

Travaux Dirigés (Série N° 1)

Exercice N° 1 :

Pour $n=2$ écrire explicitement l'expression $S_1 = x_i y_i$.

Pour $n=3$ écrire explicitement l'expression $S_2 = A_{ijk} B_{ij}$.

Pour $n=2$ écrire explicitement l'expression $S_3 = a_{ijk} b_{ij} c_k$.

Exercice N° 2 :

Utiliser la convention de sommation pour écrire les expressions suivantes, en précisant la valeur de n dans chaque cas :

$$A = a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + a_{j3} x_3$$

$$B = b_{11} d_{11} + b_{12} d_{12} + b_{13} d_{13} + b_{14} d_{14}$$

$$C = C^1_{11} + C^2_{12} + C^3_{13} + C^4_{14} + C^5_{15}$$

Exercice N° 3 :

Soient $e_1 (1,0,0)$, $e_2 (0,1,0)$, $e_3 (0,0,1)$ une base de R^3 ; on définit les vecteurs A et B par :

$$A = 4 e_1 + 2 e_2 + e_3$$

$$B = 3 e_1 - 5 e_2 + 2 e_3$$

1°) déterminer le produit scalaire $(A \cdot B)$ des vecteurs A et B .

2°) déterminer le produit vectoriel $(A \wedge B)$ des vecteurs A et B .

3°) déterminer le produit tensoriel $(A \otimes B)$ des vecteurs A et B .

4°) déterminer l'angle entre les vecteurs A et B .

Même chose pour les vecteurs $A = (2, 1, 3)$

$B = (1, 2, 4)$

Exercice N° 4 :

Montrer que : $I + (*n)^2 = {}^t(n) (n)$ avec ${}^t n = (n_1, n_2, n_3)$ un vecteur unitaire

Exercice N° 5 :

On considère la base $\{f_j\}$ de R^3 défini par les vecteurs suivants :

$$f_1 = (1, 0, 0) \quad f_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \quad f_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

et le vecteurs : $A = 8 e_1 + 6 e_2 + 3 e_3$

1°) la base $\{f_j\}$ est-elle orthonormée ?

2°) déterminer les projections du vecteur A sur les axes de vecteurs f_1 , f_2 et f_3 .

3°) déterminer les composantes du vecteur A dans la base (f_1, f_2, f_3) .

Travaux Dirigés (Série N° 1 - bis)

Exercice N° 6 :

On considère la fonction vectorielle définie par $F=(u, v, w)$ telle que :

$$\begin{aligned}u &= 8x_1 + 6x_2 \\v &= 10x_1 - 8x_2 \\w &= 12x_3\end{aligned}$$

- 1°) Déterminer le tenseur $\text{Grad}F$.
- 2°) Déterminer le tenseur transposé du $\text{Grad} F$ noté $\text{Grad}^t F$.
- 3°) Déterminer le tenseur A tel que $A = (\text{Grad} F + \text{Grad}^t F)/2$.
- 4°) Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A .

Exercice 07

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice N° 8 :

a) Démontrer les propriétés suivantes du gradient, pour des champs de scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$ et $g(x, y, z)$:

$$\text{Grad}(f+g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$$

$$\text{Grad}(af) = \alpha \text{Grad}(f)$$

$$\text{Grad}(f.g) = g \text{Grad}(f) + f \text{Grad}(g)$$

b) Soit la fonction scalaire : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 (2 + x_2 x_3^3)$

Déterminer le Gradient de f .

Déterminer le Laplacien de f .