle $\delta\theta$ qui est proportionnel à la côte x_3 du point. En supposant que le point O, centre de la section droite inférieure (S_0) , est fixé, on peut donc écrire que : $\delta\theta(x_3) = k \ x_3$; k étant homogène à l'inverse d'une longueur et très petite par rapport à 1/h.

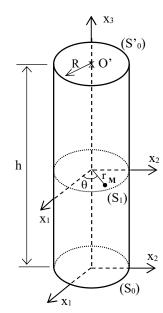
On demande:

- 1°) Trouver le champ du vecteur déplacement infinitésimal $u(x_1 \ , x_2 \ , x_3 \)$ qui règne en M(x) sous l'effet de ces sollicitations.
- 2°) En déduire le champ du tenseur de déformation pure infinitésimale ainsi que le champ du tenseur de rotation locale infinitésimale qui règnent au voisinage du point M(x), ainsi que le pseudo-vecteur rotation associé à W.
- 3°) Déterminer la valeur des allongements relatifs principaux en un point M(x), ainsi que les directions principales qui leur sont associées.
- 4°) Tracer le tricercle de Mohr dans les axes (g,ε) , associé aux déformations en M(x).

Quelle est en M la valeur de la déviation maximale g_{max} ? A quelle direction n correspond-elle?

En quels points de la pièce g maximale prend-elle sa valeur maximum?

 5°) Quelle est en un point M(x) la valeur de la dilatation cubique relative ? Le résultat obtenu n'était-il pas prévisible simplement ?



Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2021/2022 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série n°4)

Exercice N° 1:

Soit, en point P d'un matériau, le tenseur des contraintes définie dans la base $(e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,)$. Sa matrice représentative est

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix} \quad \text{(daN/mm}^2\text{)} \qquad \qquad \text{où } \alpha \text{ (r\'eel) est un paramètre de charge.}$$

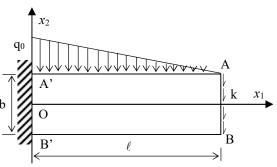
Quel est l'état de contrainte en P pour $\alpha = 0$.

- 1°) déterminer, en fonction de α, les contraintes principales et les directions principales.
- 2°) En supposant $\alpha=1$, tracer le tricercle de Mohr.
- 3°) En supposant $\alpha=1$, calculer la contrainte appliquée en P, sur la facette dont la normale a pour cosinus directeurs, par rapport à la base (e₁, e₂, e₃), ($\sqrt{3/2}$, 1/2, 0). Retrouver le résultat par construction sur le tricercle de Mohr.
- 4°) α étant maintenu positif, trouver les directions de cisaillement maximum, et la valeur du cisaillement maximum. Retrouver les résultats dans le plan de Mohr.

Exercice N° 02:

Soit une poutre de faible largeur, chargée selon la figure ci-contre :

cisaillement constant k sur la face AB, et charge normale linéairement décroissante de q_0 à 0 sur la face A'A. Ecrire les conditions aux limites en contraintes, pour ce problème dans le plan (x_1, x_2) .



Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2024/2025 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série n°4)

Exercice N° 1:

Soit, en point P d'un solide, le tenseur des contraintes définie dans la base $(e_1\ ,\,e_2\ ,\,e_3\).$ sa matrice représentative est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 0 \\ 24 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} daN/mm^2$$

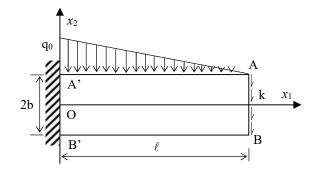
- 1°) Déterminer les contraintes principales et les directions principales de Σ en P.
- 2°) Tracer le tricercle de Mohr.
- 3°) Déterminer la valeur de la contrainte tangentielle maximale et la direction correspondante. Exprimer cette direction dans la base (e₁, e₂, e₃).
- 4°) Décomposé le tenseur en partie sphérique et partie déviatrice.
- 5°) Déterminer la tension (contrainte normale) et la cission (contrainte de cisaillement) octaédrales.
- 6°) Calculer les composantes σ et τ du vecteur contrainte dans la direction de la première bissectrice du plan (e₁, e₂). Retrouver ces résultats avec le tricercle de Mohr.

Exercice N° 02:

Soit une poutre de faible largeur, chargée selon la figure ci-contre :

- cisaillement constant k sur la face AB, et
- charge normale linéairement décroissante de q_0 à $0\ sur$ la face A'A.

Ecrire les conditions aux limites en contraintes, pour ce problème dans le plan (x_1, x_2).



Exercice N° 3:

Soit en point P, le tenseur des contraintes défini dans la base (e₁, e₂, e₃). Sa matrice représentative est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & k \\ 0 & k & 75 \end{pmatrix} \quad daN/mm^2 \qquad \text{où k est un réel positif}$$

- 1°) Sachant que σ_{II} = 25 daN/mm² et que la contrainte tangentielle maximale égale à 43.9 daN/mm², déterminer les contraintes principales de Σ en P.
- 2°) Déterminer la valeur de k. (Dans la suite de l'exercice, utiliser cette valeur de k)
- 3°) Déterminer les directions principales de Σ .
- 4°) Décomposer le tenseur des contraintes Σ en partie sphérique et partie déviatrice.
- 5°) Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle dans la direction n faisant un angle de 30° avec l'axe x_2 (e₂) et perpendiculaire à l'axe x_1 (e₁)

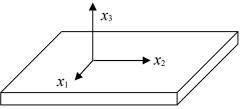
Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2018/2019 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Tenseur des contraintes)

Exercice Nº 15:

Soit une plaque plane, très mince dans la direction Px_1 , pratiquement contenue dans le plan x_1 x_2 et qui est chargée uniquement dans ce plan; cette plaque est dite soumise à une sollicitation de contrainte quasi-plane. On suppose que l'on a pu déterminer, par voie expérimentale, les composantes du tenseur de contrainte Σ en un point P, exprimées dans une base orthonormée $P(x_1, x_2, x_3)$, et que l'on a :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . 10^7 \quad \text{Pascal}$$



On demande:

- 1°) De déterminer mathématiquement la valeur des contraintes principales σ_I , σ_{II} , σ_{III} qui règnent en P et les directions principales de contrainte qui leur sont associées.
- 2°) (*) De retrouver ces résultats après avoir construit le diagramme de Mohr en contraintes relatif au point P. Le cercle de Mohr associé au plan principal (P, x_1 , x_2) jouera un rôle important dans cette détermination; on pourra l'obtenir en construisant deux de ses points diamétralement opposés et donc représentatifs de l'état de contrainte qui règne sur deux facettes orthogonales passant par P.
- 3°) De trouver les directions de facettes passant par P pour lesquelles la contrainte tangentielle est la plus grande. Quelle est la valeur maximale τ_{max} de la contrainte tangentielle ?
- 4°) Calculer les composantes σ et τ du vecteur contrainte dans la direction de la première bissectrice du plan (x_1, x_2) . Retrouver ces résultats par le tricercle de Mohr.
- 5°) (*) De situer et caractériser l'ellipsoïde des contraintes de Lamé relatif au point P et à cet état de sollicitation de contrainte quasi-plane.

(*) pour MMC

Exercice N° 16:

Soit, en point P d'un matériau, le tenseur des contraintes définie dans la base $(e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,)$. Sa matrice représentative est

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix} \quad \text{(daN/mm}^2\text{)} \qquad \text{où } \alpha \text{ (r\'eel) est un paramètre de charge.}$$

Quel est l'état de contrainte en P pour $\alpha = 0$.

- 1°) déterminer, en fonction de α , les contraintes principales et les directions principales.
- 2°) En supposant $\alpha=1$, calculer la contrainte appliquée en P, sur la facette dont la normale a pour cosinus directeurs, par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) , $(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$. Retrouver le résultat par construction sur le tricercle de Mohr.
- 3°) α étant maintenu positif, trouver les directions de cisaillement maximum, et la valeur du cisaillement maximum. Retrouver les résultats dans le plan de Mohr.

Questions facultatives:

- 4°) Dans le repère principale des contraintes, déterminer les valeurs de α pour qu'en P l'état de contraintes soit cylindrique. Même question en imposant un état de cisaillement superposé à un état hydrostatique.
- 5°) Application : Le matériau est tel, qu'au point P, il admet au maximum un cisaillement de 17 daN/mm² ; déterminer la valeur α correspondante, puis à l'aide de la représentation de Mohr, en déduire la direction de ce cisaillement maximum.

Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2024/2025 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série n°5)

Exercice N° 01:

Soit, en point P d'un solide, le tenseur des contraintes défini dans la base (e_1, e_2, e_3) , sa matrice représentative est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 24 & 0 \\ 10 & 0 & 18 \end{pmatrix} \quad daN/mm^2$$

- 1°) Déterminer les contraintes principales et les directions principales de Σ en P.
- 3°) Déterminer la matrice associée au tenseur des déformations dans la base principale.
- 4°) Soit une sphère en acier de un mètre (1m) de diamètre soumise au champ de contrainte défini précédemment.
 - a) Que devient cette sphère après déformation?
 - b) Déterminer ses longueurs caractéristiques et son volume après déformation (en mm³)

Caractéristique du matériau : $E = 21500 \text{ daN/mm}^2$; v = 0.25

Exercice N° 02:

Soit, en point P d'un solide, le tenseur des contraintes définie dans la base (e₁, e₂, e₃). sa matrice représentative est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{daN/mm}^2$$

- 1°) Déterminer les contraintes principales et les directions principales de Σ en P.
- 2°) Déterminer la matrice associée au tenseur des déformations dans la base initile et la base principale.
- 3°) Soit une barre cylindrique à section circulaire de diamètre 20 cm et de longueur deux mètres (2m) et dont l'axe se trouvant dans la direction e₃. Cette barre est soumise au champ de contrainte définit précédemment. Déterminer sa nouvelle longueur et les dimensions principales de sa section transversale ainsi que son volume final.

Caractéristique du matériau : $E = 21000 \text{ daN/mm}^2$ v = 0.3

Exercice N° 03:

On considère un cylindre indéformable (A) contenant un matériau élastique homogène isotrope (B) comprimé à l'aide d'un piston (C) de section S. on mesure le tassement Δh du matériau, dont la hauteur initiale h, sous l'effet d'une charge P.

On appelle module oedométrique E* la constante caractéristique du matériau définie par la relation suivante :

$$\frac{P}{S} = E^* \frac{\Delta h}{h}$$

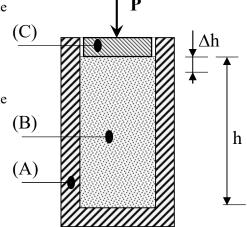
- 1°) Déterminer la relation liant le module oedométrique E^* et le module de Young E.
- 2°) On considère le cas d'un piston de 20 cm de diamètre ; déterminer la charge P nécessaire pour obtenir un tassement de 1 mm sur une longueur de un mètre du milieu (B).

On donne pour le milieu (B):

Le module de Young E=10000 daN/mm²

Le coefficient de poisson v = 0.3

3°) Déterminer le tenseur des contraintes qui règnent dans le milieu (B).



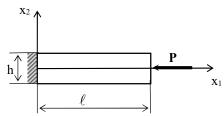
Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2022/2023 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série N° 6)

Exercice N° 1:

Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité $x_i = 0$, et soumise à une charge concentrée P à son extrémité $x_i = 1$ (on néglige les forces de volume).

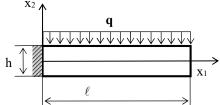
- 1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de 2° degré; puis déterminer σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point $M(x_1, x_2)$.
- 2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point $M(x_1, x_2)$.



Exercice N° 2:

Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité $x_1=0$, et soumise à une charge q par unité de longueur uniformément répartie sur sa surface supérieure (y=h/2) (on néglige les forces de volume).

- 1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de 5^e degré; puis déterminer σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point $M(x_1, x_2)$.
- 2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point $M(x_1, x_2)$. En déduire la déformée de la poutre.



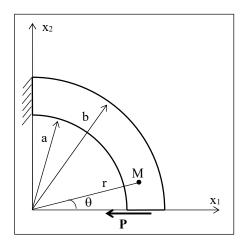
Exercice N° 3:

Soit une poutre de section droite rectangulaire encastrée à une extrémité ($\theta=\pi/2$), et soumise à une charge concentrée P à l'autre extrémité ($\theta=0$) dans la direction radiale, (on néglige les forces de volume).

Sachant que le problème se résout en utilisant une fonction d'Airy de la forme :

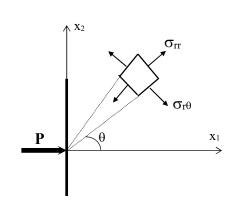
$$\phi(r,\theta) = \left[Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Dr Ln(r)\right] \sin(\theta)$$

déterminer les contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ dans la poutre .



Exercice N° 4:

En utilisant une fonction de contrainte de la forme $\phi(r,\theta) = K \ r \ \theta \sin(\theta)$, déterminer la distribution de contrainte due à une force normale P concentrée agissant sur la frontière rectiligne d'une plaque semi-infinie.



Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master – 2024/2025 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série N° 6)

Exercice N° 1:

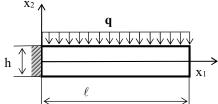
Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité $x_1=0$, et soumise à une charge q par unité de longueur uniformément répartie sur sa surface supérieure (y=h/2) (on néglige les forces de volume).

 1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de $5^{\rm e}$ degré de la forme :

$$\phi(x_1, x_2) = A x_1^2 x_2^3 + B x_2^5 + C x_1^2 x_2 + D x_2^3 + E x_1^2$$

2°) Déterminer les contraintes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point $M(x_1, x_2)$ en considérant le conditions aux limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} * \ pour \ x_2 = +h/2 & \Rightarrow & \sigma_{22} = -q & et & \sigma_{12} = 0 \\ * \ pour \ x_2 = -h/2 & \Rightarrow & \sigma_{22} = 0 & et & \sigma_{12} = 0 \\ * \ pour \ x_1 = \ell/2 & \Rightarrow & \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \ x_2 \ dx_2 = 0 \end{array}$$



Exercice N° 2:

Soit une poutre de section droite rectangulaire encastrée à une extrémité ($\theta = \pi/2$), et soumise à une charge concentrée P à l'autre extrémité ($\theta = 0$) dans la direction radiale. (on néglige les forces de volume).

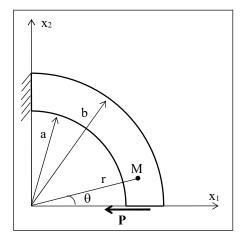
Sachant que le problème se résout en utilisant une fonction d'Airy de la forme :

$$\phi(r,\theta) = \left[Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Dr Ln(r)\right] \sin(\theta)$$

déterminer les contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ dans la poutre en considérant le conditions aux limites suivantes :

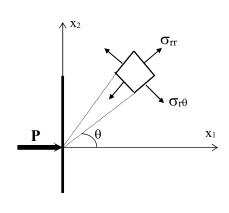
* surface libre :
$$\sigma_{rr}=0$$
 et $\sigma_{r\theta}=0$ si $r=a$ et $r=b$ $\forall \theta$.

* surface chargée :
$$\int_{a}^{b} \sigma_{r\theta} dr = P$$
 si $\theta = 0$



Exercice N° 3:

En utilisant une fonction de contrainte de la forme $\phi(r,\theta) = K \ r \ \theta \sin(\theta)$, déterminer la distribution de contrainte due à une force normale P concentrée agissant sur la frontière rectiligne d'une plaque semi-infinie.



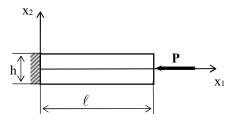
Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2012/2013 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série N° 7)

Exercice N° 19:

Soit une poutre de longueur l, de hauteur h et d'épaisseur e, encastrée à son extrémité x_i = 0, et soumise à une charge concentrée P à son extrémité x_i = 1 (on néglige les forces de volume).

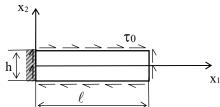
- 1°) Montrer que le problème se résout en utilisant une fonction de contrainte de 2° degré; puis déterminer σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} en un point $M(x_1, x_2)$.
- 2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point $M(x_1, x_2)$.



Exercice N° 20:

Soit une poutre de section droite rectangulaire soumise à une cission uniforme de valeur τ_0 sur toutes ses faces.

Montrer que l'on peut résoudre ce problème comme fonction d'Airy un polynôme du second degré en x_1 et x_2 (on néglige les forces de volume). Déterminer les tenseurs des contraintes, des déformations, puis les déplacements des points de la poutre (on supposera que la base x_1 = 0 est maintenue dans le plans (Ox₁, Ox₃) et O reste fixe.

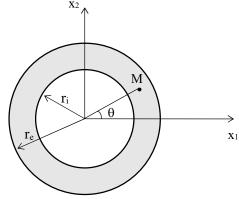


Exercice N° 21:

Un cylindre circulaire de rayon intérieur et extérieure r_i et r_e respectivement, soumis à la fois à une pression intérieure p_i et une pression extérieure p_e . Le problème se résoud en utilisant une fonction de contrainte de la forme :

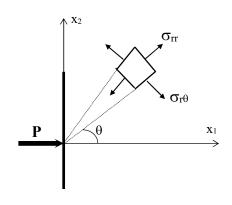
$$\phi(r,\theta) = A \operatorname{Ln}(r) + C r^2.$$

- 1°) Déterminer σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ dans le cylindre
- 2°) En considérant le cas de contrainte plane, déterminer les déplacements en un point $M(r, \theta)$.
- 3°) Application : Un cylindre d'acier à paroi épaisse de 8 cm de diamètre intérieure est soumis à une pression intérieure de 400 kg/cm². Il n'y a pas de pression extérieure. La contrainte pratique du matériau et de 1260 kg/cm². Calculer le diamètre extérieur du cylindre.



Exercice N° 22:

En utilisant une fonction de contrainte de la forme $\phi(r,\theta) = K \ r \ \theta \sin(\theta)$, déterminer la distribution de contrainte due à une force normale P concentrée agissant sur la frontière rectiligne d'une plaque semi-infinie.



Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – Elasticité/MMC - 2012/2013 Responsable du Module : Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série N° 8)

Exercice N° 23:

Soit ABC le triangle équilatéral constituant la section droite d'une poutre. Cette poutre, encastrée à une extrémité $(x_3 = 0)$ est soumise à un couple de torsion M à l'autre extrémité $(x_3 = \ell)$. (On néglige les forces de volume).

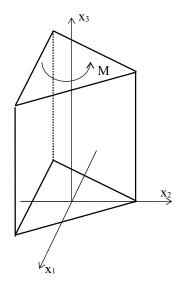
1°) Trouver les équations des droites formant le triangle ABC, sous la forme :

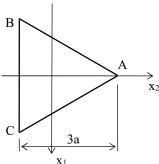
$$x_1 + a_1 \ x_2 + b_1 = 0$$
 pour (AB)
 $x_2 + b_2 = 0$ pour (BC)
 $x_1 + a_3 \ x_2 + b_3 = 0$ pour (CA)

 2°) En considérant la fonction $\phi(x_1, x_2)$ permettant de résoudre le problème de torsion sous la forme :

$$\phi(x_1, x_2) = m (x_2 + b_2) (x_1 + a_1 x_2 + b_1) (x_1 + a_3 x_2 + b_3),$$

Déterminer la distribution des contraintes dans la section droite de la poutre.

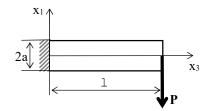


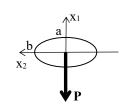


Exercice N° 24:

Déterminer la répartition des contraintes dans une poutre droite fléchie selon la figure cidessous. La section de la poutre est elliptique pleine. L'équation du contour de la section droite s'écrit :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$$





Université Mohamed - KHIDER - BISKRA Département de Génie Mécanique – MMC / Master - 2024/2025 Responsable du Module: Pr. HECINI M.

Travaux Dirigés (Série n°7)

Exercice N° 01:

Dans la zone la plus sollicitée d'une pièce chargée, on relève l'état de contrainte suivant :

$$\sigma_{11} = 200 \text{ N/mm}^2$$
; $\sigma_{22} = -150 \text{ N/mm}^2$ et $\tau_{12} = -100 \text{ N/mm}^2$.

$$\sigma_{22} = -150 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{12} = -100 \text{ N/mm}^2$$
.

La limite élastique identifiée sur la courbe de traction est égale à $\sigma_e = 380 \text{ N/mm}^2$

On demande:

- 1°) d'appliquer le critère de Rankine.
- 2°) d'appliquer le critère de Tresca.
- 3°) d'appliquer le critère de Von Mises.

Exercice N° 02:

Soit, en point P d'un solide, le tenseur des contraintes défini dans la base (e_1, e_2, e_3) , sa matrice représentative est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & -5 & 0 \\ 12 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad daN/mm^2$$

- 1°) Déterminer les contraintes principales de Σ en P.
- 2°) Calculer la contrainte équivalente de Rankine, la contrainte équivalente de Tresca et la contrainte équivalente de Von Mises.

D'après les valeurs obtenues, quel est le critère qui donne plus de sécurité ?

Exercice N° 03:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour expression:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

- 1°) Calculer les contraintes et les directions principales.
- 2°) Calculer la contrainte équivalente de Von Mises et la contrainte équivalente de Tresca.