Traitement des problèmes d'optimisation linéaire à l'aide du logiciel Matlab

Les problèmes de l'optimisation linéaire, dans cette partie, sont à traiter à l'aide du logiciel Matlab. La fonction à utiliser est la fonction ***linprog***. La commande ***help linprog*** donne accès à l'aide sur cette fonction. Il est important de remarquer que ***linprog*** résout un problème de minimisation. Donc, le maximum d'une fonction Z sera cherché comme le minimum de la fonction –Z.

[xo,fo] = linprog(f,A,b,Aeq,Beq,l,u,x0,options)

```
% pour resoudre un probleme de programmation lineaire
% a l'aide du Optimization Toolkit de Matlab
%  min f'*x   = - max -f'*x
%  A*x <= b
%  Aeq*x = beq
%  lb <= x <= ub
% syntaxe de la commande: linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
% f = fonction objective: vecteur colonne
% A = matrice des contraintes d'inegalite A*x <= b
% b = vecteur colonne des contraintes d'inegalite A*x <= b
% Aeq = matrice des contraintes d'egalite Aeq*x = beq
% beq = vecteur colonne des contraintes d'egalite Aeq*x = beq
% lb = borne inferieure pour x
% ub = borne superieure pour x
% options = les options disponibles
```

<u>Exemple:</u>

Une compagnie possède deux mines de charbon A et B. La mine A produit quotidiennement 1tonne de charbon de qualité supérieure, 1 tonne de qualité moyenne et 6 tonnes de qualité inférieure. La mine B produit par jour 2, 4 et 3 tonnes de chacune des trois qualités. La compagnie doit produire au moins 90 tonnes de charbon de qualité supérieure, 120 tonnes de qualité moyenne et 180 tonnes de qualité inférieure. Sachant que le coût de production journalier est le même dans chaque mine, soit 1000, quel est le nombre de jours de production dans A et dans B qui minimisent le coût de production de la compagnie ?
La formulation mathématique de ce problème est comme suit :

Minimiser $z = 1000x_1 + 1000x_2$

Sous contraintes

$$x_1 + 2x_2 \geq 90$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 120$$
$$6\,x_1 + 3\,x_2 \geq 180$$

Et $x_1, x_2 \geq 0$

Les commandes utilisées pour résoudre ce problème sous Matlab :

```
z=[1000 1000]              % Coefficients de la fonction objective
A=[-1 -2;-1 -4;-6 -3]      % Coefficients de la matrice des contraintes d'inégalité
B=[-90 -120 -180]          % Second membre des contraintes
[X,Zval]=linprog(z,A,B,[],[],[0 0])
```

La réponse est obtenue sous la forme suivante:

```
Optimization terminated.

X =
  10.0000
  40.0000
Zval =
  5.0000e+04
```

Problème 1:

Donner la solution au problème d'optimalisation suivant :

Un épicier possède 450 kg de cacahuètes et 300 kg de noix en stock. Il vend à ses clients trois mélanges différents : le premier, qui ne contient que des cacahuètes, est vendu au prix de 25 $ le kilo. Le deuxième mélange est composé de deux tiers de cacahuètes et d'un tiers de noix ; il est vendu au prix de 40 $ le kilo. Le troisième mélange contient un quart de cacahuètes et trois quarts de noix ; son prix est de 50 $ le kilo. L'épicier aimerait savoir combien de kilos de chaque mélange il doit vendre pour maximiser son chiffre d'affaires.

Problème 2:

Résoudre le problème linéaire suivant :

Maximiser $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

Sous contraintes

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400$$

$$x_2 + 2x_3 \leq 200$$

Et $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Problème 3:

Soit la fonction économique : $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5$. Les variables sont positives et sont soumises aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_5 = 19 \end{cases}$$

- Trouver le maximum de z
- Trouver le minimum de Z

Problème 4:

Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\text{Min } z = 50x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 6x_4.$$

$$\text{S.C.} \quad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 50$$

$$16x_1 + 12x_2 \geq 152$$

$$3x_3 + 2x_4 \geq 6$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 8, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \quad 0 \leq x_4 \leq 2$$

Problème 5:

Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\text{Max } z = 16x_1 + 12x_2.$$

$$\text{S.C.} \quad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 50$$

$$50x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 6x_4 \leq 600$$

$$16x_1 + 12x_2 - 30x_3 - 20x_4 \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 8, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \quad 0 \leq x_4 \leq 2$$

Essayer plusieurs points initiaux : (0,0,0,0), (1,1,1,1), (2,2,2,2) par exemple. Pouvez-vous expliquer les résultats.