

2- Méthode de résolution des EDPs paraboliques

Pour un problème unidimensionnel la formulation est donnée par:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

avec α est un coefficient de diffusion

Les conditions aux limites sont données par:

$$\phi(x=0, t) = \phi_G$$

$$\phi(x=L, t) = \phi_D$$

Avec une condition initiale:

$$\phi(x, t=0) = f(x)$$

Le problème consiste à déterminer $\phi(x, t)$ en point x et à un instant t dans le domaine d'étude

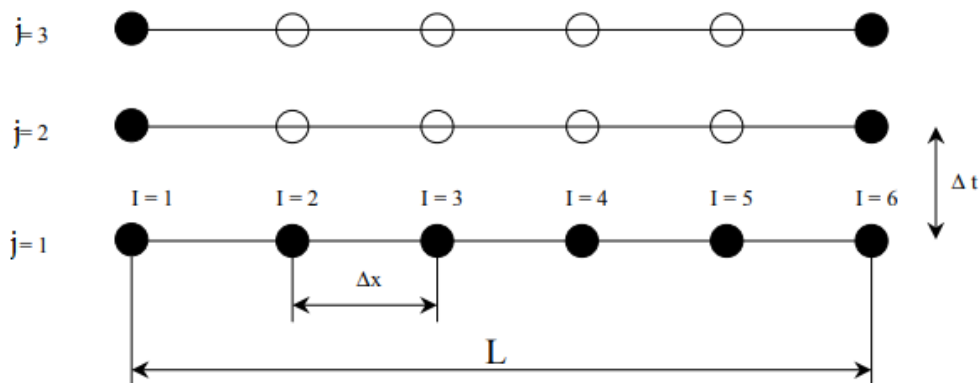
Pour la résolution de l'équation différentielle précédente, il existe essentiellement trois méthodes (schémas):

1. Méthode explicite
2. Méthode implicite
3. Méthode de Crank Nicolson

2-1- Schéma explicite

L'appellation explicite de la méthode se justifie par le fait que la solution recherchée $\phi_{i,j+1}$ à l'instant du temps actuelle $(j+1)\Delta t$ est explicitement déterminée à partir des solutions $\phi_{i-1,j}$, $\phi_{i,j}$, $\phi_{i+1,j}$ connues à l'étape du temps précédente $j\Delta t$

- Maillage



$$m = \frac{L}{\Delta x} + 1 \quad \text{Nombre de nœuds suivant la direction } x$$

$$n = \frac{D}{\Delta t} + 1 \quad \text{Nombre de nœuds suivant la direction } t$$

D est la durée du phénomène physique transitoire

- Discrétisation :

On utilise un schéma d'ordre un pour la dérivée par rapport au temps et un schéma centré d'ordre deux pour la dérivée par rapport à l'espace.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \simeq \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \simeq \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

L'équation différentielle sera approximer comme suit:

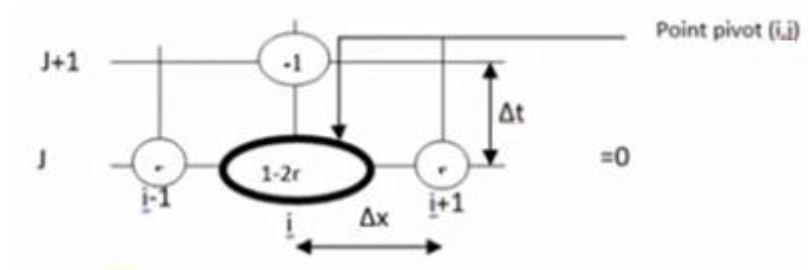
$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

Avec un réarrangement, on obtient:

$$\phi_{i,j+1} = r\phi_{i-1,j} + (1 - 2r)\phi_{i,j} + r\phi_{i+1,j}$$

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Ce schéma est représenté par sous forme moléculaire suivante.



- Stabilité et convergence de la méthode

Le schéma explicite est stable et convergent si

$$r \leq 0.5$$

- Algorithme de la méthode explicite :

Pour $i = 1, m$

$\phi(i, 0) = f(x)$ **Condition initiale** ($t = 0$)

Fin

Pour $j = 1, n - 1$

Pour $i = 2, m - 1$

$\phi(i, j + 1) = r\phi(i - 1, j) + (1 - 2r)\phi(i, j) + r\phi(i + 1, j)$

Fin

Fin

Exemple

Considérons une tige en acier qui est soumise à une température de 100°C à l'extrémité gauche et de 25°C à l'extrémité droite. Si la tige a une longueur $L=0.05m$, utiliser la méthode explicite pour trouver la distribution de la température dans la tige à partir de $t=0s$ à $t=9s$.

Données: $\Delta t = 3s$, $\Delta x = 0.01m$, $\alpha = 1.4129 \cdot 10^{-5}$

La température initiale de tige est 20°C

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{Alors} \quad \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$T_{i,j+1} = 0.4239T_{i-1,j} + 0.1522T_{i,j} + 0.4239T_{i+1,j}$$

Températures aux nœuds lorsque $t=t_1=3s$ ($j=1$)

$$i = 2 \rightarrow T_{2,2} = 0.4239T_{1,1} + 0.1522T_{2,1} + 0.4239T_{3,1} = 53.9089$$

$$i = 3 \rightarrow T_{3,2} = 0.4239T_{2,2} + 0.1522T_{3,2} + 0.4239T_{4,2} = 20.0000$$

$$i = 4 \rightarrow T_{4,2} = 0.4239T_{3,2} + 0.1522T_{4,2} + 0.4239T_{5,2} = 20.0000$$

$$i = 5 \rightarrow T_{5,2} = 0.4239T_{4,2} + 0.1522T_{5,2} + 0.4239T_{6,2} = 22.1193$$

Températures aux nœuds lorsque $t=t_2=6s$ ($j=2$)

$$i = 2 \rightarrow T_{2,3} = 0.4239T_{1,3} + 0.1522T_{2,3} + 0.4239T_{3,3} = 59.0725$$

$$i = 3 \rightarrow T_{3,3} = 0.4239T_{2,2} + 0.1522T_{3,2} + 0.4239T_{4,2} = 34.3727$$

$$i = 4 \rightarrow T_{4,3} = 0.4239T_{3,2} + 0.1522T_{4,2} + 0.4239T_{5,2} = 20.8983$$

$$i = 5 \rightarrow T_{5,3} = 0.4239T_{4,2} + 0.1522T_{5,2} + 0.4239T_{6,2} = 22.4420$$

Températures aux nœuds lorsque $t=t_3=9s$ ($j=3$)

$$i = 2 \rightarrow T_{2,4} = 0.4239T_{1,3} + 0.1522T_{2,3} + 0.4239T_{3,3} = 65.9508$$

$$i = 3 \rightarrow T_{3,4} = 0.4239T_{2,3} + 0.1522T_{3,3} + 0.4239T_{4,3} = 39.1307$$

$$i = 4 \rightarrow T_{4,4} = 0.4239T_{3,3} + 0.1522T_{4,3} + 0.4239T_{5,3} = 27.2639$$

$$i = 5 \rightarrow T_{5,4} = 0.4239T_{4,3} + 0.1522T_{5,3} + 0.4239T_{6,3} = 22.8719$$

Exemple :

Soit à résoudre l'équation de la chaleur suivante par la méthode Explicite de Schmidt :

$$u_t = u_{xx}, 0 \leq x \leq 1, t = 1/3$$

avec

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Si la solution exacte est :

$$u(x, t) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x),$$

2-2- Schéma implicite

Pour formuler la méthode implicite, on évalue la dérivée seconde à l'étape $j+1$ donc:

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{\phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2}$$

On pose

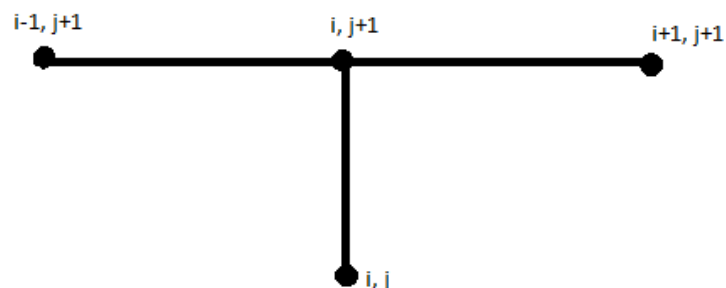
$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Avec un réarrangement, on obtient:

$$\phi_{i,j} = -r\phi_{i-1,j+1} + (1 + 2r)\phi_{i,j+1} - r\phi_{i+1,j+1}$$

à l'étape $j + 1$ les solutions $\phi_{i,j+1}$ sont inconnues

à l'étape j les solutions $\phi_{i,j}$ sont connues.



Le schéma est toujours numériquement stable et convergent, mais plus numérique que le schéma explicite, car il nécessite la résolution d'un système d'équations numériques à chaque pas du temps

- **Algorithme de la méthode implicite :**

Pour $i = 1, m$

$\emptyset(i, 0) = f(x)$ **Condition initiale($t = 0$)**

Fin

Pour $j = 1, n - 1$

Pour $i = 2, m - 1$

$-r\emptyset(i - 1, j + 1) + (1 + 2r)\emptyset(i, j + 1) - r\emptyset(i + 1, j + 1) = \emptyset(i, j)$

(Résoudre un système à chaque pas du temps)

Fin

Fin

Exemple :

Soit l'exemple précédent :

L'équation algébrique s'écrit :

$$-rT(i - 1, j + 1) + (1 + 2r)T(i, j + 1) - rT(i + 1, j + 1) = T(i, j)$$

Si le système est composé de six nœuds alors :

Pour $i=2$

$$-rT(1, j + 1) + (1 + 2r)T(2, j + 1) - rT(3, j + 1) = T(2, j)$$

Pour $i=3$

$$-rT(2, j + 1) + (1 + 2r)T(3, j + 1) - rT(4, j + 1) = T(3, j)$$

Pour $i=4$

$$-rT(3, j + 1) + (1 + 2r)T(4, j + 1) - rT(5, j + 1) = T(4, j)$$

Pour $i=5$

$$-rT(4, j + 1) + (1 + 2r)T(4, j + 1) - rT(6, j + 1) = T(5, j)$$

Avec :

$T(1, j) = 100, T(6, j) = 25$ Présentent les conditions aux limites

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (1 + 2r) & -r & 0 & 0 \\ -r & (1 + 2r) & -r & 0 \\ 0 & -r & (1 + 2r) & -r \\ 0 & 0 & -r & (1 + 2r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(2, j + 1) \\ T(3, j + 1) \\ T(4, j + 1) \\ T(5, j + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(2, j) + rT(1, j + 1) \\ T(3, j) \\ T(4, j) \\ T(5, j) + rT(6, j + 1) \end{bmatrix}$$

$T(1, j + 1) = T(1, j) = 100, T(6, j + 1) = T(6, j) = 25$ (Conditions aux limites)

Les variables de type $T(i, j)$ représentent la solution numérique à l'itération précédente. La solution de ce système donne directement la solution de l'équation. On constate que l'adoption de n'importe quelle valeur du paramètre r aboutit à une solution numérique stable. On conclue que le schéma implicite est inconditionnellement stable.

Pour $r = 0.4239$

Température aux nœuds lorsque $t=t_1=3s$

$$\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & 0 & 0 \\ -r & (1+2r) & -r & 0 \\ 0 & -r & (1+2r) & -r \\ 0 & 0 & -r & (1+2r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(2,2) \\ T(3,2) \\ T(4,2) \\ T(5,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(2,1) + rT(1,2) \\ T(3,1) \\ T(4,1) \\ T(5,1) + rT(6,2) \end{bmatrix}$$

Avec $T(6,2) = T(6,1) = 25$ et $T(1,2) = T(1,1) = 100$ conditions aux limites

$T(2,1) = T(3,1) = T(4,1) = T(5,1) = 20$ condition initiale

$$\begin{bmatrix} 1.8478 & -0.4239 & 0 & 0 \\ -0.4239 & 1.8478 & -0.4239 & 0 \\ 0 & -0.4239 & 1.8478 & -0.4239 \\ 0 & 0 & -0.4239 & 1.8478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(2,2) \\ T(3,2) \\ T(4,2) \\ T(5,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.39 \\ 20 \\ 20 \\ 30.5975 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T(2,2) \\ T(3,2) \\ T(4,2) \\ T(5,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.42 \\ 28.58 \\ 23.87 \\ 23.33 \end{bmatrix}$$

Exemple :

Soit à résoudre le problème

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0.01 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$y(x, 0) = 300$$

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = 0.01$$

2-3- Schéma semi implicite (Crank Nicolson)

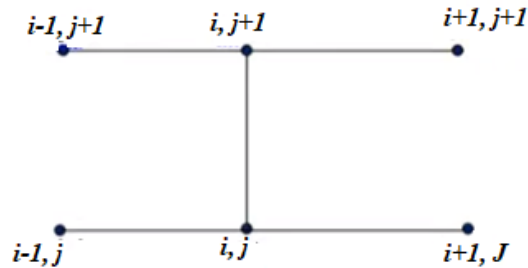
Le schéma est une combinaison des méthodes implicite et explicite. On évalue la moyenne des dérivées secondes de l'équation parabolique par rapport à x en j et $j + 1$.

On a:

$$\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \right)$$

Donc:

$$r\phi_{i-1,j+1} - 2(1+r)\phi_{i,j+1} + r\phi_{i+1,j+1} = -r\phi_{i-1,j} - 2(1-r)\phi_{i,j} - r\phi_{i+1,j}$$



On peut réarranger sous forme matricielle :

$$A\phi^{j+1} = B\phi^j$$

A et **B** sont des matrices tridiagonales

La méthode implicite et la méthode de Crank Nicolson sont toujours stables et convergentes quelques soit r

- **Algorithme de la méthode de Crank Nicolson :**

Pour $i = 1, m$

$\phi(i, 0) = f(x)$ **Condition initiale**($t = 0$)

Fin

Pour $j = 1, n - 1$

Pour $i = 2, m - 1$

$r\phi(i-1, j+1) - 2(1+r)\phi(i, j+1) + r\phi(i+1, j+1)$
 $= -r\phi(i-1, j) - 2(1-r)\phi(i, j) - r\phi(i+1, j)$
(Résoudre un système à chaque pas du temps)

Fin

Fin

Exemple :

Considérons l'exemple étudié par la méthode explicite :

Une tige en acier est soumise à une température de 100°C à l'extrémité gauche et de 25°C à l'extrémité droite. Si la tige a une longueur $L=0.05m$, utiliser la méthode explicite pour trouver la distribution de la température dans la tige à partir de $t=0s$ à $t=9s$.

Données: $\Delta t = 3s$, $\Delta x = 0.01m$, $\alpha = 1.4129 \cdot 10^{-5}$

$$rT(i-1, j+1) - 2(1+r)T(i, j+1) + rT(i+1, j+1) \\ = -rT(i-1, j) - 2(1-r)T(i, j) - rT(i+1, j)$$

Avec :

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.4239$$

L'équation devient :

$$0.4239T(i-1, j+1) - 2.8477T(i, j+1) + 0.4239T(i+1, j+1) \\ = -0.4239T(i-1, j) - 1.1523T(i, j) - 0.4239T(i+1, j)$$

Température aux nœuds lorsque $t=t_1=3s$, $T(i,2)$

$$i=2 \rightarrow 0.4239T_{1,2} - 2.8477T_{2,2} + 0.4239T_{3,2} = -0.4239T_{1,1} - 1.1523T_{2,1} - 0.4239T_{3,1}$$

$$i=3 \rightarrow 0.4239T_{2,2} - 2.8477T_{3,2} + 0.4239T_{4,2} = -0.4239T_{2,1} - 1.1523T_{3,1} - 0.4239T_{4,1}$$

$$i=4 \rightarrow 0.4239T_{3,2} - 2.8477T_{4,2} + 0.4239T_{5,2} = -0.4239T_{3,1} - 1.1523T_{4,1} - 0.4239T_{5,1}$$

$$i=5 \rightarrow 0.4239T_{4,2} - 2.8477T_{5,2} + 0.4239T_{6,2} = -0.4239T_{4,1} - 1.1523T_{5,1} - 0.4239T_{6,1}$$

Or

$$i=2 \rightarrow -2.8477T_{2,2} + 0.4239T_{3,2} = -0.4239T_{1,1} - 1.1523T_{2,1} - 0.4239T_{3,1} - 0.4239T_{1,2}$$

$$i=3 \rightarrow 0.4239T_{2,2} - 2.8477T_{3,2} + 0.4239T_{4,2} = -0.4239T_{2,1} - 1.1523T_{3,1} - 0.4239T_{4,1}$$

$$i=4 \rightarrow 0.4239T_{3,2} - 2.8477T_{4,2} + 0.4239T_{5,2} = -0.4239T_{3,1} - 1.1523T_{4,1} - 0.4239T_{5,1}$$

$$i=5 \rightarrow 0.4239T_{4,2} - 2.8477T_{5,2} = -0.4239T_{4,1} - 1.1523T_{5,1} - 0.4239T_{6,1} - 0.4239T_{6,2}$$

$$\begin{bmatrix} -2.8477 & 0.4239 & 0 & 0 \\ 0.4239 & -2.8477 & -0.4239 & 0 \\ 0 & 0.4239 & -2.8477 & 0.4239 \\ 0 & 0 & 0.4239 & -2.8477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4239T_{1,1} - 1.1523T_{2,1} - 0.4239T_{3,1} - 0.4239T_{1,2} \\ -0.4239T_{2,1} - 1.1523T_{3,1} - 0.4239T_{4,1} \\ -0.4239T_{3,1} - 1.1523T_{4,1} - 0.4239T_{5,1} \\ -0.4239T_{4,1} - 1.1523T_{5,1} - 0.4239T_{6,1} - 0.4239T_{6,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2.8477 & 0.4239 & 0 & 0 \\ 0.4239 & -2.8477 & -0.4239 & 0 \\ 0 & 0.4239 & -2.8477 & 0.4239 \\ 0 & 0 & 0.4239 & -2.8477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -116.2951 \\ -40.0000 \\ -40.0000 \\ -52.7159 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \\ T_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.3724 \\ 23.7462 \\ 20.7968 \\ 21.6070 \end{bmatrix}$$

A t=9s les résultats, pour différentes méthodes sont résumés dans le tableau suivant

température	explicite	implicite	Crank-Nicholson	analytique
T _{1,3}	65.953	59.043	62.604	62.510
T _{2,3}	39.132	36.292	37.613	37.084
T _{3,3}	27.266	26.809	26.562	25.844
T _{4,3}	22.872	24.243	24.042	23.610