Chapitre V

Cinématique d'un corps solide

V. Cinématique d'un corps solide

V.1 Introduction

La cinématique est une partie de la mécanique rationnelle qui permet d'étudier le mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent (les actions mécanique). Elle introduit la notion de temps. Un terme plus général qui concerne la vitesse et les mécanismes d'une grande variété de processus en mécanique. Donc la cinématique permet d'étudier la trajectoire, la vitesse et l'accélération des mobiles à l'instant (t).

V.2 Rappel sur la cinématique de point matériel

V.2.1 La trajectoire

Soit M point matériel se déplace dans un repère fixe$R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ **Fig. (III.1)**

La position du point M dans ce repère $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est définie par le vecteur de trajectoire à l'instant (t).

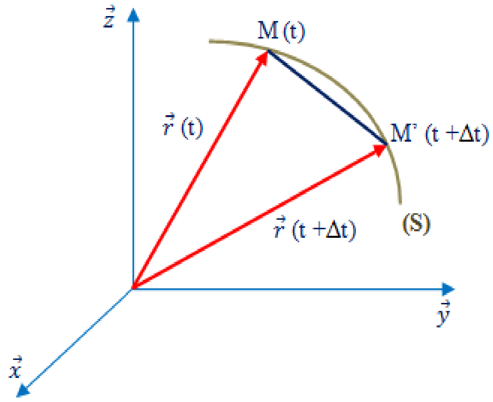


Figure V. 1: Trajectoire d'un mobile.

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Avec:

x(t), y(t), z(t): sont les coordonnées du point M à l'instant (t).

M(t):est la position du point M à l'instant (t).

M'(t+ Δ t):est la position du point M à l'instant (t+ Δ t).

$\overrightarrow{MM'}$: est le vecteur déplacement du point M.

(S): est la trajectoire du point M par rapport au repère (R).

Remarque :

On dit un mouvement du point M est rectiligne lorsque la trajectoire (S) est une droite, et on dit le mouvement du point est curviligne lorsque la trajectoire (S) est une courbe.

V.2.2 Vitesse rectiligne (vecteur de vitesse)

On dit la vitesse du mobile est rectiligne lorsque le mouvement est rectiligne, il existe deux types de vitesse (moyenne et instantanée).

a. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne entre deux instants (t et t+Δt) est définie par:

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

b. Vitesse instantanée

La vitesse instantanée est définie par: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Ce vecteur reste toujours tangent à la trajectoire et du même sens du mouvement.

V.2.3 Accélération

Il existe deux types d'accélération

a. Accélération moyenne

L'accélération moyenne entre deux instants (t et t+Δt) est définie par:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}}{\Delta t}$$

b. Accélération instantanée

L'accélération instantanée est la dérivée de la vitesse , elle est donnée par : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

V.3 Mouvement d'un point matériel

V.3.1 Mouvement rectiligne

Si la trajectoire est une ligne droite alors $\rho = \infty$, donc $W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, et l'accélération total du point matériel égale seulement a l'accélération tangentielle.

$$W = W_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Dans ce cas, la vitesse varie seulement dans ça valeur, alors on peut conclure que l'accélération tangentielle représente la variation dans la valeur de la vitesse.

V.3.2 Mouvement curviligne uniforme

On appelle un mouvement curviligne uniforme si la valeur de la vitesse reste tout le temps constante ($v = const$), dans ce cas, $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ et l'accélération total égale à l'accélération normale seulement.

$$W = W_n = \frac{v^2}{\rho}$$

L'accélération sera orientée dans cas sur la normale de la trajectoire du point matériel : ou l'accélération se produit dans ce cas à cause de la variation de l'orientation de la vitesse. Donc on conclue que l'accélération normale représente la variation dans l'orientation de vitesse.

Pour l'écriture de la loi de mouvement curviligne uniforme, on a:

$$\frac{ds}{dt} = v \rightarrow ds = v.dt$$

On considère que au début de mouvement (*t=0*), l'abscisse initial est s_0, intégrant la formule précédente on obtient :

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v.dt \rightarrow s - s_0 = v.t \qquad \text{avec } v=const$$

finalement on obtient : $s = v.t + s_0$

V.3.3 Mouvement rectiligne uniforme

Dans un mouvement rectiligne uniforme l'accélération normale et l'accélération tangentielle sont nulles ($W_n = W_\tau = 0$) , alors l'accélération totale est nulle $W = 0$. Donc le mouvement rectiligne uniforme est le seul mouvement qui à l'accélération nulle.

V.3.4 Mouvement rectiligne uniformément variable

C'est le mouvement qui à une accélération tangentielle constante tout le temps $W_\tau = const$, on déduit la loi de mouvement si on pose à l'instant t=0 l'abscisse initial $s = s_0$ et $v = v_0$. avec v_0 la vitesse initiale du point matériel.

$$W_\tau = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = W_\tau.dt \qquad \text{avec } W_\tau = const$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t W_\tau.dt \rightarrow v - v_0 = W_\tau.t$$

finalement : $v = W_\tau.t + v_0$

on a aussi : $v = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = W_\tau.t + v_0 \rightarrow ds = (W_\tau.t + v_0).dt$$

$$\int_{s_0}^{S} ds = \int_0^t (W_\tau.t + v_0).dt \rightarrow s - s_0 = \frac{1}{2}.W_\tau.t^2 + v_0.t$$

finalement on obtient : $s = \frac{1}{2}.W_\tau.t^2 + v_0.t + s_0$

Remarque:

a- Le mouvement est accéléré : $\vec{v}.\overrightarrow{W_\tau} > 0$

b- Le mouvement est décéléré : $\vec{v}.\overrightarrow{W_\tau} < 0$

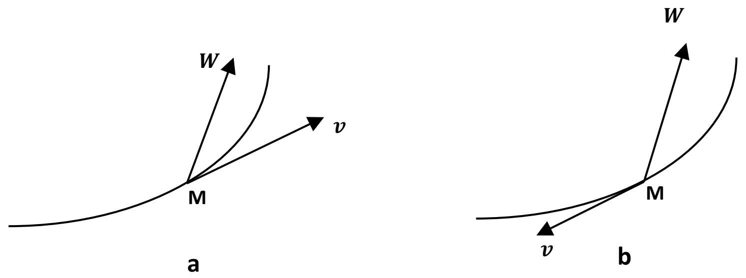


Figure V. 2: Représentation du mouvement rectiligne uniformément variable (Cas d'accélération et décélération).

IV.1.8 La vitesse dans les coordonnées polaires

Dans le cas ou un point matériel se déplace tout le temps dans le même plan, donc on peut déterminer sa position avec les coordonnées polaires $r\ et\ \varphi$ (voir figure).

Ces coordonnées polaires changent durant le mouvement du point dans le plan avec le temps, donc la loi de mouvement dans les coordonnées polaires est donnée par :

$$r = f_1(t), \qquad \varphi = f_2(t)$$

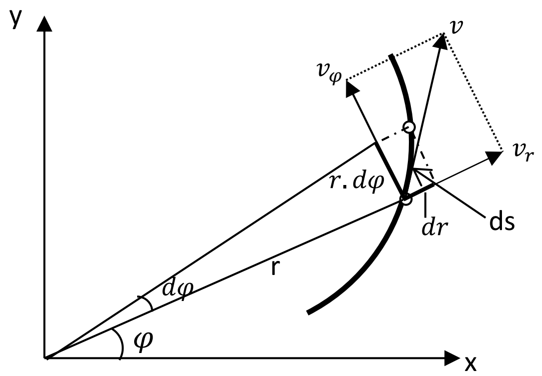


Figure V. 3: Composantes polaires da la vitesse.

La vitesse est la dérivée du ***ds*** par rapport au temps $\frac{dS}{dt}$, le déplacement ***ds*** est composée d'un déplacement radial ***dr*** et un déplacement transversal $r.d\varphi$. donc la vitesse est la somme de la composante radial et la composante transversale.

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r.\frac{d\varphi}{dt} = r.\dot{\varphi}$$

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\varphi)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2}$$

On peut aussi déterminer ses équations on écrivant les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires :

$$x = r.cos\varphi, \qquad y = r.sin\varphi$$

La vitesse :
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}.cos\varphi - r.\dot{\varphi}.sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}.sin\varphi + r.\dot{\varphi}.cos\varphi \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2}$$

L'accélération :

$$W = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

Avec : $W_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ est l'accélération radiale.

$W_\varphi = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$ est l'accélération transversale.

V.4 Cinématique du corps solide

Un corps solide parfait, est un ensemble des points matériels, dans lequel distances entre ces points ne varient pas au cours du temps. Par conséquent, les vitesses entre ces points ne sont pas indépendantes. D'ici, la cinématique du corps solide permet d'étudier la distribution des vitesses des points dans un corps.

V.4.1 Torseur cinématique distribution des vitesses

Un corps solide se déplace dans un repère mobile $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\ )$. Supposons un repère de référence $\vec{R}_0(\ \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. (A,B) sont deux points appartenant au solide (S)

Le torseur cinématique exprimé au point A du solide **(S)** dans son mouvement par rapport au repère $\mathbf{R_0}$ est défini par :

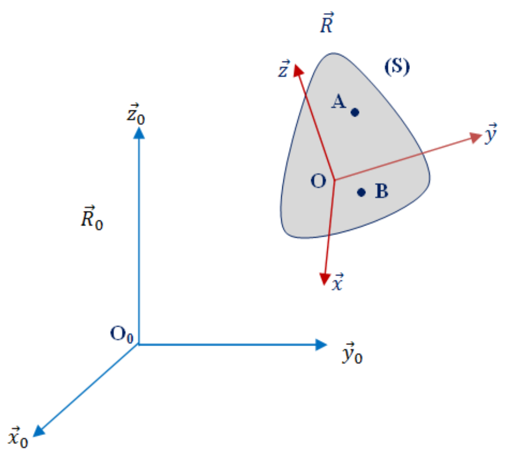


Figure V. 4 : Champ des vitesses d'un corps solide.

$$[V_{S/R_O}]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_O} \\ \vec{V}_{A/R_O} \end{pmatrix}$$

avec :

$\vec{\Omega}_{S/R_O}$: est le vecteur de la vitesse angulaire du solide **(S)** par rapport au repère $\mathbf{R_0}$.

$\vec{V}_{A/R_O}$: est le vecteur de la vitesse instantanée du point A appartenant au solide **(S)** par rapport au repère R_0.

V.4.2 Champ des vitesses d'un solide

Le vecteur de la vitesse du point A appartenant au solide (S) est défini par :

$$\vec{V}_{A/R_O} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{/R_0}$$

Un corps solide parfait est du que la dérivée par rapport au temps de la distance entre deux points quelconques A et B est nulle:

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2\overrightarrow{AB}.\left(\vec{V}_B - \vec{V}_A\right) = 0$$

La relation de la vitesse du point A par rapport la vitesse du point B ($\vec{V}_{A/R_O}, \vec{V}_{B/R_O}$) est exprimé par:

A partir la formule de dérivation d'un vecteur et le mouvement relatif (cours Physique 1 de 1ère année ST):

$$\vec{V}_{A/R_O} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_{B/R_O} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{OB}$$

On a :

$$\vec{V}_{B/R_O} - \vec{V}_{A/R_O} = \left(\frac{d\left[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right]}{dt}\right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \left[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right]$$

$$\vec{V}_{B/R_O} - \vec{V}_{A/R_O} = \left(\frac{d\left[\overrightarrow{AB}\right]}{dt}\right)_{/R} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \left[\overrightarrow{AB}\right]$$

(S) est un corps solide parfait :

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = constante$$

Donc :

$$\left(\frac{d\left[\overrightarrow{AB}\right]}{dt}\right)_{/R} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{B/R_O} = \vec{V}_{A/R_O} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}$$

C'est la formule de distribution des vitesses dans un corps solide indéformable en mouvement. Elle montre que le champ des vitesses d'un solide est un champ antisymétrique.

V.4.3 Champ des accélérations d'un solide

Pour déterminer la relation entre l'accélération du point A avec l'accélération du point B, on peut dire :

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{B/R_O}}{dt}\right)_{/R_0}$$

Avec : A et B appartenant au corps solide (S)

et : $\vec{V}_{B/R_O} = \vec{V}_{A/R_O} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge [\overrightarrow{AB}]$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_{B/R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{B/R_O}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{\vec{V}_{A/R_O} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{A/R_O}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{S/R_O}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0}$$

Ou :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_{A/R_O}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{S/R_O}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$$\vec{\gamma}_{B/R_0} = \vec{\gamma}_{A/R_0} + \vec{\varepsilon}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{AB})$$

avec :

$\vec{\varepsilon}_{S/R_O}$: est l'accélération angulaire du corps solide (S) par rapport le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

C'est la Formule de distribution des accélérations dans un corps solide indéformable.

V.5 Mouvements particuliers fondamentaux

V.5.1 Mouvement de translation pur

On dit un solide (S) lié à un repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fait mouvement de translation pur par rapport à un repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, si les axes de $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ gardent une direction fixe par rapport à ceux de $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, au cours du temps.

Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération que le point $A \epsilon (S)$

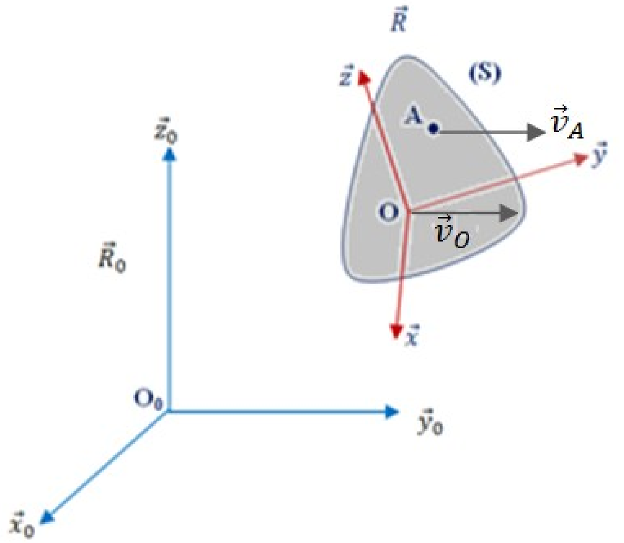


Figure V. 5: Mouvement de translation d'un solide.

On peut écrire la vitesse du point A par rapport $\vec{R}_0$. par :

$$\vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

La vitesse de rotation du solide est nulle par rapport $\vec{R}_0$.

On peut écrire :

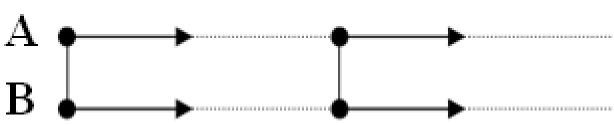
$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{0} \\ et \\ \overrightarrow{OA} \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{\Omega}_{S/R_0=} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{O/R_0}$$

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ uniforme, Le torseur cinématique qui décrit le mouvement de translation est :

$$[V_{S/R_O}]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_O} = \vec{0} \\ \vec{V}_{A/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} \end{pmatrix}$$

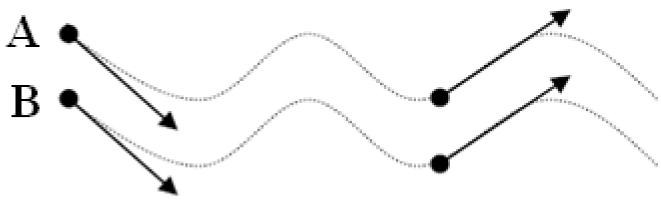
Dans ce cas les points du solide ont la même vitesse à chaque instant donc, tous les points font des trajectoires parallèles. Soient A et B deux points appartenant du solide, il ya trois types de trajectoires peuvent être d'écrites:

- **Trajectoire en translation rectiligne :**



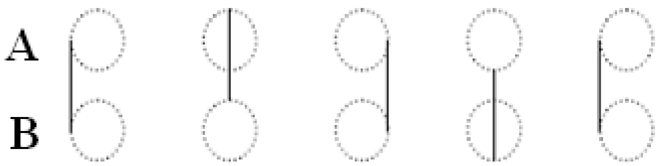
- **Trajectoire en translation curviligne :**

Dans ce cas les vitesses de points A et B sont parallèles et égales.



- **Trajectoire en translation circulaire :**

Dans ce cas les points A et B font des cercles de même rayons à la même vitesse



V.5.2 Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

a. Vitesse d'un point (M) du solide

Un solide (S) lié à un repère $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ si un axe de $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. O et I deux points distincts du solide (S) qui restent fixe dans le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ au cours du mouvement de rotation. Le repère $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est en rotation pur par rapport au repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ à une vitesse angulaire donnée par :

$$\vec{\Omega}_{S/R_0}=\dot{\varphi}\vec{z}_1=\dot{\varphi}\vec{z} \quad et \quad \left(\vec{V_O}\right)_{R_0}=\vec{0}$$

Soit M un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation $(\vec{z}_0)$ tel que: $\overrightarrow{IM}=r\vec{x}$

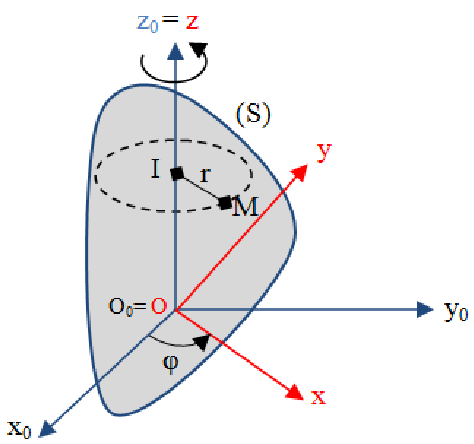


Figure V. 6: : Mouvement de rotation autour d'un axe fixe d'un solide.

En général on peut écrire la vitesse au point M par rapport le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \vec{V}_{I/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{IM}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{I/R_0} = \vec{V}_{O/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{IM} \\ \vec{V}_{O/R_0} = \vec{0}\ (O\ est\ fixe) \\ \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0}\ (\vec{\Omega}_{S/R_0}, \overrightarrow{OI}\ sont\ Parallèles) \end{cases} \Longrightarrow \vec{V}_{I/R_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi}\vec{z}_1 = \dot{\varphi}\vec{z} \\ \overrightarrow{IM} = r\vec{x} \end{cases} \Longrightarrow \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{IM} = \dot{\varphi}\vec{z} \wedge r\vec{x} = r\dot{\varphi}\vec{y}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_{M/R_0} = r\dot{\varphi}\vec{y}$$

- ***La relation entre*** $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) et\ \vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

La vue de dessus des repères $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) et\ \vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ illustre par **Fig. (III.6)**

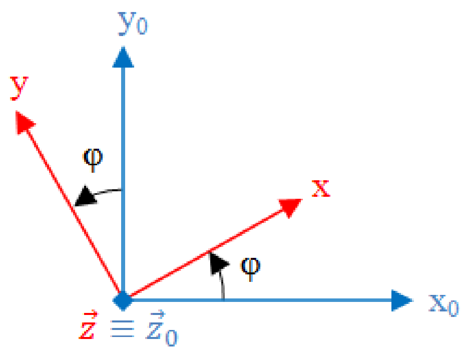


Figure V. 7: Vue de dessus des repères $\boldsymbol{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) et\ \vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On a :

$$\begin{cases} \vec{x} = cos\varphi\vec{x}_0 + sin\varphi\vec{y}_0 \\ \vec{y} = -sin\varphi\vec{x}_0 + cos\varphi\vec{y}_0 \\ \vec{z} = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}$$

avec :

$\begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: La matrice de passage du repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ vers le repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

La vitesse du point M par rapport le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est :

$$\vec{V}_{M/R_0} = r\dot{\varphi}\vec{y} = r\dot{\varphi}(-sin\varphi\vec{x}_0 + cos\varphi\vec{y}_0) = -r\dot{\varphi}sin\varphi\vec{x}_0 + r\dot{\varphi}cos\varphi\vec{y}_0$$

b. Accélération d'un point (M) du solide

En général on peut écrire la vitesse au point M par rapport le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par :

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \vec{\gamma}_{I/R_0} + \vec{\varepsilon}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{IM})$$

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_{I/R_0} = \vec{\gamma}_{O/R_0} + \vec{\varepsilon}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{OI} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{S}{R_O}} \wedge \overrightarrow{OI}\right) \\ \vec{\gamma}_{O/R_0} = \vec{0} \qquad (O\ est\ fixe) \\ \vec{\varepsilon}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0} \qquad \left(\vec{\varepsilon}_{S/R_O}, \overrightarrow{OI}\ sont\ Parallèles\right) \\ \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0} \qquad \left(\vec{\Omega}_{S/R_O}, \overrightarrow{OI}\ sont\ Parallèles\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_{I/R_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{IM} = \dot{\varphi}\vec{z} \wedge r\vec{x} = r\dot{\varphi}\vec{y} \\ \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \left(\vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{IM}\right) = \dot{\varphi}\vec{z} \wedge r\dot{\varphi}\vec{y} = -r\dot{\varphi}^2\vec{x} \\ \vec{\varepsilon}_{S/R_O} = \ddot{\varphi}\vec{z}_1 = \ddot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{\varepsilon}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{IM} = \ddot{\varphi}\vec{z} \wedge r\vec{x} = r\ddot{\varphi}\vec{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_{M/R_0} = \vec{\varepsilon}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\Omega}_{S/R_O} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{S}{R_O}} \wedge \overrightarrow{IM}\right) = -r\dot{\varphi}^2\vec{x} + r\ddot{\varphi}\vec{y}$$

avec : $\begin{cases} -r\dot{\varphi}^2\vec{x} = \vec{\gamma}_N : accélération\ normale \\ r\ddot{\varphi}\vec{y} = \vec{\gamma}_T : accélération\ \ tangencielle \end{cases}$

La vitesse du point M par rapport le repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est :

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = -r\dot{\varphi}^2(cos\varphi\vec{x}_0 + sin\varphi\vec{y}_0) + r\ddot{\varphi}(-sin\varphi\vec{x}_0 + cos\varphi\vec{y}_0).$$

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = -r(\dot{\varphi}^2\ cos\varphi + \ddot{\varphi}\ sin\varphi)\vec{x}_0 + r(-\dot{\varphi}^2\ sin\varphi + \ddot{\varphi}\ cos\varphi)\ \vec{y}_0$$

V.5.3 Mouvement composé (rotation + translation)

Un solide (S) lié à un repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ décrit un mouvement composé (rotation +translation) rapport à un repère $\vec{R}_0(\vec{x}_C, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

- Un axe de $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ reste en coïncidence à tout instant avec un axe du repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- La coordonnée du point (O) centre du repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ suivant l'axe de coïncidence, est proportionnelle à l'angle de rotation du repère $\vec{R}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au cours du mouvement de rotation.
- On a : $\overrightarrow{O_0O} = k.\varphi(t)\vec{z} = k.\varphi(t)\vec{z}_0$

avec :

k : le pas du mouvement composé le long de l'axe de coïncidence

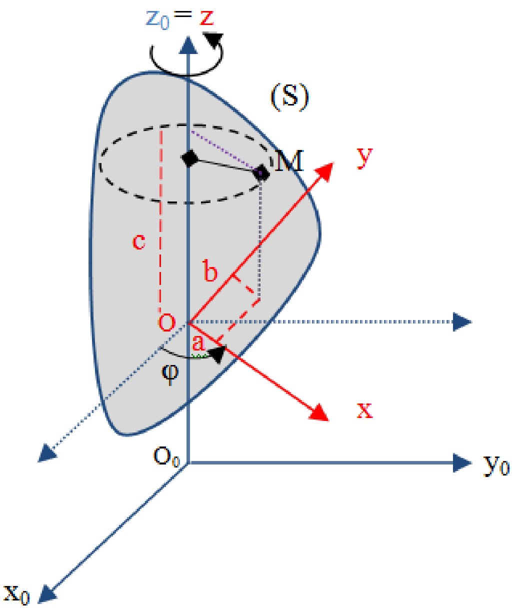


Figure V. 8: Mouvement composé (rotation+translation).

Un point (M) appartenant au solide (S), on a :

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O} + \overrightarrow{OM}$$

On a :

$$\left(\overrightarrow{O_0O}\right)_{R_0} = \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = k.\varphi \end{pmatrix}$$

et :

$$\left(\overrightarrow{OM}\right)_{R} = \begin{pmatrix} x = a \\ y = b \\ z = c \end{pmatrix} \ et \ \left(\overrightarrow{OM}\right)_{R_0} = \begin{pmatrix} x_0 = a.\cos\varphi \\ y_0 = b.\sin\varphi \\ z_0 = c \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{O_0M}\right)_{R_0} = \begin{pmatrix} x_0 = a.\cos\varphi \\ y_0 = b.\sin\varphi \\ z_0 = c + k.\varphi \end{pmatrix}$$

Donc la vitesse et l'accélération sot définies par :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\left(\overrightarrow{O_0M}\right)_{R_0}}{dt} = \begin{pmatrix} V_{x_0} = -a.\dot{\varphi}.\sin\varphi \\ V_{y_0} = b.\dot{\varphi}.\cos\varphi \\ V_{z_0} = k.\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_{M/R_0} = \frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} = -a.\ddot{\varphi}.\sin\varphi - a.\dot{\varphi}^2.\cos\varphi \\ \gamma_{y_0} = b.\ddot{\varphi}.\cos\varphi - b.\varphi.\dot{\sin}\varphi \\ \gamma_{z_0} = k.\ddot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Une barre homogène de longueur L, d'extrémités O et A. Cette barre est en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{z}_1)$**,** par un angle de rotation θ (Figure V.3), dans le repère fixe $\vec{R}_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$**.** Le repère $R(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_1)$ est lié à la barre, tel que : $\overrightarrow{OA} = L\vec{u}$

Déterminer les vecteurs de vitesse et d'accélération du point A, par deux méthodes

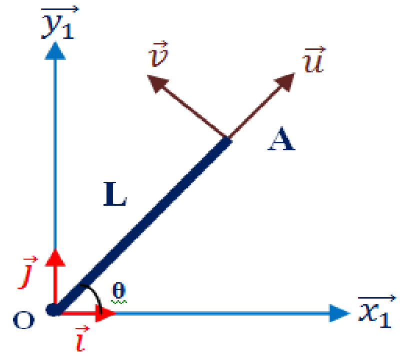


Figure V. 9: Mouvement d'une barre.

Pour déterminer les vecteurs de vitesse et d'accélération du point A en utilise deux méthodes :

- ***Par dérivation directe***

La vitesse :

L'expression de la vitesse est donnée par la formule:

$$\vec{V}_{A/R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d(L\vec{u})}{dt}\right)_{R_1} = L\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_1}$$

On a:

$$\vec{u} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \Longrightarrow \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_1} = \dot{\theta}(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}\vec{v}$$

$$\vec{V}_{A/R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_1} = L\dot{\theta}\vec{v}$$

L'accélération:

L'expression de l'accélération est donnée par la formule:

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \left(\frac{d(\vec{V}_{A/R_1})}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d(L\dot{\theta}\vec{v})}{dt}\right)_{R_1} = L\left[\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{v}\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt}\right)_{R_1}\right]$$

On a:

$$\vec{v} = (-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) \Longrightarrow \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R_1} = -\dot{\theta}(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} = -\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \left(\frac{d(\vec{V}_{A/R_1})}{dt}\right)_{R_1} = -L(\dot{\theta})^2\vec{u} + L\ddot{\theta}\vec{v}$$

- ***Par la distribution des vitesses*** **:**

La vitesse :

(A, O) sont deux points appartenant à la barre (L), la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, on écrit dans le point A est:

$$\vec{V}_{A/R_1} = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{\Omega}_{L/R_1} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$\vec{V}_{O/R_1} = \vec{0}$ (O: est le centre de rotation de la barre et fixe)

$\vec{\Omega}_{L/R_1} = \dot{\theta}\vec{z}_1$

$$\Longrightarrow \vec{V}_{A/R_1} = \vec{\Omega}_{L/R_1} \wedge \overrightarrow{OA} = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \mathrm{L}\vec{u} = L\dot{\theta}\vec{v}$$

L'accélération

L'accélération du point A s'écrit :

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \vec{\gamma}_{O/R_1} + \vec{\varepsilon}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_1} \wedge \overrightarrow{AB})$$

On a :

$\vec{\gamma}_{O/R_0} = \vec{0}$

$\vec{\varepsilon}_{S/R_1} = \ddot{\theta}\vec{z}_1$

$\vec{\Omega}_{L/R_1} = \dot{\theta}\vec{z}_1$

$\overrightarrow{AB} = \mathrm{L}\vec{u}$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \ddot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \mathrm{L}\vec{u} + \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge (\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \mathrm{L}\vec{u})$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = \mathrm{L}\ddot{\theta}\vec{v} + \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge (\mathrm{L}\dot{\theta}\vec{v})$$

$$\vec{\gamma}_{A/R_1} = -L(\dot{\theta})^2\vec{u} + L\ddot{\theta}\vec{v}$$