

CH 3: Méthode des différences finies

1- Différentiation numérique

Les formules des dérivées peuvent être obtenues à partir des formules d'interpolation de Newton pour un pas constant ou par l'utilisation le développement en série de Taylor.

1-1- Différence avant (droite) d'ordre 1

L'utilisation du développement en série de Taylor

La formule de Taylor permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Supposons que f soit de classe C^n sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que x_0+h appartienne à I on peut écrire:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) \dots \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Si

$$x = x_j$$

Alors

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} + O(h)$$

Où

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} + O(h)$$

Pour la deuxième dérivée

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) \dots \quad (2)$$

$$f(x+2h) - 2f(x+h) = -f(x) + h^2f''(x) + h^3f'''(x) + \dots$$

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+h)}{h^2} + O(h)$$

$$f''(x_j) = \frac{f(x_j) - 2f(x_{j+1}) + f(x_{j+2}))}{h^2} + O(h)$$

$$f_j'' = \frac{f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2}}{h^2} + O(h)$$

1-2- Différence avant (droite) d'ordre 2

On peut obtenir une meilleure précision en prenant plus de termes dans le développement en série de Taylor. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant:

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}	f_{j+5}
$2hf_j'$	-3	4	-1			
$h^2 f_j''$	2	-5	4	-1		
$2h^3 f_j'''$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4 f_j^{(4)}$	3	14	26	-24	11	-2

$+O(h^2)$

Exemple :

$$f_j' = \frac{-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}}{2h} + O(h^2)$$

1-3- Différence arrière (gauche) d'ordre 1:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x+h)}{h} + \frac{h}{2!} f''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x+h)}{h} + O(h)$$

Si

$$x = x_j$$

Alors

$$f'(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1}))}{h} + O(h)$$

Où

$$f_j' = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + O(h)$$

	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}	f_{j+3}	f_{j+4}
hf_j'	1	-1			
$h^2 f_j''$	1	-2	1		
$h^3 f_j'''$	1	-3	3	-1	
$h^4 f_j^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

$+O(h)$

1-4- Différence arrière (gauche) d'ordre 2

A partir du développement de $(x-h)$, les premières dérivées de l'ordre 2 dans le tableau suivant:

	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_{j-3}	f_{j-4}	f_{j-5}
$2hf'_j$	3	-4	1			
$h^2f''_j$	2	-5	4	-1		
$2h^3f'''_j$	5	-18	24	14	3	
$h^4f^{(4)}_j$	3	-14	26	-24	11	-2

$+O(h^2)$

1-5- Différences centrées

On utilise les points situés de part et d'autre de x_j

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Pour $x = x_j$

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + O(h^2)$$

Pour les dérivées d'ordre supérieur les résultats sont résumés dans le tableau suivant

	f_{j-2}	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}	f_{j+2}
$2hf'_j$		-1	0	1	
$h^2f''_j$		1	-2	1	
$2h^3f'''_j$	-1	2	0	-2	1
$h^4f^{(4)}_j$	1	-4	6	-4	1

$+O(h^2)$