Méthode Big M (Grand M)

La méthode Big M est une technique de recherche opérationnelle utilisée pour résoudre des problèmes de programmation linéaire avec des contraintes supérieures ou égales, ou des contraintes d'égalité.

Étapes principales

1. **Identifier les contraintes non standards** : La méthode est nécessaire lorsque le problème contient des contraintes de la forme "supérieur ou égal ($\geq$) ou des contraintes d'égalité (=)
2. **Ajouter des variables** :
   - Pour les contraintes $\geq$ ajoutez une **variable de surplus** (qui sera toujours nulle à l'optimum) et une **variable artificielle**.
   - Pour les contraintes d'égalité, ajoutez une **variable artificielle**.
   - Pour les contraintes de la forme ($\leq$)ajoutez seulement une **variable d'écart**.
3. **Modifier la fonction objectif** :
   - **Pour une minimisation** : Ajoutez des variables artificielles avec un coefficient de $+M$ à la fonction objectif.
   - **Pour une maximisation** : Ajoutez des variables artificielles avec un coefficient de $-M$ à la fonction objectif.
   - Les variables de surplus et d'écart n'affectent pas la fonction objectif, elles auront donc un coefficient de 0.
4. **Résoudre** : Appliquez l'algorithme du simplexe à cette nouvelle fonction objectif modifiée. Le grand nombre M pénalise l'utilisation des variables artificielles.
5. **Vérifier la solution** :
   - Si toutes les variables artificielles sont nulles dans la solution optimale, la solution obtenue est la solution optimale du problème original.
   - Si au moins une variable artificielle n'est pas nulle, le problème n'a pas de solution réalisable.

Exemple :

Soit le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Max\ Z = x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard

$$\begin{cases} Max\ Z = x_1 - x_2 + 3x_3 + 0e_1 + 0e_2 - MA_1 - MA_2 \\ x_1 + x_2 + e_1 = 20 \\ x_1 + x_3 + A_1 = 5 \\ x_2 + x_3 - e_2 + A_2 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

e_1: variable d'écart, e_2: variable de surplus, A_1 , A_2: variables artificielles, $M \gg 0$

Tableau de Simplexe

Coeff. dans z (C_j)		1	-1	3	0	0	-M	-M	
Base		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1	A_2	b
Coeff.	Variable								
0	e_1	1	1	0	1	0	0	0	20
-M	A_1	1	0	1	0	0	1	0	5
-M	A_2	0	1	1	0	-1	0	1	10
Z_j		-M	-M	-2M	0	M	-M	-M	-15M
$C_j - Z_j$		1+M	M-1	3+2M	0	-M	0	0	

<u>Choix de la variable entrante dans la base</u>

- Maximum des $C_j - Z_j$ pour des problèmes de max.
- Minimum des $C_j - Z_j$ pour des problèmes de min.

Coeff. dans z (C_j)		1	-1	3	0	0	-M	-M		
Base		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1	A_2	b	Rapport
Coeff.	Variable									
0	e_1	1	1	0	1	0	0	0	20	
-M	A_1	1	0	1	0	0	1	0	5	5
-M	A_2	0	1	1	0	-1	0	1	10	10
Z_j		-M	-M	-2M	0	M	-M	-M	-15M	
$C_j - Z_j$		1+M	M-1	3+2M	0	-M	0	0		

x_3 a le plus grand $C_j - Z_j$ donc elle entre dans la base

<u>Choix de la variable sortante de la base</u>

A_2 a le plus petit rapport donc elle sort de la base

Coeff. dans z (C_j)		1	-1	3	0	0	-M	-M		
Base		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1	A_2	b	Rap.
Coeff.	Variable									
0	e_1	1	1	0	1	0	0	0	20	20
3	x_3	1	0	1	0	0	1	0	5	
-M	A_2	-1	1	0	0	-1	-1	1	5	5
Z_j		3+M	-M	3	0	M	3+M	-M	15-5M	
$C_j - Z_j$		-2-M	-1+M	0	0	-M	-3-2M	0		

De la même manière

Coeff. dans z (C_j)		*1*	*-1*	*3*	*0*	*0*	*-M*	*-M*		
Base		x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1	A_2	b	Rap.
Coeff.	Variable									
0	e_1	*2*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*15*	
3	x_3	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*5*	
-1	x_2	*-1*	*1*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*1*	*5*	
Z_j		*4*	*-1*	*3*	*0*	*1*	*4*	*-1*	*10*	
$C_j - Z_j$		*-3*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*-M-4*	*-M+1*		

Tous les $C_j - Z_j$ sont négatifs ou nuls et il n y a pas de variables artificielles dans la base

Alors la solution optimale est

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 5 \quad z = 10$$

<u>Cas particuliers :</u>

- ***<u>Egalité des $C_j - Z_j$</u>***

  Exemple :

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport	
e_1	1	1	1	0	7		
e_2	2	1	0	1	9		
$C_j - Z_j$	12	12	0	0	0		

1ère possibilité

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport	
e_1	1	1	1	0	7	7/1=7	
e_2	2	1	0	1	9	9/2=4.5	
$C_j - Z_j$	12	12	0	0	0		

2ème possibilité

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport	
e_1	1	1	1	0	7	7/1=7	
e_2	2	1	0	1	9	9/1=9	
$C_j - Z_j$	12	12	0	0	0		

Pour un problème de maximisation nous devons considérer le cas ayant un plus grand rapport. Pour notre cas on choisit la 2ème possibilité.

- ***<u>Egalité des rapport</u>***

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport	
e_1	1	1	1	0	7	7/1=7	
e_2	2	1	0	1	14	14/2=7	
$C_j - Z_j$	8	5	0	0	0		

1ère possibilité

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport	
e_1	1	1	1	0	7	7/1=7	
e_2	2	1	0	1	14	14/2=7	
$C_j - Z_j$	8	5	0	0	0		

$$\frac{S1}{pivot} = \frac{3}{1} = 3$$

2ème possibilité

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport	
e_1	1	1	1	0	7	7/1=7	
e_2	2	1	0	1	14	14/2=7	
$C_j - Z_j$	8	5	0	0	0		

$$\frac{S2}{pivot} = \frac{4}{2} = 2$$

$S1$ et $S2$ est la somme des coefficient

Pour un problème de maximisation nous devons considérer le cas ayant un plus grand $\frac{Si}{pivot}$. Pour notre cas on choisit la 1ère possibilité.

- ***Solution infinie***

Si tous les rapports sont infinis ou négatifs on dit que la solution optimale est non bornée.

Exemple :

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	Rapport
e_1	1	1/3	-1	0	4	-4
e_2	0	3	0	1	7	infini
$C_j - Z_j$	0	-4	2	0		

- ***Solution non réalisable***

  Si au moins une variable artificielle apparait dans la base de la solution optimale alors le programme linéaire correspondant n'a pas de solution réalisable optimale

Exemple :

	x_1	x_2	e_1	A_2	b
x_1	1	1/3	1	0	300
A_2	0	3	2	1	100
$C_j - Z_j$	0	-4	-2	0	-900