

Chapitre I :

Optimisation linéaire

I-1 Introduction

L'optimisation (programmation) linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont à une série d'équations et d'inéquations linéaires. La programmation linéaire a été formulée par George Bernard Dantzig en 1947 et connaît un développement rapide par suite de son application directe à la gestion scientifique des entreprises. Le facteur expliquant l'essor de la programmation linéaire est la construction d'ordinateurs puissants qui ont permis de traiter les problèmes concrets de taille très grande. On l'applique surtout en gestion et en économie appliquée. On peut citer les domaines d'application de la programmation linéaire qui sont : les transports, les banques, les industries lourdes et légères, l'agriculture, les chaînes commerciales, la sidérurgie, et même le domaine des applications militaires.

Les méthodes de résolution sont la méthode du simplexe, méthode duale du simplexe, méthodes des potentiels, méthode lexicographique et des méthodes récentes appelées méthodes des points intérieurs.

I.2 Définition

Un programme linéaire (PL) est un modèle mathématique qu'on peut écrire sous la forme : Maximiser ou minimiser la fonction objectif :

$$\min \max z = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (I.1)$$

$$\text{Sous les contraintes} \quad \begin{matrix} \leq \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ \geq \end{matrix} \quad (I.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (I.3)$$

Et

Où a_{ij} , b_i et c_i sont des constantes connues.

Les contraintes $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, sont appelées contraintes de non-négativité.

Définition 1. On appelle *solution* d'un problème de programmation linéaire tout vecteur x qui satisfait les contraintes (I.2).

Une solution est appelée *solution réalisable* si elle vérifie les contraintes de non-négativité (I.3). Dans le cas contraire, on dit que la solution n'est *pas réalisable*.

Définition2. Une solution réalisable est une *solution optimale* s'il n'existe pas d'autres solutions réalisables qui fournissent une plus grande valeur de la fonction objectif. A noter que dans un problème possédant des solutions réalisables, il se peut que la valeur optimale de la fonction objectif soit infini. Dans ce cas, on parle de *solution optimale infinie*.

I-3 Exemple de problème de programmation linéaire

I-3-1 Problème de production

Une entreprise fabrique des chaises et des tables à l'aide de deux machines A et B. Chaque produit passe obligatoirement par les deux machines. Pour produire une chaise, il faut 2 heures de machine A et 1 heure de machine B. Pour produire une table, il faut 1 heure de machine A et 2 heures de machine B.

L'entreprise réalise un bénéfice de 3 DZD. sur chaque chaise et de 4 DZD. sur chaque table. Les deux machines A et B sont disponibles 12 heures par jour au maximum.

Le problème consiste à savoir combien de chaises et de tables il faut fabriquer pour maximiser le bénéfice. Le tableau suivant montre :

1. le nombre d'heures nécessaires pour produire chaque table et chaque chaise par machine ;
2. le nombre total des heures disponibles ;
3. le profit pour chaque unité de chaise et de table produite.

Machine	Produit		Disponibilité
	Chaise	Table	
A	2	1	12
B	1	2	12
Bénéfice par unité	3	4	

Il s'agit à présent de formuler mathématiquement le problème.

Notons respectivement par x_1 et x_2 le nombre de chaises et de tables qui doit être produit par jour. Le bénéfice pour une chaise étant de 3 DZD.- et celui pour une table de 4 DZD, le bénéfice journalier est donc donné par la fonction objectif :

$$z = 3x_1 + 4x_2$$

Il faut formuler maintenant les contraintes. Puisque le temps où les machines peuvent fonctionner est limité, on ne peut pas accroître la production indéfiniment. Les machines A et B ne peuvent pas fonctionner plus de 12 heures par jour. On sait que pour produire une chaise, il faut 2 heures de machine A alors que pour une table il n'en faut qu'une.

La contrainte concernant la machine A est donc :

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

De même, une chaise requiert 1 heure de machine B, tandis qu'une table en demande 2. La contrainte concernant la machine B, avec la même durée maximale de 12 heures par jour, est donnée par :

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

De plus, comme on ne peut pas produire de quantités négatives, il faut ajouter encore deux contraintes de non-négativité :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Le problème consiste donc à trouver les valeurs des variables x_1 et x_2 qui maximisent le bénéfice journalier (fonction objectif) tout en satisfaisant les contraintes.

En résumé, le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } z = 3x_1 + 4x_2 \\ &\text{Sous contraintes } 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ &\quad \quad \quad x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{aligned}$$

Et,

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exemple 1 : (Production de peinture).

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données :

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Tableau Production de peinture. Données

Contraintes supplémentaires :

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.
- La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Formulation (Production de peinture) : Alternatives (variables, inconnues du problème)

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour

x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Fonction objectif à optimiser :

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2$$

Restrictions (contraintes)

$$\begin{aligned}
 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
 x_2 &\leq 2 \\
 x_2 - x_1 &\leq 1 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Solution admissible : satisfait toutes les contraintes : $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ ($\Rightarrow z = 21$)

Exemple 2 :

Une entreprise fabrique 2 produits X et Y. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A, B et C. Pour fabriquer un produit X, on a besoin de 2 produits A, de 2

produits B et de 1 produit C. De même, pour fabriquer un produit Y, on a besoin de 3 produits A, de 1 produit B et de 3 produits C. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A, B et C. Elle a 180 produits A, 120 produits B et 150 produits C.

Sachant que le prix de revient de X est 3 DA et que celui de Y est de 4 DA, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

Solution : On modélise ce problème par un programme linéaire. Soit x et y les quantités de produits X et Y fabriqués. La quantité totale de produits A utilisée est $2x + 3y$. Cette quantité ne doit pas dépasser 180, d'où la première contrainte.

$$2x + 3y \leq 180 \quad (2.3)$$

De même, pour les produits B et C, on obtient:

$$2x + y \leq 120 \quad (2.4)$$

$$x + 3y \leq 150 \quad (2.5)$$

Bien entendu, les quantités x et y sont positives.

$$x, y \geq 0 \quad (2.6)$$

Enfin, on tente de maximiser le profit qui est le total des bénéfices sur la vente des produits X plus celui des produits Y.

$$\text{Max: } 3x + 4y \quad (2.7)$$

Le programme linéaire est donc le suivant.

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 3x + 4y \\ 2x + 3y &\leq 180 \\ 2x + y &\leq 120 \\ x + 3y &\leq 150 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

On peut représenter le problème dans un espace à deux dimensions.

Représentation graphique du problème

L'exemple décrit ci-dessus peut être représenté graphiquement puisqu'il ne contient que deux variables. Avant de rechercher la solution du problème, représentons sur la figure I.1 la région des points $(x_1; x_2)$ qui satisfont les quatre contraintes simultanément. Les deux contraintes de non-négativité $x_1, x_2 \geq 0$ indiquent que cette région se trouve dans le premier quadrant. En ce qui concerne les deux autres inégalités, on étudie les équations de droite :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

La première est une droite passant par les points (6 ;0) et (0 ;12), tandis que la deuxième passe par (12 ;0) et (0 ;6). L'intersection de ces deux droites est le point (4 ;4). La région des points satisfaisant les quatre inégalités est la région hachurée sur la figure I.1. Elle a pour sommets les points (0 ;0), (0 ;6), (4 ;4) et (6 ;0).

Pour résoudre le problème de programmation linéaire, nous devons trouver le ou les points appartenant à ce polyèdre convexe et maximisant la fonction objectif : $z = 3x_1 + 4x_2$. Pour une valeur donnée de z , il s'agit d'une droite. En attribuant différentes valeurs à z on obtient autant de droites parallèles (quelle que soit la valeur de z , la pente reste inchangée et vaut $-3/4$).

Puisque le but est de maximiser la fonction objectif, la recherche de la solution optimale se fait en translatant la droite $z = 3x_1 + 4x_2$ de manière à ce que l'ordonnée à l'origine soit la plus grande. De plus, pour satisfaire les contraintes, l'intersection de cette droite avec la région hachurée doit être non vide.

Sur la figure I.1, la fonction objectif est tracée pour trois valeurs de z . La première valeur est $z_1 = 18$. Cette valeur n'est pas optimale puisque l'on peut encore déplacer la fonction objectif en gardant des points communs avec la région hachurée. La deuxième valeur $z_2 = 28$. Il s'agit de la valeur optimale puisque l'ordonnée à l'origine est la plus grande possible tout en gardant un point d'intersection avec la région hachurée.

La troisième valeur $z_3 = 38$ ne peut pas être optimale puisqu'il n'y a plus de point en commun entre la droite et la région hachurée.

Ainsi dans cet exemple, la solution optimale se situe à l'intersection des deux droites

$2x_1 + x_2 = 12$ et $x_1 + 2x_2 = 12$. Il s'agit d'une solution unique donnée par $x_1 = 4$ et $x_2 = 4$. Cela signifie que le bénéfice est maximal lorsqu'on produit 4 chaises et 4 tables par jour. Ce bénéfice s'élève à $z = 3(4) + 4(4) = 28$ par jour.

A noter que la solution optimale est l'un des sommets du polyèdre (point extrême).

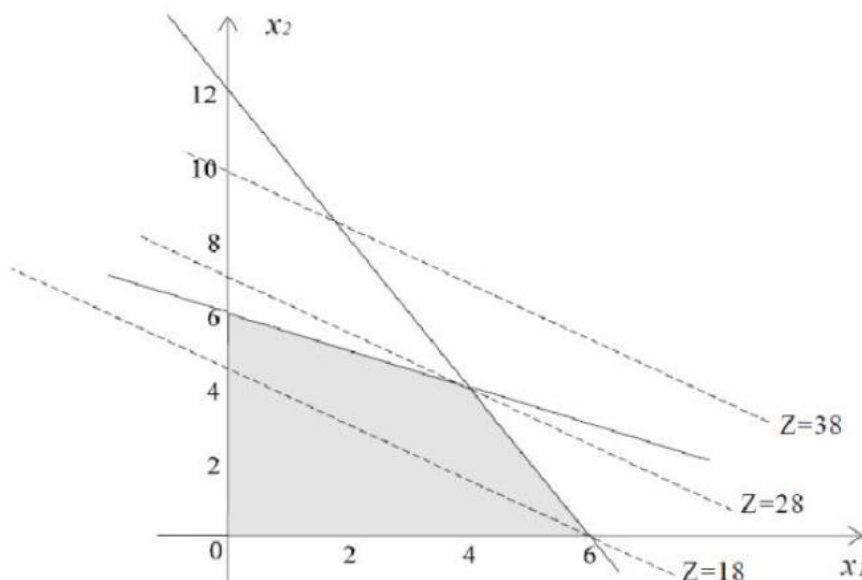


Figure I.1 : Région réalisable et fonction objectif pour $z_1 = 18$, $z_2 = 28$ et $z_3 = 38$

I-3-2 Problème de Mélange. Il faut mélanger trois gaz de telle manière que le gaz mixte soit le meilleur marché que possède un pouvoir calorifique entre plus de 1700 et 2000 k. cal/ m³ et un taux de sulfure au plus de 2,8 g/ m³.

Indications sur les trois gaz :

Gaz	Pouvoir calorifique k. cal/ m ³	Taux de sulfure g/ m ³	Prix en DA
1	1000	6	100
2	2000	2	250
3	1500	3	200

Ecrire le modèle mathématique de ce problème.

Formulation du problème

- ✓ **Variables :** x_1 , x_2 et x_3 sont les nombres en m³ du 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} gaz à fabriquer respectivement.
- ✓ **Fonction objectif à maximiser :** La fonction objectif Z correspond au profit total :

$$Z = 100 x_1 + 250 x_2 + 200 x_3$$

On cherche donc

$$\text{Max } Z = 100 x_1 + 250 x_2 + 200 x_3$$

- ✓ **Contraintes :**

- Pouvoir calorifique $1700 \leq 1000x_1 + 2000x_2 + 1500x_3 \leq 2000$
- Taux de sulfure $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2.8$
- Positivité des variables $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

I-3-3 Problème de découpe.

Une usine a reçu des plaques de métal d'une largeur de 200 cm et d'une longueur de 500 cm. Il faut en fabriquer au moins 30 plaques de largeur de 110 cm, 40 plaques de largeur de 75 cm et 15 plaques de largeur de 60 cm. Donner le modèle mathématique pour que les déchets soient les plus petits possibles.

Formulation du problème

Une plaque de 200 cm de largeur peut être découpée de cinq façons :

1. une plaque de 75 cm et deux plaques de 60 cm. Les déchets seront de 05 cm.
2. une plaque de 110 cm et une plaque de 75 cm. Les déchets seront de 15 cm.
3. une plaque de 110 cm et une plaque de 60 cm. Les déchets seront de 30 cm.
4. trois plaques de 60 cm. Les déchets seront de 20 cm.
5. deux plaques de 75 cm. Les déchets seront de 50 cm.

- ✓ **Variables :** x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et x_5 sont les nombres de plaques à découper par la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème}, 4^{ème} et la 5^{ème} façons respectivement.
- ✓ **Fonction objectif à minimiser :** La fonction objectif Z correspond déchet total :

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$

On cherche donc :

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$

- ✓ **Contraintes :**

- Plaques de largeur 110cm $x_3 + x_2 \geq 30$
- Plaques de largeur 75cm $x_1 + x_2 + 2x_5 \geq 40$
- Plaques de largeur 60cm $2x_1 + x_3 + 3x_4 \geq 15$
- Positivité des variables $x_1 \geq 0$, ..., $x_5 \geq 0$

I-3-4 Problème de transport.

Il s'agit ici d'un problème que l'on peut résoudre par la programmation linéaire, c'est-à-dire un problème de transport. Ce type de problème se définit comme suit.

Connaissant les quantités disponibles de chacune des unités de production, les quantités requises aux points de distribution et le coût de transport d'un bien d'une usine vers un point de vente, il s'agit de déterminer le plan de transport optimal, c'est-à-dire de déterminer les quantités de biens que chaque usine va envoyer vers chacun des points de vente afin que le coût de transport total soit minimum. On suppose qu'il est possible d'expédier des produits de n'importe quelle origine vers n'importe quelle destination.

L'exemple ci-dessous est le cas d'une fabrique de conserves qui expédie des caisses vers ses dépôts. Nous voulons que le plan d'expédition des caisses minimise le coût total de transport des usines aux dépôts. Pour simplifier, supposons qu'il y a deux usines et trois dépôts. L'offre des usines et les demandes des dépôts sont les suivantes (en nombre de caisses) :

Usine 1 : 350 dépôt 1 : 200

Usine 2 : 450 dépôt 2 : 300

dépôt 3 : 50

Les coûts de transport de chaque origine vers chaque destination sont donnés dans le tableau ci-dessous(en DA par caisse) :

Usines	Dépôts		
	1	2	3
1	25	17	16
2	24	18	14

Ainsi, le coût pour transporter une caisse de l'usine 1 au dépôt 1 est de 25, le coût pour transporter une caisse de l'usine 2 vers le dépôt 1 est de 24, et ainsi de suite. Ce problème peut se formuler sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Notons par c_{ij} le coût de transport d'une caisse de l'origine i vers la destination j . Nous avons donc, d'après le tableau précédent :

$$c_{11} = 25, c_{12} = 17, c_{13} = 16, c_{21} = 24, c_{22} = 18, c_{23} = 14$$

Soit a_i la quantité de caisses disponibles à l'origine i et b_j celle requise à la destination j .

Nous pouvons représenter le problème sous forme d'un diagramme (figure I.2). Les lignes qui relient les usines aux dépôts peuvent être considérées comme des routes. On y indique leur coût de transport unitaire respectif.

A noter que le nombre de caisses disponibles doit être supérieur ou égal au nombre de caisses requises :

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b_3$$

Dans le cas contraire, le problème n'a pas de solutions réalisables.

Si x_{ij} représente le nombre de caisses expédiées de l'origine i vers la destination j , le coût total de l'expédition se traduit alors par l'équation :

$$z = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 c_{ij} x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

$$z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

C'est la fonction objectif à minimiser.

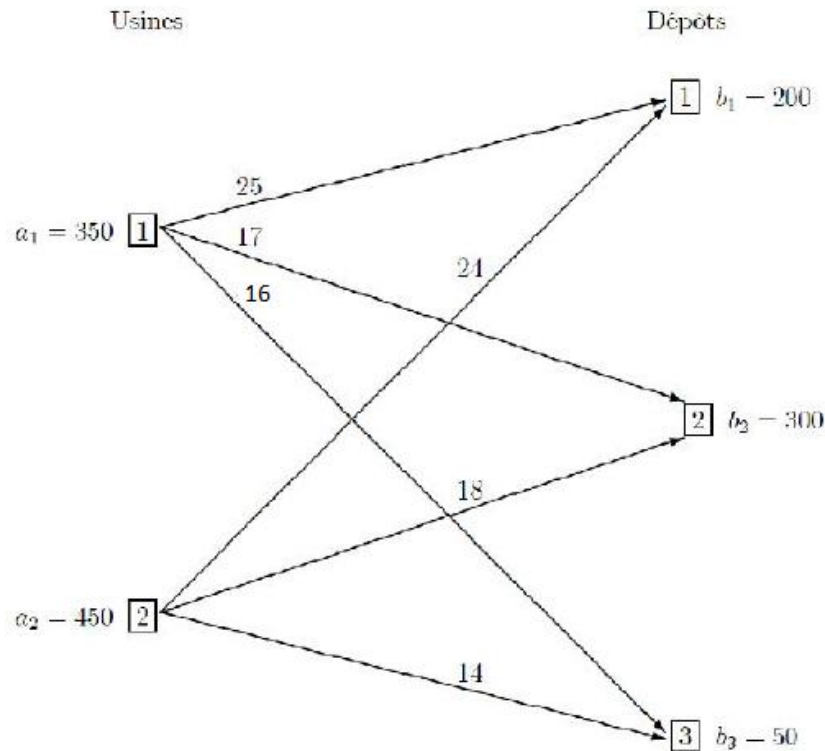


Figure I.2 : Coût de transport unitaire des usines aux dépôts

Comme il est impossible d'expédier plus de caisses d'une origine donnée qu'il n'y en a de disponibles, nous sommes confrontés aux deux contraintes :

$$\sum_{j=1}^3 x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \quad (\text{usine 1})$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \quad (\text{usine 2})$$

De plus, il faut approvisionner chacun des trois dépôts avec la quantité requise, ce qui nous donne trois nouvelles contraintes :

$$\sum_{i=1}^2 x_{i1} = x_{11} + x_{21} = 200 \quad (\text{dépot 1})$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{i2} = x_{12} + x_{22} = 300 \quad (\text{dépot 2})$$

$$\sum_{i=1}^2 x_{i3} = x_{13} + x_{23} = 50 \quad (\text{dépot 3})$$

Comme il n'est pas possible d'expédier des quantités négatives, nous avons encore les six contraintes de non-négativité suivantes :

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3$$

Finalement, le programme linéaire à résoudre est :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & Z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23} \\
 \text{Sous contraintes} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 450 \\
 & x_{11} + x_{21} = 200 \\
 & x_{12} + x_{22} = 300 \\
 & x_{13} + x_{23} = 50 \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2 \text{ et } j = 1,2,3
 \end{array}$$

Comme ce problème présente plus de deux variables, nous ne pouvons pas le résoudre géométriquement.

Méthode Simplexe (tableau Simplexe)

Exemple :

$$MaxZ = 7x_1 + 6x_2$$

S. C

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forme standard

$$MaxZ = 7x_1 + 6x_2 + 0t_1 + 0t_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + t_1 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + t_2 = 12$$

$$x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0$$

t_1, t_2 Sont des variables d'écart

Tableau initial

Coefficient dans Z						
		x_1	x_2	t_1	t_2	bi
Var. Base	Coeff. base					
Z_j						
$C_j - Z_j$						

Coefficient dans Z		7	6	0	0	
		x_1	x_2	t_1	t_2	bi
Coeff. base	Var. Base					
0	t_1	2	4	1	0	16
0	t_2	3	2	0	1	12
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		7	6	0	0	

Recherche du pivot

Coefficient dans Z		7	6	0	0		
		x_1	x_2	t_1	t_2	bi	Rapport
Coeff. B	Var. base						
0	t_1	2	4	1	0	16	16/2=8
0	t_2	3	2	0	1	12	12/3=4
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		7	6	0	0		

La plus petite valeur positive des rapports

La plus grande valeur positive des coeff dans Z

x_1 entre dans la base et t_2 sort de la base

La ligne du pivot est divisée par le pivot et on applique la méthode du rectangle pour les autres cases

Coefficient dans Z		7	6	0	0		
		x_1	x_2	t_1	t_2	bi	Rapport
Coeff. B	Var. base						
0	t_1	0	8/3	1	-2/3	8	
7	x_1	1	2/3	0	1/3	4	
Z_j		7	14/3	0	7/3	28	
$C_j - Z_j$		0	4/3	0	-7/3		

La solution est optimale lorsque tous les $C_j - Z_j$ sont nuls ou négatifs

Pour ce cas la solution $x_1=4$, $x_2=0$, $Z=28$ n'est pas une solution optimale

On répète le même processus

Coefficient dans Z		7	6	0	0		
		x_1	x_2	t_1	t_2	bi	Rapport
Coeff. B	Var. base						
0	t_1	0	8/3	1	-2/3	8	3
7	x_1	1	2/3	0	1/3	4	6
Z_j		7	14/3	0	7/3	28	
$C_j - Z_j$		0	4/3	0	-7/3		

Coefficient dans Z		7	6	0	0		
		x_1	x_2	t_1	t_2	bi	Rapport
Coeff. B	Var. base						
6	x_2	0	1	3/8	-1/4	3	
7	x_1	1	0	-1/4	1/2	2	
Z_j		7	6	1/2	2	32	
$C_j - Z_j$		0	0	-1/2	-2		

La solution optimale est

$x_1=2$, $x_2=3$, $z=32$