3.6. Résistance thermique –Analogie électrique

D'après les résultats établis au paragraphe précédent, on remarque que les expressions des flux de chaleur échangé par conduction ou par convection peuvent s'écrire sous la forme :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{thermique}}$$

Pour surface plane

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}} \Rightarrow \quad R_{thermique} = \frac{e}{\lambda S}$$

Pour un cylindre creux

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda L}} \Rightarrow \quad R_{thermique} = \frac{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda L}$$

Pour une sphère creuse

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi\lambda}} \Rightarrow \quad R_{thermique} = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi\lambda}$$

Pour le flux convectif

$$\Phi = \mathrm{hS}(T_P - T_\infty) \Rightarrow \quad R_{thermique} = {}^{1}/_{hS}$$

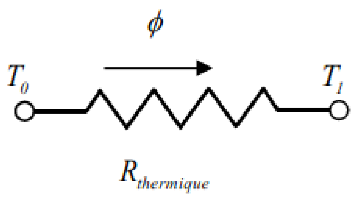
- **Analogie électrique**

L'expression du flux ainsi écrite présente une certaine analogie avec la loi d'Ohm en électricité $I = \frac{U}{R}$.

Nous constatons une certaine analogie entre les différentes grandeurs

- Le flux de chaleur Φ joue un rôle du courant électrique I
- la différence de température ΔT joue le rôle de la différence de potentiel U

Ainsi, pour représenter un problème thermique, on pourra adopter la méthode des schémas électriques équivalents



3.7. Conduction avec source de chaleur interne en régime permanent à une dimension (conduction vive)

On appelle Conduction vive la conduction avec source interne de chaleur. Ces sources peuvent être soit uniformément réparties soit concentrées en des points précis.
On considère un solide (ou un fluide au repos) homogène et indéformable et on suppose que la conductivité thermique du matériau est constante. Reprenons l'équation de la chaleur établie précédemment.

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

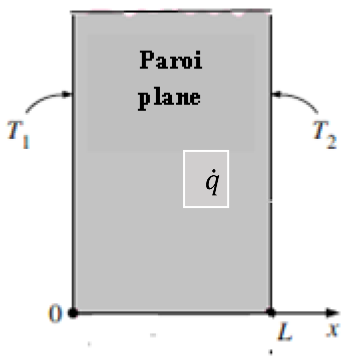
En régime permanent (stationnaire) avec source interne l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\Delta T = -\frac{\dot{q}}{\lambda}$$

- **3.7.1. Mur simple avec conditions de Dirichlet sur les deux faces (températures imposées aux surfaces)**

L'équation à résoudre dans ce cas est :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$



Avec les conditions aux limites suivantes :

à x=0 $T(0) = T_1$

à x=L $T(L) = T_2$

En intégrant l'équation différentielle on trouve :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}x + A \Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + Ax + B$$

Où A et B sont des constantes d'intégrations à déterminer :

à x=0   T(0) =T_1 ⇒B=T_1

à x=L   T(L)= T_2 ⇒ $-\frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2 + AL + T_1$

$$A = \frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2 + \frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2x + T_1$$ Profil parabolique

- Densité de flux

$$\varphi = -\lambda\frac{dT}{dx} = \dot{q}x - \lambda\left(\frac{(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2\right)$$

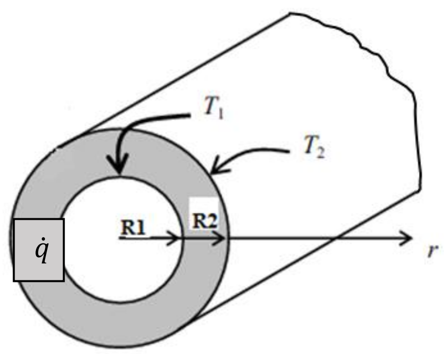
Si :

$$T1 = T2 \ et \ x = \frac{L}{2} \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow plan\ adibatique$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow Test\ maximal.$$

3.7.2. Cylindre creux avec conditions de Dirichlet :

$$\frac{\partial^2T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$



Avec les conditions aux limites

$T(R_1) = T_1$ pour r = R_1

$T(R_2) = T_2$ pour r = R_2

Multipliant l'équation différentielle précédente par r

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}r$$

En intégrant cette équation on trouve :

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}r^2 + A \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}r + \frac{A}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda}r^2 + Alnr + B$$

Déterminations des constantes A et B

Pour r =R_1

$$T(R_1) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda}R_1^2 + AlnR_1 + B = T_1 \qquad (1')$$

Pour r = R_2

$$T(R_2) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda}R_2^2 + AlnR_2 + B = T_2 \qquad (2')$$

$$(1') - (2') \Rightarrow \qquad A = \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda}(R_1^2 - R_2^2)}{ln\frac{R_1}{R_2}}$$

Pour déterminer B on remplace A dans $(1')$:

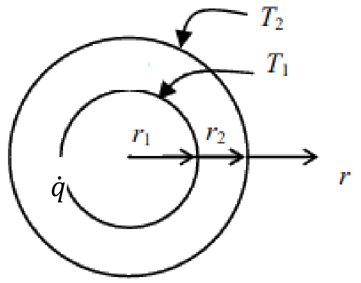
$$B = T_1 + \frac{\dot{q}}{4\lambda}R_1^2 - \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda}(R_1^2 - R_2^2)}{ln\frac{R_1}{R_2}}lnR_1$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda}r^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda}(R_1^2 - R_2^2)}{ln\frac{R_1}{R_2}}lnr + T_1 + \frac{\dot{q}}{4\lambda}R_1^2 - \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda}(R_1^2 - R_2^2)}{ln\frac{R_1}{R_2}}lnR_1$$

Après arrangement :

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4\lambda}r^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}}{4\lambda}(R_1^2 - R_2^2)}{ln\frac{R_1}{R_2}}ln\frac{r}{R_1} + T_1$$

3.7.2. Sphère creuse avec conditions de Dirichlet :



$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

Pour $r = r_1$ $\quad$ $T(r_1) = T_1$

Pour $r = r_2$ $\quad$ $T(r_2) = T_2$

En multipliant l'équation différentielle par r^2

$$r^2\frac{d^2T}{dr^2} + 2r\frac{dT}{dr} = -r^2\frac{\dot{q}}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -r^2\frac{\dot{q}}{\lambda} \quad \Rightarrow r^2\frac{dT}{dr} = -r^3\frac{\dot{q}}{3\lambda} + A \quad \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -r\frac{\dot{q}}{3\lambda} + \frac{A}{r^2}$$

L'intégration de la dernière équation donne :

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda}r^2 - \frac{A}{r} + B$$

A et B constantes d'intégration qui peuvent être déterminé par les conditions aux limites.

Pour $r = r_1$

$$T(r_1) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda}{r_1}^2 - \frac{A}{r_1} + B = T_1 \qquad (1'')$$

Pour $r = r_2$

$$T(r_1) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda}{r_2}^2 - \frac{A}{r_2} + B = T_2 \qquad (2'')$$

$(1'') - (2'')$

$$A = \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{-\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

$$B = T_1 + \frac{\dot{q}}{6\lambda} r_1^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{-\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1}$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{6\lambda} r^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r} + \frac{\dot{q}}{6\lambda} r_1^2 + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{-\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1} + T_1$$

$$T(r) = T_1 + \frac{\dot{q}}{6\lambda}(r_1^2 - r^2) + \frac{(T_1 - T_2) + \frac{\dot{q}(r_1^2 - r_2^2)}{6\lambda}}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\,(r - r_1)}$$