الفصـل الـثالث: الدوال اللوغاريتمية و الأسيـــة

التـــابع اللوغاريتمي

تعريف: بما أن التابع

$$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = \frac{1}{x}$$

مستمر فله تابع أصلي F، نسمي هذا التابع الأصلي بالتابع اللوغارتمي الطبيعي (أو النيبيري) و نرمز له بالرمز $F(x) = lgx$ و هو معرف بـ:

$$logx = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

نظرية[4]:

ليكن التابع $log:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ و $a > 0,\ b > 0$ عندئذ الشروط التالية محققة:

1- $log(ab) = lga + logb$

2- $log(\frac{a}{b}) = loga - logb$

3- $log1 = 0$

4- $(log)' = \frac{1}{x}$

5- $\forall r \notin \mathbb{Q}: log(a^r) = rloga$

6- $\lim_{x \to 0^>} logx = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} logx = +\infty$

7- التابع log مستمر و متزايد على $]0, +\infty[$

ملاحظة:

يمثل التكامل $logx = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ من أجل $x > 1$ المساحة المحدودة من الأعلى بالمنحنى: $y = \frac{1}{t}$ و من الأسفل بالمحور ot، و من اليسار بالمستقيم $t = 1$ و من اليمين المستقيم $t = x$.

فإذا كان: $x = 1$ تطابق الحدان الأيمن و الأيسر للمساحة و أصبحت المساحة صفرا أي

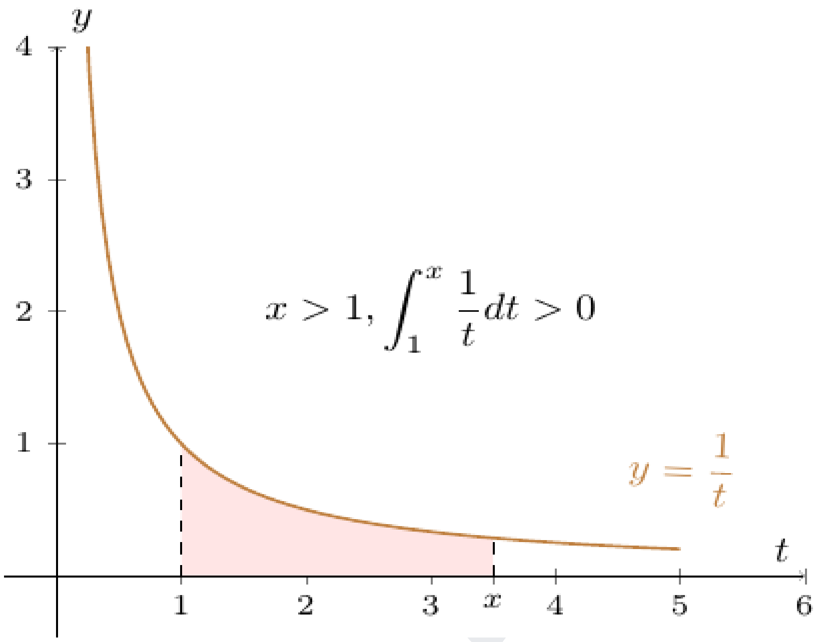
$$log1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$$

[4] يمكنكم الاطلاع على برهان النظرية في الصفحة 176 من كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر.

أما إذا كانت $0 < x < 1$ فيكون التكامل

$$logx = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = -\int_{x}^{1} \frac{dt}{t}$$

مساويا للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحنى بين x و 1.



بيان الدالة $y = logx$

يعطى ميل المنحنى بـ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ويمر المنحنى من النقطة $(1, 0)$ لان $log1 = 0$

و يكون ميله عند هذه النقطة مساويا $(+1)$لذلك فالمماس في هذه النقطة يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع المحورox.

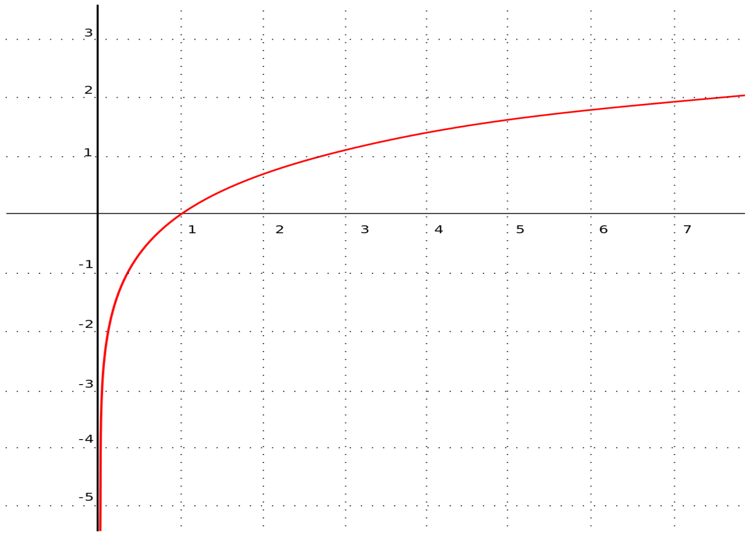
و حيث أن $y' = \frac{1}{x} > 0$ فإن التابع متزايد تماما. و بما أن $y' \to 0$ لما $x \to +\infty$

فالمماس يوازيox و $y' \to +\infty$ لما $x \to \underset{>}{0}$ فالمماس يوازي oy.

و حيث $logx \to +\infty$ و $logx \to -\infty$ لما $x \to \underset{>}{0}$ فإن جدول التغيرات هو :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+	⋮	−	
$logx$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

و البيان هو:



تعريف:

إذا كان g تابعا قابلا للاشتقاق عند نقطة x و $g'(x) \neq 0$ و $g(x) > 0$ فإن:

$$(log g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

التابع الأسي

تعريف:

بما أن التابع اللوغارتمي معرف بـ:

$log:]0, +\infty[\to] -\infty, +\infty[$ و هو مستمر و متزايد تماما، فله تابع عكسي

log^{-1} معرف بـ: $log^{-1}:]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ و هو مستمر و متزايد تماما.

نسمي هذا التابع العكسي log^{-1} بالتابع الأسي و نرمز له بالرمز exp أي أن

$exp = log^{-1}$ و بالتالي فإن:

$$exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

$$x \to \exp(x)$$

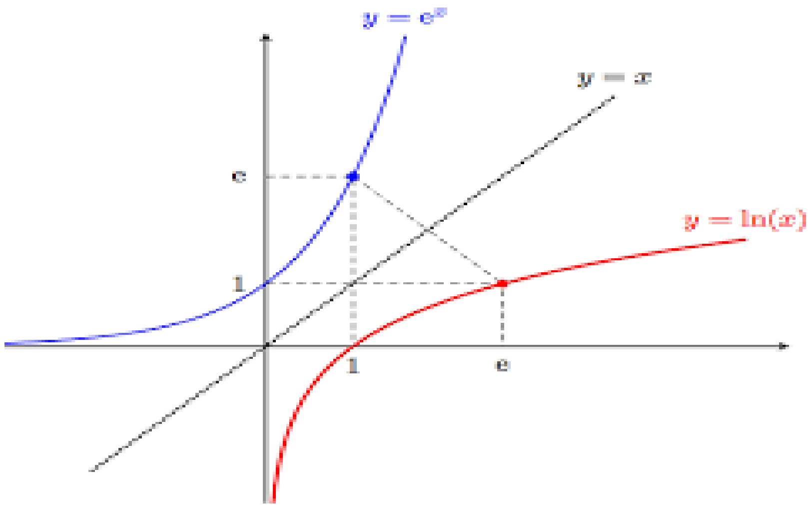
و هو مستمر و متزايد تماما و نكتب اصطلاحا $exp(x) = e^x$. و لدينا.

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \forall y \in]0, +\infty[: x = logy \Leftrightarrow y = e^x$$

باعتبارهما تابعين متعاكسين.

بيان $y = e^x$

بيان التابع الأسي يناظر بيان تابعه العكسي بالنسبة لمنصف الربع الأول كما هو موضح في الرسم أدناه.



مما تقدم من خواص log أن :

$$e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{و} \quad e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

نظرية: **التابع الأسي**

$$e: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$
$$x \to y = e^x$$

يحقق الشروط التالية :

1- **التابع الأسي مستمر و متزايد تماما على** $\mathbb{R}$

2- $(e^x)' = e^x$ و $(e^x)^{(k)}\ ; k \in \mathbb{N}$

3- $\forall x, y \in]-\infty, +\infty[:\ e^{x+y} = e^x e^y$

4- $\forall x, y \in]-\infty, +\infty[:\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

5- $\forall x, y \in]-\infty, +\infty[: (e^x)^r = e^{rx};\ r \in \mathbb{R}$

6- $e^{rloga} = a^r\ ;\ r \in \mathbb{R}\ ;\ a \in \mathbb{R}_+^*$

نشر الدوال

ان هدف نشر الدوال هو إيجاد طريقة سهلة لحساب قيم تقريبية لهذه الدوال، بالإضافة الى استخدام منشور الدوال في حساب نهايات بعض الدوال بعد رفع حالات عدم التعيين وسنتطرق فيما يلي الى منشور تايلور ومنشور ماك لوران والنشر المحدود للدوال بجوار الصفر.

دستور تايلور (نشر تايلور)[5]

ليكن $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ **كثير حدود من الدرجة** n **(أي** $a_n \neq 0$ **حتما).**

ولتكن x_0 **نقطة معلومة مثبتة. نكتب** $P(x)$ **في القوة المتزايدة لــ** $(x - x_0)$ **بالشكل:**

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n \text{ .... } (1)$$

و لتعيين الأمثال $b_n ،...، b_0$ **نحسب مشتقات** $P(x)$ **حتى المرتبة** n**:**

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n$$

$$P'(x) = \qquad b_1 + 2b_2(x - x_0) \; + ... + nb_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = \qquad\qquad 2b_2 + 6b_3(x - x_0) \; ... + n(n - 1)b_n(x - x_0)^{n-2}$$

...

$$P^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2)......1.b_n$$

و بوضع : $x = x_0$ **في العبارات السابقة نجد أن:**

$$P(x_0) = b_0 = 0!\,b_0 \Rightarrow b_0 = \frac{P(x_0)}{0!}$$

$$P'(x_0) = b_1 = 1!\,b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}$$

$$P''(x_0) = 2b_2 = 2!\,b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}$$

...

$$P^{(n)}(x_0) = n!\,b_n \Rightarrow b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$

و بالتعويض $b_0,...,b_n$ **في العبارة (1) نجد:**

$$P(x) = P(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}P'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}P''(x_0)$$

$$+ ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}P^{(n)}(x_0) \text{ .... } (2)$$

يسمى الدستور (2) بدستور تايلور لكثير الحدود $P(x)$ **في جوار النقطة** x_0 **(أو نشر تايلور لكثير الحدود** $P(x)$ **بجوار النقطة** x_0 **).**

مثال:

نشر تايلور بجوار النقطة $x_0 = 1$ **لكثير الحدود** $P(x) = 3x^2 + 5x + 2$ **هو**

[5] للإطلاع أكثر أنظر كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر ص 39 من الجزء الثاني.

$$P(x) = P(1) + \frac{(x-1)}{1!}P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)$$

و نتوقف عند P'' لأن $P(x)$ من الدرجة 2 و بالتالي $P'''(x) = 0$ و حيث :
$P'(x) = 6x + 5$ و $P''(x) = 6$ فإن : $P(1) = 10$، $P'(1) = 11$،
$P''(1) = 6$ و منه:

$$P(x) = 10 + \frac{(x-1)}{1!}11 + \frac{(x-1)^2}{2!} \times 6$$

$$P(x) = 10 + 11(x - 1) + 3(x - 1)^2$$

- **لاحظ أن لو قمنا بفك الأقواس من هذه العبارة الأخيرة فإننا نحصل من جديد على نفس العبارة الأولى لـ $P(x)$.**
- **نشر كثير حدود معين لا يغير شيئا في عبارة التابع $P(x)$، بل كل ما هناك أنه يعطي شكلا جديدا لكتابة كثير الحدود $P(x)$ يسهل علينا الحصول على نتائج مفيدة حول التابع، لم نكن قادرين الحصول عليها قبل النشر.**

دستور تايلور

ليكن $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا يقبل الإشتقاق حتى المرتبة n

1. **إذا كان f كثير حدود درجته n فإن نشر تايلور له بجوار نقطة $x_0 \in I$ هو:**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) +\ldots+ \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

2. **إذا كان f ليس كثير حدود أو كثير حدود درجته أكبر من n، فإن $f(x) \neq P(x)$، حيث $P(x)$ كثير حدود درجته n، في هذه الحالة يمكن تمثيل $f(x)$ بكثير الحدود $P(x)$ بصورة تقريبية في جوار x_0. و يكون الخطأ المرتكب في هذا التقريب هو $R(x)$. أي أن: $f(x) = P(x) + R(x)$ و منه يكون نشر تايلور للتابع $f(x)$ بجوار x_0 هو:**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) +\ldots+ \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R(x)$$

يسمى $R(x)$[6] بالخطأ المرتكب أو الحد الباقي في نشر تايلور للتابع f بجوار x_0.

ملاحظة:

- إذا كان $f(x)$ كثير حدود درجته n فإن $R(x)$.
- إذا كان $x_0 = 0$ فإن نشر تايلور لـ $f(x)$ هو:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) +\ldots+ \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R(x)$$

و يسمى هذا النشر الأخير بنشر ماك لوران للتابع f .

[6] يمكن الإطلاع أكثر على كيفية تعيين الخطأ المرتكب في كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر ص42 من الجزء الثاني.

مثال: ليكن $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ أكتب نشر تايلور لـ f بجوار $x_0 = 0$ و بجوار $x_1 = 1$

$x \rightarrow f(x) = e^x$

بما أن e^x يقبل الإشتقاق من أي مرتبة أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: f^{(n+1)}(x) = (e^x)^{(n+1)} = e^x$$

إذن النشر بجوار $x_0 = 0$:

$$e^x = e^0 + \frac{x}{1!}e^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 +...+ \frac{x^n}{n!}e^0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} +...+ \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

بجوار $x_0 = 1$:

$$e^x = e^1 + \frac{(x-1)}{1!}e^1 +...+ \frac{(x-1)^n}{n!}e^1 + \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{1+\theta(x-1)}$$

أي أن:

$$e^x = e + \frac{(x-1)}{1!}e +...+ \frac{(x-1)^n}{n!}e + \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{1+\theta(x-1)}$$

النشر المحدود

تعريف: ليكن f تابعا معرفا بجوار x_0 ما عدا عند x_0 على الأكثر.

نقول أن f يقبل نشرا محدودا (منته) من المرتبة n بجوار x_0 إذا إذا أمكن كتابة $f(x)$ بالشكل التالي:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +...+ a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

مع $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ لما $x \rightarrow x_0$ ($a_n \neq 0$ على الأقل).

و ذلك من أجل كل x في جوار x_0، و هذا النشر وحيد.

أي إذا أمكن إيجاد $a_0, a_1,..., a_n$ تحقق تلك الكتابة لـ f. يقال أن f يقبل نشرا محدودا بجوار x_0 وفق القوى المتزايدة لـ $(x - x_0)$.

أما إذا كان $\frac{1}{x-x_0}$ محدودا أي $\exists k > 0: \left|\frac{1}{x-x_0}\right| < k$. فيقال أن f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار x_0 وفق القوى المتناقصى لـ $(x - x_0)$ إذا أمكن كتابة $f(x)$ بشكل وحيد على الصورة:

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{(x-x_0)} + \frac{b_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(x-x_0)^n} + \frac{\varepsilon(x)}{(x-x_0)^n}$$

$\varepsilon(x) \to 0$ **لما** $x \to +\infty$ $(b_n \neq 0)$ على الأقل)

أي إذا أمكن إيجاد أعداد $b_0, b_1, \dots, b_n$ تحقق تلك الكتابة لـ f.

ملاحظة[7]:

نشر تايلور ⇐ النشر المحدود، و العكس غير صحيح في الحالة العامة.

أي إذا قبل f نشرا محدودا فليس بالضرورة يقبل نشرا وفق تايلور.

خواص النشور المحدودة:

- النشر المحدود لمجموع دالتين يساوي مجموع النشور المحدودة لهما.
- النشر المحدود لضرب دالتين يساوي ضرب النشور المحدودة لهما مع الحتفاظ بالحدود من الرتب الدنيا.
- النشر المحدود لقسمة دالتين يساوي قسمة الجزء الرئيسي لنشر دالة البسط على الجزء الرئيسي لنشر دالة المقام وفق الأسس المتزايدة إلى الرتبة n.

النشر المحدود لبعض الدوال الأولية في جوار الصفر

e^{ax}	$= 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ax)^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\cdots)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots + x^n + o(x^n)$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{ch} x$	$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\operatorname{sh} x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\tan x$	$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$

[7] يمكن الإطلاع أكثر على تبرير الملاحظة في كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر ص46 من الجزء الثاني.

مثال: أوجد نشرا محدودا بجوار $x_0 = 0$ من الرتبة $n = 2$ للتابعين التاليين:

$$f_1(x) = \left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)^3 \quad , \quad f_2(x) = \frac{x}{e^x-1}$$

1. لدينا بجوار $x_0 = 0$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O\left(x^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)^3 = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O\left(x^2\right)\right)^3$$

نضع: $y =- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^2)$

بجوار الصفر لدينا $(1 + y)^3 = 1 + 3y + \frac{6y^2}{2!} + O\left(y^2\right)$

و منه

$$\left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)^3 = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{4} + O(x^2).$$

2. لدينا بجوار $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O\left(x^3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + O\left(x^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+O\left(x^2\right)}$$

نضع: $y = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + O(x^2)$

و منه بجوار الصفر لدينا $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O\left(y^2\right)$

و منه

$$\Rightarrow \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+y} = 1 - \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}\right) + \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}\right)^2 + O\left(x^2\right)$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + O(x^2).$$