الفصــل الــرابع: الدوال الاصلية و حســاب التكـــامل

1. التوابع الأصلية :

تعريف: ليكن $f: [a, b\,] \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية و ليكن $F: [a, b\,] \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية و ليكن $F: [a, b\,] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإنشقاق. نقول ان F دالة أصلية لـ f إذا تحقق الشرط :

$$\forall x \in [a, b\,]:\ F'(x) = f\,(x)$$

نستنتج أنه إذا كان F و G دالتين اصليتين لـ f فإنه

$$\forall x \in [a, b\,]:\quad G'(x) = f\,(x) \quad \text{و} \quad F'(x) = f\,(x)$$

أي أن

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

إذن $G(x) - F(x)$ ثابت أي أن $G(x) - F(x) = C$

أي أن الدوال الأصلية للدالة f لا تختلف عن بعضها الا بثابت C .

نرمز لمجموعة كل الدوال الاصلية لـ f بالرمز $\int f\,(x)dx$ أي أن :

$$\int f\,(x)dx = F(x) + c$$

و تسمى $\int f\,(x)dx$ تكامل غير محدود أو دالة أصلية لـ f.

نظرية:

إذا كان $f: [a, b\,] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و $x_0 \in [a, b]$ فإن $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dt$ دالة أصلية لـ f أي :

f مستمرة على $[a, b\,]$ $\Leftarrow$ f يقبل دالة أصلية عكس الاستلزام غير صحيح أي اذا كان F دالة أصلية لـ $f \not\Rightarrow f$ مستمرة .

مثال:

لتكن $F(x)$ معرفة كما يلي

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sin\dfrac{1}{x}: & x \neq 0 \\ 0 \quad : & x = 0 \end{cases}$$

دالة أصلية لـ f لأن : $F'(x) = f\,(x)$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 2x sin\dfrac{1}{x} - cos\dfrac{1}{x}: & x \neq 0 \\ 0 \quad : & x = 0 \end{cases}$$

و رغم ذلك f غير مستمرة عند $x_0 = 0$.

2. النظرية الأساسية

تعريف:

اذا كان $f:[a,b\,]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و كان F دالة أصلية لـ f أي أن :

$\forall x\in F'(x)=f\,(x)$، عندئذ لدينا : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(x)$

ونرمز بـ : $[F(x)]_a^b = F[b]-F[a]$.

3. كيفية حساب تكامل:

عند حساب $\int f(x)dx$ فإننا نفكر أولا في تطبيق تعريف الدالة الأصلية، فإذا إستطعنا إيجاد

دالة $F(x)$ بحيث يكون $F'(x)=f\,(x)$ فعندئذ يكون لدينا: $\int f(x)dx = F(x)+c$

الجدول التالي يوضح الدوال الأصلية لبعض الدوال، حيث مستنتج من مشتقات بعض الدوال

الدالة	الدالة الأصلية لها	الدالة	الدالة الأصلية لها $c\in\mathbb{R}$
0	a $a\in IR$	$f^n\times f'$ $n\in Q-\{-1\}$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}+c$
a $a\in IR$	$ax+c$	$f\times f'$	$\frac{1}{2}f^2+c$
x^n و $n\in Q-\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\frac{1}{x^n}$ و $n\in Q-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}ln\lvert ax+b\rvert+c$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\frac{f'}{f}$	$ln\lvert f\rvert+c$
$\frac{f'}{f^n}$ و $n\in Q-\{1\}$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}+c$	$f'\times e^f$	e^f+c
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

مثال:

$$\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

أما اذا لم نستطع فعل ذلك لسبب من الأسباب فإننا نلجأ إلى حساب التكامل $\int f(x)dx$ بإحدى الطرق التالية:

1- بطريقة إستبدال المتغير

لحساب $\int f(x)dx$ نغير المتغير بوضع $t = h(x)$ و منه $dt = h'(x)dx$ و نستخرج عبارة $f(x)$ و dx بدلالة t و dt ثم نعوض في التكامل المعطى فنحصل على تكامل يسهل حسابه.

مثال:

لحساب $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx = ??$

نضع $t = 1 + x^3$ فيكون $dt = 3x^2dx$ و منه $x^2dx = \frac{1}{3}dt$ و نحصل على:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx = \int \frac{1}{(1+x^3)^3}x^2dx = \int \frac{1}{t^3}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-3}dt$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{-2}t^{-2} + c = \frac{-1}{6t^2} + c$$

حيث $t = 1 + x^3$ فإن: $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx = \frac{-1}{6(1+x^3)^2} + c$

2. طريقة التكامل بالتجزئة

اذا كان $u.v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ دالتين قالبلتين للإشتقاق فإن:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

و يسمى دستور المكاملة بالتجزئة

مثال:

لنحسب التكامل $\int xsinxdx$

نضع

$$f(x) = \begin{cases} u = x \\ dv = sinxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -cosx \end{cases}$$

اذن:

$$\int xsinxdx =- xcosx - \int(- cosx)dx =- xcosx + sinx + c$$

3. طريقة حسا تكامل دالة كسرية

لحساب تكامل من الشكل $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ **حيث** $P(x)$ **و** $Q(x)$ **كثيري حدود فإننا نقوم بما يلي:**

1- نقسم $P(x)$ **و** $Q(x)$ **اقليديا (عندما تكون درجة** $P(x)$ **أكبر من درجة** $Q(x)$**) و نكتب:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث $h(x)$ **هو ناتج القسمة و** $P_1(x)$ **كثير حدود درجة أقل من درجة** $Q(x)$

2- نفكك $Q(x)$ **إلى جداء مضاريب (ان أمكن) من الشكل** $(ax + b)^n$ **و** $(\alpha x^2 + \beta x + \delta)^m$ **و نكتب عندئذ مثلا:**

$$\frac{P_1(x)}{(ax+b)^n(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_n}{(ax+b)^n} + \frac{C_1x+D_1}{\alpha x^2+\beta x+\delta} + ... + \frac{C_mx+D_m}{(\alpha x^2+\beta x+\delta)^m}$$

حيث A_i، C_i، D_i، γ، δ، β، α، b، a **كلها ثوابت نعينها بعد توحيد المقامات و مطابقة الطرفين و بذلك نكون قد حصلنا على تفكيك للكسر** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ **ثم نكامل الطرفين فنجد** $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

مثال: لحساب $\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} dx$

نرى أن

$$\frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} = x^2 + \frac{1}{x^2-1} = x^2 + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = x^2 + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+1)}$$

توحيد المقامات و المطابقة نجد: $A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}$**. و منه**

$$\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2-1} dx = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x^2-1} = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{2(x-1)} + \int \frac{dx}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ln|x - 1| + \frac{1}{2}ln|x + 1| + c$$

مثال: لحساب $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$

نرى أن مميز المقام $\Delta = 9 - 8 > 0$ اذن المقام يقبل جذرين $x_1 = 1 , x_2 = 2$ و منه

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-1)}$$

إذن عد توحيد المقامات و المطابقة نجد: $A_1 =- 2, A_2 = 3$. و التالي

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-2}{(x-2)}dx + \int \frac{3}{(x-1)}dx =- 2\int \frac{dx}{(x-2)} + 3\int \frac{dx}{(x-1)}$$

$$=- 2ln|x - 1| + 3ln|x - 1| + c$$

مثال: لحساب $L = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

نرى أن مميز المقام $\Delta = 1 - 4 < 0$ و بالتالي $x^2 + x + 1 > 0$ أي لا يملك جذور، لا يفكك إلي مضاريب في هذه الحالة نقوم بإكماله إلى مربع كامل كالتالي:

$$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

أي

$$L = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

ثم نضع $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ فيكون $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}t^2$ و $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$ و منه يصبح

$$L = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}arctan(t) + c$$

و بما أن $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})$، إذن

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})) + c$$

4. التكامل بالتـــدريج

لحسا تكامل من الشكل $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ مثلا فإننا نعتبر التكامل $I_n = \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ و نحسب مكاملين بالتجزئة عبارة عن I_{n-1} فنجد علاقة تدريجية تربط بين I_n و I_{n-1} و منه نحسب I_1، I_2،...

لحساب $I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$ نضع

$$dv = dx \longrightarrow v = x$$

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \longrightarrow du = \frac{-2(n-1)x}{(x^2+1)^n}$$

و حسب دستور التجزئة:

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)[I_{n-1} - I_n]$$

و منه $n \geq 2$

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)}I_{n-1}$$

و حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctanx$$

$$I_0 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^0} = \int dx = x$$

$$n = 2 \Rightarrow I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}I_1$$

$$n = 3 \Rightarrow I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2$$

نظرية:

إذا كان f و g يقبلان المكاملة فإن $f \pm g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, يقبلان المكاملة و لدينا

$$\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

و لدينا الخواص التالية :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$