الفصـــل الثـــانـــي: التـــوابع الحقيقيـــة بمتغيـــر حقيقـــي

عموميات على الدوال

1. مجموعة تعريف

تعريف و ترميز:

الدالة f بمتغير حقيقي، هي كل تطبيق f معرف على $\mathbb{R}$ و يأخذ قيمة في $\mathbb{R}$ (أو معرف على جزء من $\mathbb{R}$ و يأخذ قيمة في جزء من $\mathbb{R}$)، أي:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

أو

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

- المجموعة D_f هي مجال تعريف الدالة f حيث:

$$D_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R}/ \text{معرفة } f\}$$

- $C_{\mathbb{R}}$ هي بيان الدالة f حيث:

$$C_{\mathbb{R}} = \left\{(x, f(x)/x \in D_f\right\}.$$

مثال:

1. دوال كثيرات الحدود ($ax^n + bx^{n-1} + \ldots$,$sin(x)$,$cos(x)$) معرفة على $\mathbb{R}$ أي $D_f = \mathbb{R}$.
2. الدوال الناطقة: $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \neq 0\}$.
3. الدالة الجذرية: $f(x) = \sqrt{g(x)} \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \geq 0\}$.
4. الدالة الناطقة و مقامها دالة جذر:
   $f(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}} \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \geq 0\}$.
5. الدالة اللوغاريتمية : $f(x) = ln[g(x)] \leftarrow D_f = \{x \in \mathbb{R}/g(x) > 0\}$.

مثال:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \frac{1}{x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0\} = \mathbb{R}^*.$$

مثال:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x - 1 > 0\} =]1, +\infty[$$

2. شفاعية دالة (زوجية / فردية):

تعريف:

لتكن f دالة بمتغير حقيقي، نقول أن:

- f دالة زوجية يعني أن :

$$\forall x \in D_f, (-x) \in D_f: f(-x) = f(x).$$

نقول ان بيان الدالة f متناظر بالنسبة للمستقيم (oy) .

- f دالة فردية يعني أن :

$$\forall x \in D_f, (-x) \in D_f: f(-x) = -f(x).$$

نقول ان f متناظرة بالنسبة لنقطة المبدأ O.

النهايات

1. تعريف النهاية

تعريف:

ليكن $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ حيث $I \subseteq \mathbb{R}$ ولتكن $x \in I$ و x_0 نقطة داخلية في I $(a < x_0 < b)$ و f معرفة على I بإستثناء x_0 على الأكثر

1. نقول أن f يقبل نهاية على يمين x_0 اذاا:

$\lim_{x \to {>}x_0} f(x) = l_1$ موجودة و وحيدة

2. نقول أن f يقبل نهاية على يسار x_0 اذاا:

$\lim_{x \to {<}x_0} f(x) = l_2$ موجودة و وحيدة

3. نقول أن f يقبل نهاية عند x_0 اذا كانت $(l_1 = l_2)$ أي:

$\lim_{x \to {>}x_0} f(x) = \lim_{x \to {<}x_0} f(x) = l$ (l هي القيمة المشتركة لـ l_1 و l_2)

و نرمز لذلك اختصارا بالرمز $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

ملاحظة:

بعض حالات عدم التعيين المتداولة و المهمة هي :

$$\frac{0}{0}، \frac{\pm\infty}{\pm\infty}، 0 \times \infty، -\infty + \infty، 1^{\infty}، 0^{\infty}، \infty^{\infty}،...$$

يعني أن لإيجاد و حساب نهاية تدعي إزالة عدم التعيين.

2. خواص النهايات

نظرية:

إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ **و** $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ **حيث** $a, b \in \mathbb{R}$ و $x_0 \in \mathbb{R}$ أو x_0,

فإن:

1. $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda a + \mu b$ **من أجل كل** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a.b$

3. **إذا كان** $b \neq 0$ **فإن:** $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

حالات خاصة

1. **إذا كان** $\lambda = \mu = 1$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$

2. **إذا كان** $\mu =- 1$ **و** $\lambda = 1$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$

3. **إذا كان** $\mu = 0$ **و** $\lambda \in \mathbb{R}$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x)] = \lambda a$

4. **إذا وضعنا** $f(x) = g(x)$ **نجد أن:** $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^2 = a^2$ **و بصورة أعم يكون**

لدينا $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = a^n$

5. $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = a \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} [f(x) - a] = 0$

6. **إذا كان** $f(x) \leq g(x)$ **في جوار ما لنقطة** x_0 **فإن** $a \leq b$ **و صورة خاصة : إذا**

كان $f(x) \leq k$ **في جوار ما للنقطة** x_0 **فإن** $a \leq k$.

ملاحظات: إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

1. لما $a \neq \pm\infty$ و $0 \neq$ و $b = \pm\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

2. لما $a \neq +\infty$ و $b = +\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = +\infty$$

3. لما $a = -\infty$ و $b = -\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = +\infty$$

4. لما $a = -\infty$ و $b = -\infty$ **يكون:**

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = \frac{\infty}{\infty}$$ ح ع ت

نظرية:

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ و $h(x)$ **دالة ما تحقق المتراجحة :**

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ **في جوار النقطة** x_0 **فإن :** $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$

الاستمرارية

1. تعريف الاستمرارية

تعريف:

لتكن f دالة حقيقية معرفة على المجال I و I $x_0 \in$

1. نقول أن f مستمرة عند x_0 إذا وفقط اذا تحقق:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

يمكن أن نعيد كتابة التعريف كالتالي :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in I:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2. نقول أن f مستمرة على يمين x_0 إذا وفقط اذا تحقق:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$$

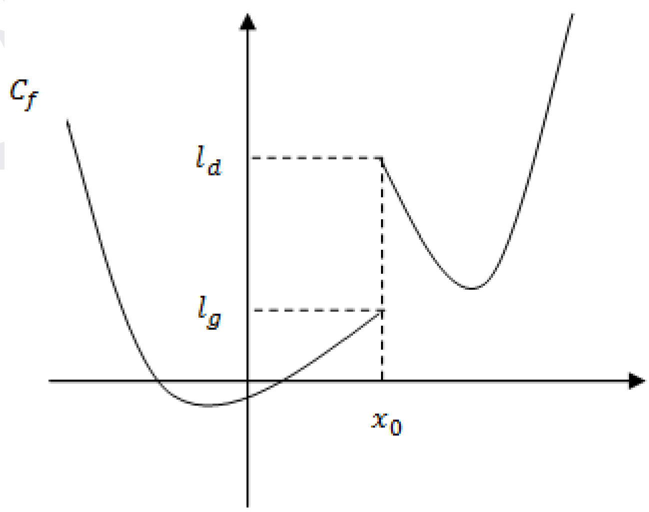
3. نقول أن f مستمرة على يسار x_0 إذا وفقط اذا تحقق:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

4. إذا كانت f مستمرة من يمين و من يسار x_0 إذن f مستمرة عند x_0.

5. نقول أن f مستمرة على مجال $[a, b]$ اذا كانت مستمرة على كل نقطة $x \in]a, b[$ و مستمرة على يمين a و مستمرة على يسار b.

مثال:



مثال:

1. الدالة $f(x) = x + 2$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ كلها لانه إذا كانت $x_0 \in \mathbb{R}$ لدينا $\lim_{x \to x_0} (x_0 + 2) = f(x_0)$

2. لتكن الدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 1 \\ 1 & , x = 1 \\ x + 2 & , x < 1 \end{cases}$$

لدينا $\lim_{x \to {}_{<}1} g(x) = \lim_{x \to {}_{<}1} (x + 2) = 3$ ، إذن g غير مستمرة على يسار 1 لان

$$3 = \lim_{x \to {}_{<}1} g(x) \neq g(1) = 1$$

لدينا $\lim_{x \to {}_{>}1} g(x) = \lim_{x \to {}_{>}1} x^2 = 1$ ، و $g(1) = 1$ إذن g مستمرة على يمين 1.

إذن الدالة g غير مستمرة عند $x_0 = 1$.

3. لتكن الدالة g معرفة كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} 2x & , x \leq 0 \\ 2x + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

دراسة استمرارية الدالة g على مجال تعريفها حيث $D_g = \mathbb{R}$

- على المجال $]0, +\infty[$; $g(x) = 2x + 1$ دالة خطية إذن مستمرة.
- على المجال $]-\infty, 0[$; $g(x) = 2x$ دالة خطية إذن مستمرة.
- دراسة استمرارية الدالة عند **0**

__على يمين 0:__ $\lim_{x \to {}_{>}0} g(x) = \lim_{x \to {}_{>}1} (2x + 1) = 1 \neq g(0)$

و منه g غير مستمرة على يمين **0**.

__على يسار 0:__ $\lim_{x \to {}_{>}0} g(x) = \lim_{x \to {}_{>}1} (2x) = 0 = g(0)$ و منه

g مستمرة على يسار **0**.

g مستمرة على يسار **0** و غير مستمرة على يمين **0** إذن g غير مستمرة عند **0**.

إذن g مستمرة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

ملاحظة:

لكي تكون f مستمرة عند x_0 يجب ان تتوفر شروط ثاثة

1. أن تكون f معرفة عند x_0
2. أن تكون $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة و وحيدة
3. أن تكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

إذا لم تتحقق أحد الشروط الثلاثة الاسابقة فإن f غير مستمرة

نظرية:

1. إذا كان $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين مستمرتين عند النقطة $x_0 \in I$ فإن الدوال :
$f \pm g$ ،$f.g$ ، $\frac{f}{g}\left(g(x_0) \neq 0\right)$ كلها مستمرة عند x_0 .
2. إذا كان $g \circ f$ معرفا و كان f مستمرا عند $g(x_0)$ فإن : $g \circ f$ يكون مستمرا أيضا عند x_0.

نظريات:

1. إذا كان $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و كان f مستمرا عند y_0 و كانت $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ و $g \circ f$ معرفا فإن :
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$$
2. إذا كان $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و كان f مستمرا عند y_0 و كانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = y_0$ فإن:
$$\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = f(y_0)$$
3. إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ فإن:

مثال: لتكن $f(x) = \frac{sin(x)}{x^2+1}$ معرفة $D_f = \mathbb{R}$

- $sin(x)$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{x^2+1}$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$
- الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2. التمديد بالإستمرار

تعريف:

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$. فإذا كان f غير معرف عند x_0، فهو غير مستمر عند x_0 فهو غير مستمر عند x_0. في هذه الحالة إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ، عندئذ يكون

التطبيق g المعرف بـ:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq x_0 \\ l & : x \neq x_0 \end{cases}$$

مستمرا عند x_0. نسمي g التمديد بالاستمرار لـ f عند x_0

مثال:

1. $f(x) = \frac{sinx}{x}$ ليس مستمرا عند $x_0 = 0$، لكن $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ **نمدد f بالاستمرار عند $x_0 = 0$ فنحصل على:**

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x \neq 0 \end{cases}$$

2. بينما الدالة

$$g(x) = \begin{matrix} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{x} \end{matrix}$$

لا يمكن تمديده بالاستمرار نظرا لعدم وجود $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

3. التابع المحدود

تعريف:

لتكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة ما، نقول أن f محدود على الجزء I إذا تحقق الشرط

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I: |f(x)| \leq k$$

نظرية:

إذا كان $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ، مستمرا على المجال المغلق المحدود $I = [a, b]$ فإنه لدينا ما يلي:

1. f يكون محدود أعلى I

2. f يبلغ (يدرك) حديه الأعلى و الأدنى على I أي أنه :

$$\exists x_0, x_1 \in I,\ f(x_0) = inf(f(x))$$
$$f(x_1) = sup(f(x))$$

4. نظرية القيم المتوسطة

نظرية: نظرية القيم المتوسطة لها أشكال عديدة منها:

إذا كان $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ مستمرا على المجال المغلق المحدود I فإن:

$$\forall \lambda \in [inf(f(x)), sup(f(x))]$$
$$\Rightarrow \exists c \in [a, b]$$
$$f(x) = \lambda \text{ بحيث}$$

و من أهمها نظرية بولزانوا التي تنص على مايلي:

إذا كان $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ مستمرة على مجال محدود $[a, b]$ و كان الجداء $f(a). f(b) < 0$ إذن :

$$\exists c \in [a, b]:\ f(c) = 0$$

مثال:

أثبت أن المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$ تقبل على الأقل جذر حقيقي على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

- f مستمرا على $\mathbb{R}$ إذن فهي مستمرة على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$
- لدينا $f(\frac{1}{2}). f(\frac{3}{4}) < 0$ بتطبيق نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد على الأقل جذر حقيقي $c \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

5. التوابع المتعاكسة

تعريف: ليكن $f,\ g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعين معرفين، يقال أن f و g تابعين متعاكسين إذا تحقق الشرطين:

$$g(x) = \begin{cases} y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = g\big(f(x)\big) = x \\ \text{و} \\ x = g(y) \Leftrightarrow f(x) = f\big(g(y)\big) = y \end{cases}$$

6. الدوال الرتيبة

تعريف: ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. نقول أن f متزايد (متزايد تماما) على I إذا تحقق:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y)$

2. نقول أن f متناقصا (متناقصا تماما) على I إذا تحقق:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y)$

3. نقول أن f رتيب على I إذا كان f متزايدة أو متناقصة و نقول أن f رتيب تماما إذا كان f متزايدة تماما أو متناقصة تماما.

نظرية:

إذا كان $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرة على مجال مغلق ومحدود I و كان f متزايدا تماما على I عندئذ يكون لدينا مايلي:

1. يكون $f:\ [a, b] \to [f(a), f(b)]$ تقابلا و بالتالي له تابع عكسي

2. $g: [f(a), f(b)] \to [a, b] = f^{-1}$ يكون مستمرا و متزايدا تماما أيضا.

الإشتقاق

1. مشتق دالة عند نقطة، مشتق دالة على مجال (الدوال المشتقة)

تعريف: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند النقطة عند $x_0 \in]a, b[$ إذا كانت النهاية (المنتهية)

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(x \in [a, b])$ موجودة و وحيدة.

تسمى هذه النهاية الوحيدة بمشتق f عند x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$ أي أن:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مثال:

1. إذا كان $f(x) = c$ ثابت فإن $f'(x) = 0$ لأن :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

2. إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x_0) = nx^{n-1}$ لأن :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...+x_0^{n-1}\right)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 +...+ x_0^{n-1}\right)$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-1} +...+ x_0^{n-1}$$

$$= nx_0^{n-1}$$

تعريف: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x \to_{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة و وحيدة، نقول أن f يقبل الإشتقاق على اليمين x_0 أو من اليمين و تسمى هذه النهاية المشتق من اليمين و نرمز لها بالرمز

$$f_d'(x_0) = f(x_0 + 0)$$

- بنفس الشكل نعرف المشتق على يسار x_0 و نرمز له بـ:

$$f_g'(x_0) = f(x_0 - 0) \lim_{x \to_{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي أن x يقترب نحو x_0 بقيم أقل أو أصغر من x_0 $(x \to_{<} x_0)$

- نقول أن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على كل نقطة $x \in]a, b[$ و f قابلة للاشتقاق على يمين a و قابلة للاشتقاق على يسار b

ملاحظة:

إذا كان f قابلة للإشتقاق من اليمين و من اليسار و إذا كان $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$ إذن نقول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0

مثال:

1. $f(x) = |x|$ و ليكن $x_0 = 0$

$$f_d'(0) = \lim_{x \to_{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to_{>} x_0} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x \to_{>} x_0} \frac{x}{x} = 1$$

و منه f يقبل الإشتقاق على اليمين $x_0 = 0$

$$f_g'(0) = \lim_{x \to x_0^<} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^>} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x \to x_0^>} \frac{-x}{x} = -1$$

و منه f تقبل الاشتقاق على اليسار $x_0 = 0$

لدينا $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ إذن f لا يقبل الإشتقاق عند **0.**

2. $f(x) = \sqrt{x}$ و ليكن $x_0 = 0$ حيث $D_f = [0, +\infty[$

f **لا يقبل الإشتقاق عند 0 لان:**

$$\lim_{x \to x_0^>} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^>} \frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x \to x_0^>} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3. لتكن الدالة g معرفة كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} 2x & ,x \leq 0 \\ 2x+1 & ,x > 0 \end{cases}$$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على مجال تعريفها $\mathbb{R}$

- على المجال $]0, +\infty[$ الدالة $g(x) = 2x + 1$، g دالة تآلفية إذن g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
- على المجال $]-\infty, 0[$ الدالة $g(x) = 2x$، g دالة خطية إذن g قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$
- على يمين $x_0 = 0$:

$$g_d'(0) = \lim_{x \to x_0^>} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^>} \frac{2x+1}{x} = +\infty$$

إذن g لا يقبل الإشتقاق على يمين **0**

- على يسار $x_0 = 0$:

$$g_g'(0) = \lim_{x \to x_0^>} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^>} \frac{2x}{x} = 2$$

إذن g قابلة للاشتقاق على يسار **0**

و منه g غير قابلة للاشتقاق عند **0**

وبالتالي g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

قضية :

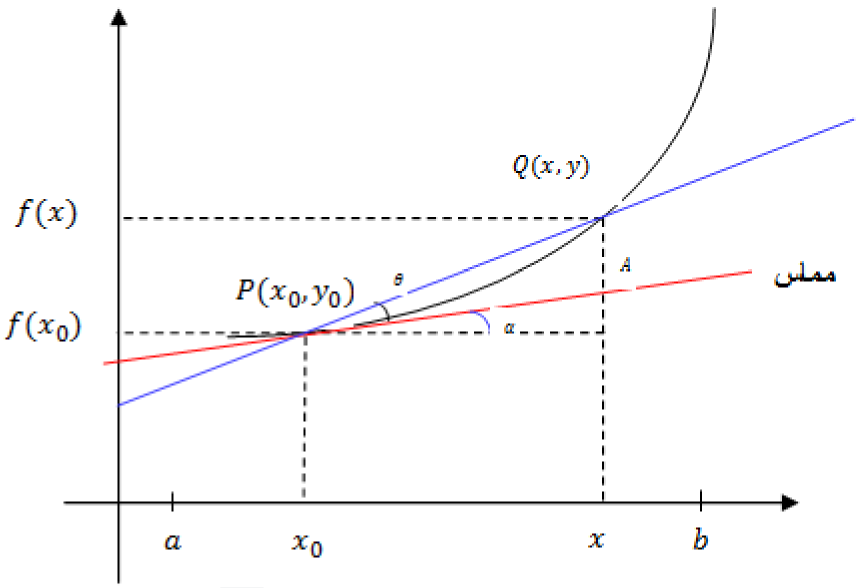
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x_0 \Leftarrow f$ مستمرة x_0 عكس هذه النظرية غير صحيح على العموم

مثال:

يكفي أخذ مثال مضاد على أن العكس غير صحيح، الدالة $f(x) = |x|$ ، $x_0 = 0$ مستمرة عند $x_0 = 0$ لكن لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$.

2. التفسير الهندسي للمشتق

ليكن C_f بيان الدالة $y = f(x)$ في المستوى xoy كما في الشكل التالي:



لتكن $P(x_0, y_0)$ و $Q(x, y)$ نقطتين من هذا البيان، عندما $x \to x_0$ فإن Q تقترب من P على البيان و بالتالي فإن القطعة $[PQ]$ تؤول لتأخذ وضع المماس (PA) لبيان f عند P فإذا كان (PQ) يصنع الزاوية θ مع المحور الموجب (Ox) فإن النسبة $tan\theta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ و التالي $f'(x_0) = tan\alpha$ ، حيث α هي زاوية لمماس مع المحور الموجب (Ox) أي أن الزاوية θ التي يصنعها (PQ) مع (Ox) تؤول إلى الزاوية α التي يصنعها المماس مع (Ox) عندما $x \to x_0$. و بالتالي فإن مشتق f عند x_0 هو عبارة عن ميل المماس عند النقطة $P(x_0, y_0)$ ذات القاصلة x_0 .

إذن فالبحث عن مشتق دالة f عند x_0 يعني البحث عن مماس لبيان الدالة عند x_0.

3. المشتقات المتتابعة

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$، اذا كان f يقبل الإشتقاق عند x_0 فنرمز للمشتقة بـ $f'(x_0)$ ، و إذا قبل f' بدوره مشتقا عند x_0 أي أن $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ موجودة فنرمز لهذه النهاية بـ $f''(x_0) = f^{(2)}(x_0)$ و نسميه المشتق الثاني لـ f عند x_0، و هكذا بالتدرج نعرف المشتق من المرتبة n لـ f عند x_0 و الذي نرمز له بـ $f^{(n)}(x_0)$ و هو النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$ في حالة وجودها.

- نصطلح على أن المشتق من المرتبة صفر(0) لـ f هو f نفسه أي أن
$$f^{(0)}(x_0) = f^{(0)}(x_0)$$
- نسمي المشتقات $f^{(0)}, f^{(1)}, ..., f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة لـ f

نظرية:

ليكن $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

فإذا كان g ، f قابلين للإشتقاق عند x_0 فإن الدوال التالية :

$f \pm g,\ f.g,\ \frac{f}{g}\ (g(x_0) \neq 0),\ \alpha f (\alpha \in \mathbb{R})$ كلها تقبل الإشتقاق عند x_0 ولدينا القواعد التالية:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$
$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

4. مشتق دالة مركبة $g \circ f$

نظرية: ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$ و نعرف الدالتين f و g كما يلي

$$f: I \to \mathbb{R}$$
$$G: J \to \mathbb{R}$$

بحيث $f(I) \cap J \neq \emptyset$،عندئذ يمكن تعريف $g \circ f$ بـ

$$\underbrace{I \xrightarrow{f} f(I) \cap J \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{f \circ g}$$

لتكن $x_0 \in I$ بحيث $f(x_0) \in f(I) \cap J$، عندئذ إذا كان f تقبل الاشتقاق عند x_0 و كان g يقبل الإشتقاق عند $f(x_0)$ فإن $g \circ f$ يقبل الإشتقاق عند x_0 و لدينا:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

5. مشتق الدالة العكسية

نظرية:
إذا كان $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و متزايدة تماما (أو مستمرة و متناقصة تماما) فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} فإن إذا كان f يقبل الاشتقاق عند $x_0 \in I$ و $f'(x_0) \neq 0$ إذن الدالة العكسية f^{-1} تقبل الاشتقاق $y_0 = f(x_0)$ و مشتقه يكون :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال:

1. $f(x) = cos(x^2 + 1)$, f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. و لدينا
$$f'(x) = 2x(sin(x^2 + 1))$$
2. $f(x) = e^{x^2+1}$ ، f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$

القيم الحدية (العظمى و الصغرى)

1. تعريف القيم الحدية (العظمى و الصغرى)

تعريف: لتكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفا على I و لتكن $x_0 \in I$،

- نقول أن الدالة f قيمة عظمى مطلقة عند x_0 إذا تحقق الشرط:
$$\forall x \in I:\ f(x) \leq f(x_0)$$
- نقول أن الدالة f قيمة صغرى مطلقة عند x_0 إذا تحقق الشرط:
$$\forall x \in I:\ f(x) \geq f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بصورة مطلقة و دون أي قيد على $x \in I$

- نقول أن للدالة f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا تحقق الشرط:
$$\exists \delta_1 > 0,\ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

أي أنه يوجد مجال $L =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$ مركز x_0 و يتحقق عليه الشرط السابق من أجل كل $x \in L$

- نقول أن للدالة f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا تحقق الشرط:

$$\exists \delta_1 > 0, \left|x - x_0\right| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

مثال: لتكن الدالة

$$f: [-2,2] \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = x^4 - x^5$$

بإستعمال جدول التغيرات نحصل على

x	-2		0		4/5		2
$f'(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	
$f(x)$	48	↘	0	↗	$\left(\frac{4}{5}\right)^5$	↘	-16

لاحظ أن : $\forall x \in [-2, 2]: f(x) \leq f(-2) = 48$

$f(-2) = 48$: **هي القيمة الحدية العظمى لـ f على المجال** $[-2, 2]$

و لاحظ أن لاحظ أن : $\forall x \in [-2, 2]: f(x) \geq f(2) = -16$

$f(2) = -16$: **القيمة الحدية الصغرى لـ f على المجال** $[-2, 2]$

ملاحظة:

- في مجال ما هناك قيمة حدية عظمى أو هناك قيمة حدية صغرى واحدة

- لكن القيم الحدية المحلية يمكن أن لا تكون أي قيم حدية محلية لا صغرى ولا كبرى في مجال ما ويمكن أن تكون لدينا عدة قيم حدية محلية في مجال ما و بالتالي هناك فرق بين القيم الحدية المحلية و القيم الحدية

يمكن التعرف على القيم الحدية بطريقة أخرى

إذا كان f معرفا على المجال المغلق و المحدود $[a, b]$ ووجد المشتق على يمين أي a $f'(a + 0) = f'(a)$ ووجد المشتق على يسار b أي $f'(b - 0) = f'(b)$ فإنه لدينا مايلي:

- **f قيمة عظمى محلية (نسبية) عند a إذا كان :** $f'(a) < 0$
- **f قيمة عظمى محلية (نسبية) عند b إذا كان :** $f'(b) > 0$
- **f قيمة صغرى محلية (نسبية) عند a إذا كان :** $f'(a) > 0$
- **f قيمة صغرى محلية (نسبية) عند b إذا كان :** $f'(b) < 0$

عموما لإيجاد القيم العظمى و القيم الصغرى لدالة f فإننا نعين من أجل ذلك تلك النقاط x حيث:

- يتعدم المشتق
- لا يوجد مشتق
- يكون مجال تعريف الدالة f نصف مفتوح

أي أن هذه قيم المتغير x المرشحة كي تكون لـ f قيمة حدية (عظمى أو صغرى) نسمي هذه النقاط x بالنقاط الحرجة لبلوغ f قيمة حدية و لكي نقرر أي هذه النقاط قيم حدية (عظمى أو صغرى) علينا أن نقارن قيم f في هذه النقاط مع بعضها البعض و مع حلول النقاط المجاورة

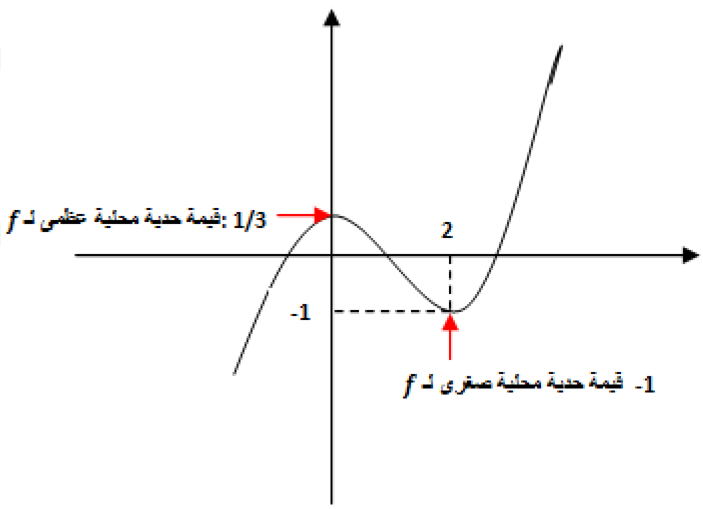
مثال: لتكن الدالة

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

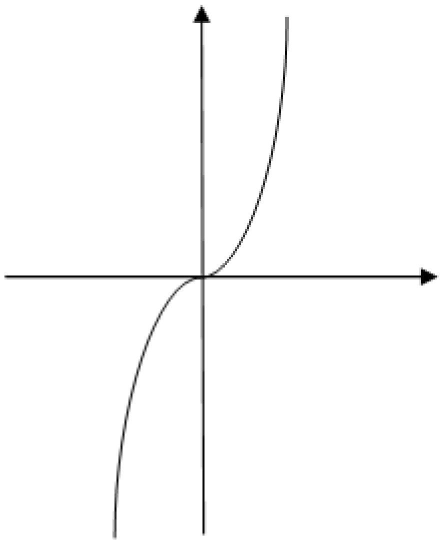
- هناك قيمة عظمى نسبية لـ f عند $x_0 = 0$ و قيمتها $f(0) = 1/3$
- هناك قيمة صغرى نسبية لـ f عند $x_0 = 2$ و قيمتها $f(2) = -1$



نظرية: ليكن $f: I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
إذا كان f يقبل الإشتقاق على $]a, b[$ و كان لـ f نهاية عظمى محلية (نسبية) (أو صغرى) عند $x_0 \in]a, b[$ فإن $f'(x_0) = 0$ و العكس غير صحيح دوما

مثال:

الدالة x^3 ليس لها أي نقاط عظمى أو صغرى مطلقة بالرغم من أن $f'(x) = 2x^2$ ينعدم عند 0



2. نظرية رول (Roll)

نظرية: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون

1. f مستمرا على $[a, b]$
2. f يقبل الاشتقاق على $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

عندئذ توجد على الأقل نقطة $c \in]a, b[$ تحقق $f'(c) = 0$

مثال:

طبق شروط رول على الدالة $f(x) = x^2 - 1$ على المجال $[-1, 1]$

1. f مستمرا على $\mathbb{R}$ و منه f مستمرة على $[-1, 1]$
2. f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$
3. $f(1) = 0 = f(-1)$

حسب رول فإنه يوجد على الأقل $c \in]-1, 1[$ بحيث $f'(c) = 0$

ملاحظة:

1. حسب شروط رول حيث أن $f'(c) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقبل على الأقل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.
2. شروط كافية و ليست لازمة.

مثال: لتكن $f(x) = x^3$ ، المجال $[-1, 1]$

1. f مستمرا على $\mathbb{R}$ و منه f مستمرة على $[-1, 1]$
2. f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$
3. $f(1) \neq f(-1)$

لكن يوجد c حيث $c \in]-1, 1[$ من أجله $f'(c) = 0$ $(c = 0)$

3. نظرية التزايدات المنتهية

نظرية: ليكن $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون

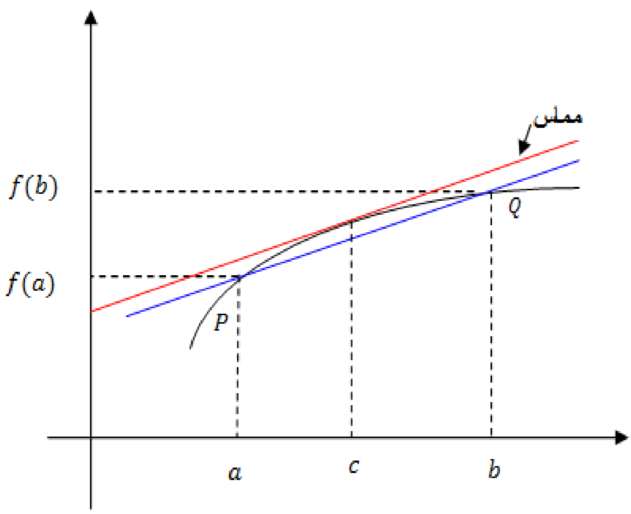
1. f مستمر على $[a, b]$
2. f يقبل الاشتقاق على $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

عندئذ توجد على الأقل نقطة $c \in]a, b[$ تحقق

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

ملاحظة:

نظرية رول هي حالة خاصة من نظرية التزايدات المنتهية



f دالة معرفة على مجال $[a, b]$

- f مستمرة على $[a, b]$
- f قابلة للإشتقاق على $]a, b[$ و

كان $f(a)$ و $f(b)$ كيفيين بحيث $f(a) \neq f(b)$ بالتخمين بما أن f قابلة للإشتقاق على مجال $]a, b[$ فحتما يوجد مماس يوازي المستقيم (PQ) له نفس معامل التوجيه أي

معامل توجيه المستقيم$(PQ) \leftarrow$ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\to$ معامل توجيه المماس

و عليه يكون $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

ملاحظة:

إذا كان $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ مستمرا و قابلا للإشتقاق على $]a, b[$ عندئذ نقول أن:

1. f متزايدا على $]a, b[$ إذا كان $\forall x \in]a, b[: f'(x) > 0$
2. f متناقص على $]a, b[$ إذا كان $\forall x \in]a, b[: f'(x) < 0$

4. دراسة حالة عدم التعيين : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

نظرية (قاعدة لوبيتال):

لتكن الدالتين $f, g:]a, b[\to \mathbb{R}$ بحيث الشروط التالية محققة

1. $\lim_{x \to_{>} a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to_{>} a} g(x) = 0$
2. f, g يقبلان الاشتقاق على $]a, b[$
3. $\forall x \in]a, b[, \ g'(x) \neq 0$
4. النهاية $\lim_{x \to_{>} a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ موجودة حيث $k \in [-\infty, +\infty]$ عندئذ تكون :

$$\lim_{x \to_{>} a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to_{>} a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

ملاحظة:

1. ندرس الحالة لما $x \to b$ بطريقة مشابهة أو عندما $x_0 \in]a, b[$
2. اذا كانت $\lim_{x \to_{>} a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ فنطبق نظرية لوبيتال من جديد على f' و g' أي أنه يمكن تطبيق النظرية عدة مرات متتالية في حالة توفر شروطها
3. تبقى النظرية صحيحة في حالة $\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to_{>} a} \frac{f(x)}{g(x)}$
4. تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$
5. يتم ايجاد النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ عندما تكون حالة عدم التعيين بتطبيبق قاعدة لوبيتال اذا كانت النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة حسب النظرية. أما اذا كانت النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة فإن هذا لا يعني اطلاقا أن النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة.

مثال: لحساب النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{sinx} = \frac{0}{0}$$

شروط لوبيتال متوفرة

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{cosx} = \frac{0}{1} = 0$$

إذن

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{sinx} = 0$$

> **ملاحظة:**
>
> يمكن رد الحالتين $0.\infty$ و $\infty - \infty +$ لعدم التعيين إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق النظرية.

مثال: لحساب $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tagx$

نلاحظ أن $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tagx = \infty - \infty$ لذا نكتب

$x \to \frac{\pi}{2}$ لما $\frac{1}{cosx} - tagx = \frac{1-sinx}{coxx} \to \frac{0}{0}$

أي:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-sinx)'}{(cosx)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-cosx}{-sinx} = \frac{0}{1} = 0$$

إذن: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tagx = 0$

> **ملاحظة:**
>
> يمكن رد حالات عدم التعيين 0^0، 1^∞، ∞^0 إلى الحالة $0.\infty$ و بالتالي إلى $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ و ذلك بإستعمال العلاقة $y^x = e^{xlogy}$

مثال: لحساب $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{5}{x})^x$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{5}{x})^x = 1^\infty$ فنكتب

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{5}{x})^x = lim(e^{xlog(1+\frac{5}{x})}) = e^{+\infty.0}$$

نطبق النظرية على $xlog(1 + \frac{5}{x})$ بحيث يمكن أن نكتب

$$xlog(1 + \frac{5}{x}) = \frac{log(1+\frac{5}{x})}{\frac{1}{x}}$$

إذن $f(x) = log(1 + \frac{5}{x})$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ و منه يصبح لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} xlog(1 + \frac{5}{x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{log(1+\frac{5}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (\frac{\frac{5}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}} \times x^2) = 5$$

اذن $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{5}{x})^x = e^5$

ملاحظة:

الحالات التي لا تمثل حالات عدم التعيين

اذا كان $a \in \mathbb{R}$ فإن $a + (+\infty) = +\infty$; $a - (+\infty) = -\infty$

$a.(+\infty) = +\infty$ عندما يكون $a > 0$ و $a.(+\infty) = -\infty$ في حالة $a < 0$

$a.(-\infty) = -\infty$ عندما يكون $a > 0$ و $a.(+\infty) = +\infty$ في حالة $a < 0$

$(+\infty)(+\infty) = +\infty, (-\infty).(-\infty) = +\infty, (+\infty) + (+\infty) = +\infty$