الفصـــل الأول: مفاهيم عامة حول المتتـــاليات

المتتاليات العددية:

1. تعاريف و ترميز

تعريف و ترميز:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق من $\mathbb{N}$ (أو جزء غير منته من $\mathbb{N}$) نحو $\mathbb{R}$ (أو$\mathbb{C}$)
أي:

$$u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\ (\text{أو } \mathbb{C})$$

$$n \rightarrow u(n) = u_n$$

و تسمى إحدى المجموعات التالية:

$$u(\mathbb{N}) = \{u(n): n \in \mathbb{N}\} = \{u_n: n \in \mathbb{N}\}$$
$$= \{u(0), u(1), ...\} = \{u_0, u_1, ...\} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

مجموعة حدود المتتالية العددية، و تسمى القيم :

$$u(0) = u_0, u(1) = u_1, u(n) = u_n, ...$$

بحدود المتتالية، و يسمى u_0 الحد الأول و u_1 احد الثاني ... و u_n بالحد النوني أو الحد العام، و نكتب حدود المتتالية حسب تزايد الأدلة بغض النظر عن ايها أكبر، أي نكتب : $u_0, u_1, u_2, u_3, ...,$ حسب تزايد الأدلة $0, 1, 2, ...$.

و بمعرفة الحد العام يمكن معرفة بقية الحدود و بالعكس، و ذلك بإعطاء n قيما متتالية من $\mathbb{N}$. و كلمة متتالية جاءت من أن الحدود تتالى، أي يأتي الواحد تلو الأخرى.
إن دراسة متتالية ما تعني دراسة حدها العام u_n، و سنأخذ دائما الرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_n$ للدلالة على المتتالية ذات الحد العام u_n.

2. المتتالية التدريجية (التراجعية)

تعريف:

هي التي يعطى فيها الحد العام (النوني) بدلالة الحدود التي تسبقه. و منها الشكل التالي:

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

حيث f هي العلاقة بين u_n و u_{n+1}

مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 4 + u_{n-1} \end{cases}$$

فإن $u_1 = 4 + u_0 = 5$، $u_2 = 4 + u_1 = 9$ أي عوضنا $n = 0$ ثم $n = 1$... الخ في العلاقة المعطاة

3. المتتالية المحدودة

تعريف:

1- نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$ إذا كانت مجموعة قيمها $\{u_0, u_1, ...\}$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$.

أي أن $(u_n)_n$ محدودة من الأعلى إذا تحقق الشرط:

M حاد أعلى $\quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq M$

2- نقول أن $(u_n)_n$ محدود من الأدنى إذا تحقق الشرط:

m حاد أدنى $\quad \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq M$

3- نقول أن $(u_n)_n$ محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأدنى أي أن:

$(u_n)_n$ محدودة $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: m \leq u_n \leq M$

أو

$(u_n)_n$ محدودة $\Leftrightarrow \exists \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}: |u_n| \leq k$

إن الشرطين المذكورين في **(3)** متكافئين، أي تحقق أي منهما يؤدي إلي تحقق الثاني و بالعكس

مثال: المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بـ:

$$u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \to u_n = \frac{1}{n}$$

محدودة لأنه $\forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

بينما $u_n = n^2$

4. نهاية متتالـــية:

تعريف:

نقول أن للمتتالية $(u_n)_n$ نهاية $l \in \mathbb{R}$ أو أن المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو العدد l و

نرمز لذلك بالرمز : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ أو $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

و إذا لم يتحقق ذلك فنقول أن المتتالية ليست متقاربة أو أنها متباعدة (أي نهايتها ليست عددا حقيقيا أو لا تقبل نهاية).

نظرية[3] (وحدانية النهاية)

إذا تقاربت متتالية عددية ما $(u_n)_n$ نحو عدد l فإن النهاية l تكون وحيدة أي أن:

$$(u_n)_n \text{ متقاربة} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \text{و} \\ l \text{ وحـــــيد} \end{cases}$$

مثال: المتتالية $u_n = (-1)^n$ فإن:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ عندما n عددا زوجيا

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$ عندما n عددا فرديا

فعلى الرغم من وجود النهاية l في الحالتين إلا أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة لأن l ليست وحيدة $l = 1$ و $l = -1$.

نظرية:

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية، عندئذ إذا كانت $(u_n)_n$ متقاربة فإن $(u_n)_n$ محدودة. و العكس ليس صحيحا في الحالة العامة.

مثال: $u_n = (-1)^n$ نرى أن $|u_n| \le 1$ محدودة. و

$$u_n = \begin{cases} 1; & n \text{ زوجي} \\ -1; & n \text{ فردي} \end{cases}$$

و $(u_n)_n$ ليست متقاربة لأن لها نهايتين 1 و -1.

[3] يمكنكم الاطلاع على برهان نظريات هذا الفصل في كتاب التحليل الرياضي لسعود محمود و بن عيسى لخضر أو كتاب عناصر من التحليل الرياضي 'التوابع لمتغير حقيقي واحد' لقادة علاب.

نظريات:

1- إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية متقاربة نحو عدد l فإن:

- إذا كان $l > a$ عندئذ $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1: u_n > a$

- إذا كان $l < a$ عندئذ $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2: u_n < a$

2- إذا كانت $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين متقاربتين، و كانت:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n > v_n$$

عندئذ تكون : $\lim_{n \to +\infty} u_n \geq \lim_{n \to +\infty} v_n$

3- إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين، عندئذ يكون لدينا:

- المتتاليات $(u_n \pm v_n)_n$ ، $(u_n . v_n)_n$ و $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$، حيث $(v_n \neq 0)$ و

$(\lim_{n \to +\infty} v_n \neq 0)$ كلها متقاربة.

- لدين:

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n \pm \lim_{n \to +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n . v_n) = \lim_{n \to +\infty} u_n . \lim_{n \to +\infty} v_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim_{n \to +\infty} u_n}{\lim_{n \to +\infty} v_n}$$

مثال: لتكن $u_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(3+\frac{2}{n})} = \frac{2}{3}$$

لأن المتتاليتين $(2 + \frac{1}{n})$ و $\left(3 + \frac{2}{ى}\right)$ متقاربين.

نظريات:

عند دراسة متتالية $(w_n)_n$ معقدة نوعا ما، فنحاول عندئذ كتابة (w_n) على شكل مجموعتين (أو أكثر) أبسط منها أو على شكل جداء متتاليتين أو على شكل قسمة متتاليتين و العكس ليس صحيحا عموما

مثال: $w_n = u_n + v_n$ أو $w_n = u_n . v_n$ أو $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

ندرس المتتاليتين البسيتين u_n و v_n، فإن كانت متقاربة فإن w_n متقاربة.

لكن لاحظ :

$u_n = n$، $v_n = n^2$ متباعدتين في حين أن : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n}$ متقاربة.

و $u_n = - n + \frac{1}{n}$ ، $v_n = n$ متباعدتين في حين أن : $u_n + v_n = \frac{1}{n}$ متقاربة.

نظريات:

1- إذا كانت $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين إحداهما محدودة و لأخرى متقاربة نحو الصفر $(l = 0)$، عندئذ تكون المتتالية الجداء $(u_n . v_n)_n$ متقاربة نحو الصفر أيضا.

2- إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية متقاربة نحو l و ذات حدود موجة $(u_n \geq 0)$، فإن المتتالية $k \in \mathbb{N}^*$، $\left(\sqrt[k]{u_n}\right)_n$ متقاربة أيضا و لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \to +\infty} u_n} = \sqrt[k]{l}$$

3- إذا كانت $(v_n)_n$ متتالية ذات حدود موجة تماما $(\forall n: v_n > 0)$، وكانت $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = l$ عندئذ تكون المتتالية $\left(\sqrt[n]{v_n}\right)_n$ متقاربة أيضا و لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{v_n} = l$$

مثال:

1- لتكن المتتالية المعرفة حدها العام $u_n = \frac{sinn}{n}$ ، إن $u_n = \frac{1}{n}. sinn$ حيث $v_n = sinn$ محدودة لأن $|v_n| \leq 1$ و $w_n = \frac{1}{n} \to 0$ لما $n \to + \infty$ فإن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ (حسب الجزء الأول من النظرية).

2- أحسب $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[5]{\frac{n}{3n+2}}$

بوضع $u_n = \frac{n}{3n+2}$ نرى أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n(3+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to+\infty} 1}{\lim_{n\to+\infty} (3+\frac{2}{n})} = \frac{1}{3}$$

و حسب الجزء الثاني من النظرية فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{\frac{n}{3n+2}} = \sqrt[5]{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n+2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

3- أحسب $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+4}}$

لدينا $v_n = \frac{n+1}{n+4} > 0$ **و** $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$ **. إذن**

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+4}} = 1$ **(حسب الجزء الثالث من النظرية)**

نظرية (الحصر):

إذا كانت $(u_n)_n$ **،** $(v_n)_n$ **و** $(w_n)_n$ **متتاليات عددية تحقق الشرط:**

$u_n \leq w_n \leq v_n$ **إنطلاقا من رتبة معينة** $n \geq N$ **وكانت:**

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$ **فإن** $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$

5. المتتاليات الرتيبة

تعريف:

لتكن $(u_n)_n$ **متتالية عددية، نقول أن** $(u_n)_n$ **متزايدة (متزايدة تماما)إذا تحقق ما يلي:**

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_{n+1} \ (u_n < u_{n+1})$$

أو:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n \geq 0 \ (u_{n+1} - u_n > 0)$$

و نقول أن $(u_n)_n$ **متناقصة (متناقصة تماما) إذا تحقق ما يلي:**

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq u_{n+1} \ (u_n > u_{n+1})$$

أو:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n \le 0 \ (u_{n+1} - u_n < 0)$$

فالمتتالية تعني أن : $u_0 \le u_1 \le u_2 \le ... \le u_n \le ...$، أي أن قيمها تزداد أو تكبر.

و متتالية متناقصة تعني أن $u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge ... \ge u_n \ge ...$ أي أن قيمها تنقص أو تصغر.

و نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

و نقول أن المتتالية $(u_n)_n$ رتيبة تماما إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما.

مثال:

$u_n = \frac{1}{n}$ متناقصة لأن: $u_1 = 1 \ge u_1 = \frac{1}{2} \ge u_3 = \frac{1}{3} \ge ...$

و $v_n = n$ متزايدة لأن: $v_1 = 0 \le v_1 = 1 \le v_3 = 2 \le ...$

ملاحظة:

نتبين رتابة متتالية متتالية بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ عندما تكون المتتالية $(u_n)_n$ موجبة يمكننا أيضا مقارنة 1 و الكسر $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

نظرية

1- كل متتالية $(u_n)_n$ متزايدة (متزايدة تماما) و محدودة من الأعلى تكون متقاربة نحو حدها الأعلى.

2- كل متتالية $(v_n)_n$ متناقصة (متناقصة تماما) و محدودة من الأدنى تكون متقاربة نحو حدها الأدنى.

3- كل متتالية رتيبة (رتيبة تماما) و محدودة تكون متقاربة.

6. المتتاليات المتجاورة

تعريف:

نقول عن متتاليتين، إحداهما $(u_n)_n$ متزايدة و الأخرى $(v_n)_n$ متناقصة إنهما متجاورتان إذا قبل الفرق $u_n - v_n$ نهاية معدومة.

نظرية:

إن كل متتاليتين متجاورتين متقاربتان و لهما نفس النهاية.

مثال: هل المتتاليتين متجاورتان :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, & n \in \mathbb{N} \\ v_n & \end{cases}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!}$$

و منه $(u_n)_n$ متزايدة. و من جهة أخرى لدينا:

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \left(u_{n+1} - u_n\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

و منه $(v_n)_n$ متناقصة. و لدينا من عبارة $(v_n)_n$:

$$v_n = \left(u_n + \frac{1}{n!}\right) \Rightarrow \left(v_n - u_n\right) = \frac{1}{n!}\Big)$$

و منه $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ و بالتالي $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متجاورتان.

7. المتتالية الحسابية

تعريف:
المتتالية الحسابية أو المتتابعة الحسابية هي متتالية من الأعداد حيث يكون الفرق بين أي حدين متتالين ثابتا. و نكتب

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n + r$$

مثال:
3، 5، 7، 9، 11، 13، ... هي متتالية حسابية لها أساس يساوي 2. أي أنّ 3، 5، 7 هي حدود من هذه المتتالية والأساس هو 2 هو العدد المضاف بين كل حدّين متتاليين.

إذا كان الحد الأول من المتتالية الحسابية هو u_1 و الفرق بين حدين متتاليين هو r عندها يعبر عن الحد ذي الترتيب n من متتالية حسابية بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

أو بشكل عام

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

مثال:

$8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$ هي حدود متتالية حسابية حدها الأول هو 0 أساسها هو $r = 2$.

تغيرات متتالية حسابية

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = r$

- إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

قانون الوسط الحسابية

إذا كانت $c,\ b,\ a$ حدودا متعاقبة من متتالية حسابية، فإن: $a + c = 2b$

مجموع حدود متتالية حسابية

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

أي المجموع= (عدد الحدود)*((الحد الأول+الحد الأخير)/2)

عدد الحدود= (رتبة الحد الأخير-رتبة الحد الأول+1)

و بشكل عام

$$S = (n - p + 1) \times \frac{u_n + u_p}{2}$$

8. المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتالية الهندسية هي متتالية عددية كل حد (جملة) من حدودها بعد الأول يُحصل عليه بضرب الحد الذي قبله في عدد ثابت غير منعدم يدعى قدر النسبة (ويعرف كذلك بالأساس والنسبة المشتركة). هكذا، يكون شكل متتالية هندسية ما على الشكل التالي:

$$v_1, v_1 q, v_1 q^2, v_1 q^3, v_1 q^4, ...$$

لايجاد الحد النوني لمتتالية هندسية، نستعمل المعادلة التالية:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

حيث v_1 هو الحد الأول و q هي الفرق العام (يُغير الرمز هنا لتمييز المتتالية الهندسية عن الحسابية), و n هي عدد الحدود.

و بشكل عام

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

مثال:

3، 6، 12، 24 هي متتالية هندسية لها أساس يساوي 2 و حدها الاول هو 3 لأن قسمة حد ما على الحد الذي سبقه تعطي دائما 2 (6 مقسومة على 3 تعطي 2، و 12 مقسومة على 6 تعطي 2 و 24 مقسومة على 12 تعطي 2، وهكذا).

تغيرات متتالية هندسية

(v_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول v_0 و أساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}/v_n = q$

- **إذا كان $0 < q < 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان $0 < q < 1$ و $v_0 < 0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان $q < 1$ و $v_0 < 0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان $q > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.**

قانون الوسط الهندسي

إذا كانت a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية، فإن: $a.c = b^2$

مجموع حدود متتالية هندسية

إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = \text{الحد الأول} \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

عدد الحدود= (رتبة الحد الأخير-رتبة الحد الأول+1)

إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = (n+1)v_0$

نهاية متتالية هندسية

- **إذا كان $q > 1$ و $v_0 > 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ اذن المتتالية (v_n) متباعدة**
- **إذا كان $q < 1$ و $v_0 < 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ اذن المتتالية (v_n) متباعدة**
- **$q \in]-1; 1[$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة**
- **$q \leq -1$ فإن المتتالية (v_n) متباعدة (نهاية غير موجودة)**

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم جذع مشترك **السنة الأولى**

رياضيات 1

السلسلة رقم 02

التمرين 01:

- **أدرس طبيعة المتتاليات التالية:**

$$u_n = \frac{2n+1}{n+325} \quad , \quad u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}-17} \quad , \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad , \quad u_n = \frac{n^2+n+7}{n\sqrt{4n^2+n+1}}$$

$$u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n} \quad , \quad u_n = (-1)^n$$

التمرين 02:

- **أدرس اتجاه تغير (رتابة) كل من المتتاليات المعرفة كما يلي:**

$1 - \ \forall n \in \mathbb{N}:\ u_n = \frac{1}{2}(n^2+1)$ $\qquad$ $2 - \ \forall n \in \mathbb{N}^*:\ u_n = \frac{n}{5^n}$

$3 - \ \forall n \in \mathbb{N}:\ u_n = 2n^2 + 2n - 5$ $\qquad$ $4 - \ \forall n \in \mathbb{N}:\ u_n = 2n^3 + n$

$5 - \ \forall n \in \mathbb{N}:\ u_n = 2^n - n$

التمرين 03:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المتتالية معرفة كما يلي:**

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- **أثبت أن المتتالية** (u_n) **متناقصة.**

- **برهن بالتراجع من أجل كل** n **أن :** $0 < u_n \leq 3$ **.**

- **استنتج أن** (u_n) **متقاربة نحو نهاية** l **، ثم عين** l**.**

التمرين 04:

متتالية معرفة كما يلي $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n = U_{n+1} - 5 \end{cases}$$

1. برهن أن U_n متتالية حسابية
2. أوجد U_n بدلالة n
3. أوجد $S_n = U_3 + U_3 + ... + U_n$
4. عين n حتى يكون $S_n = 6456$

التمرين 05:

$\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب

1. عيـــن أساسها و حدها الأول U_0 إذا علمت أن :

$$\begin{cases} U_3 = 144 \\ \text{و} \\ U_5 = 576 \end{cases}$$

2. وجد U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع S حيث $S = U_0 + U_4 + ... + U_{2009}$

التمرين 06:

لتكن المتتالية $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة من أجل** $n \geq 1$ **كما يلي:**

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 3 \end{cases}$$

نضع $V_n = U_n + 3$ **من أجل كل** $n \geq 1$

1. **أثبت أن** V_n **متتالية هندسية أساسها 2.**
2. **أحسب** V_n **بدلالة** n **ثم استنتج عبارة** U_n **بدلالة** n
3. **أحسب مجموع الحدود:** $S_1 = V_1 + V_2 + ... + V_n$ ثم أثبت أن المجموع : $S_2 = U_1 + U_2 + ... + U_n$ يساوي $4(2^n - 1) - 3n$.