

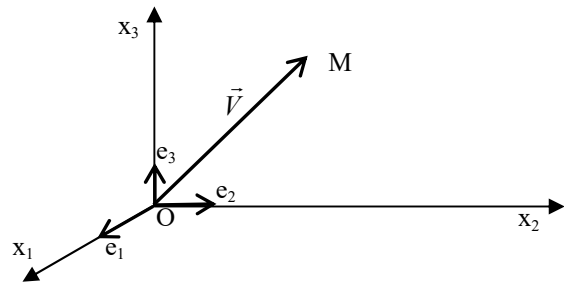
Chapitre II

Calcul tensoriel et notation indicielle

I-1 Espace et repère

Dans le cadre de ce cours, on se place toujours dans l'espace physique euclidien munie d'un repère direct et de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Un vecteur $\vec{V}$ est représenté par ses composantes sous la forme suivante :

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3)^T$$



I-2 Notation indicielle

I-2-1 Dérivée partielle

$$u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad ; \quad v_{,ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad w_{,ijk} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_i^2 \partial x_j}$$

I-2-2 Convention de sommation

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$S_j = a_j^i x_i = a_j^k x_k = a_j^e x_e \quad i, k, e : \text{indice muet}$$

$$j : \text{indice libre}$$

Exemple : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ et $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)^T$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_i \cdot v_i = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 \quad i=1,2,3$$

Attention : $a_i + b_i \neq (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$

I-2-3 Symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple : le produit scalaire des vecteurs de la base orthonormée

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3$$

I-2-4 Symbole de Permutation

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, i = k \text{ ou } j = k \\ +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ sont dans cet ordre } (1,2,3), (3,1,2) \text{ ou } (2,3,1) \text{ (dite permutation pair)} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ sont dans cet ordre } (2,1,3), (1,3,2) \text{ ou } (3,2,1) \text{ (dite permutation impair)} \end{cases}$$

Exemple : le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ et $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)^T$

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} \quad \text{avec} \quad w_i = \varepsilon_{ijk} \cdot u_j \cdot v_k \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3 \quad k=1,2,3$$

(i : indice libre, j, k : indices muets)

I-3 Tenseurs

I-3-1 Construction d'un tenseur d'ordre 2

Soient deux vecteur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ définis dans l'espace vectoriel R^3 munit de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\vec{X} = x^i e_i \quad \text{et} \quad \vec{Y} = y^i e_i$$

On définit le produit tensoriel de deux vecteur $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ par :

$$\begin{aligned} U = \vec{X} \otimes \vec{Y} &= (x^1 y^1, x^1 y^2, x^1 y^3, x^2 y^1, x^2 y^2, x^2 y^3, x^3 y^1, x^3 y^2, x^3 y^3) \\ &= x^i y^j e_i \otimes e_j \end{aligned}$$

Définition : Un tenseur A est un opérateur (application) linéaire sur R^3 dont les composantes sont définis par rapport à une base.

$$\forall X, Y \in R^3 \quad A(X + Y) = A(X) + A(Y)$$

$$\forall \lambda \in R; X \in R^3 \quad A(\lambda X) = \lambda A(X)$$

La relation $Y=A(X)$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad y^j = A_i^j x^i$$

(A) est la matrice associée au tenseur A

Théorème : Tous tenseur se décompose, et d'une façon unique, en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2} = A^s + A^a = \begin{cases} A^s = \frac{A + {}^t A}{2} & \text{symétrique} \\ A^a = \frac{A - {}^t A}{2} & \text{antisymétrique} \end{cases}$$

I-3-2 Changement de base orthonormée

Soient $\{e_j\}$ la base initiale et $\{f_j\}$ une nouvelle base telle que : $f_j = P_j^i e_i$

P : matrice de passage

Si $\{f_j\}$ est une base orthonormée alors $(P^{-1}) = ({}^t P)$

a) Vecteurs

$$\vec{X} = x^i e_i = \bar{x}^j f_j \Rightarrow {}^t P \bar{x} = x$$

$$\{f_j\} \text{ est une base orthonormée} \Rightarrow \bar{x} = ({}^t P)^{-1} x = (P^{-1})^{-1} x = P x$$

b) Tenseurs

$$\text{Dans la base initiale} \quad Y = A(X)$$

$$\text{Dans la nouvelle base} \quad \bar{Y} = \bar{A}(\bar{X}) \quad \text{tel que} \quad \bar{A} = (P)A(P^{-1})$$

I-3-3 Opérateur du produit vectoriel

$$\text{Soient deux vecteurs} \quad \vec{n} = n_i e_i \quad \text{et} \quad \vec{u} = u_i e_i$$

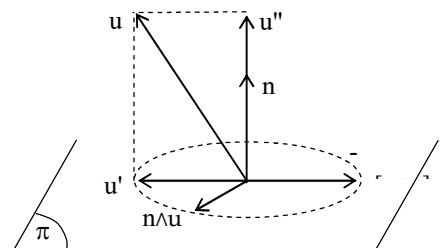
$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 u_3 - n_3 u_2 \\ n_3 u_1 - n_1 u_3 \\ n_1 u_2 - n_2 u_1 \end{pmatrix} = (*n)\vec{u} \quad \text{avec} \quad (*n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(*n)$ est la matrice du tenseur produit vectoriel à gauche par $\vec{n}$.

I-3-4 Opérateur de projection

$\vec{n}$ vecteur normal au plan π

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$$



La projection du vecteur $\vec{n}$ sur la plan π est :

$$\vec{u}' = -(*n)^2 \vec{u}$$

$-(*)^2$ est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur le plan π

La projection du vecteur $\vec{n}$ sur l'axe d'unitaire $\vec{n}$ est :

$$\vec{u}'' = [I + (*n)^2] \vec{u}$$

$I + (*n)^2$ est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur l'axe d'unitaire $\vec{n}$.

Remarque : si le vecteur n est unitaire ($|\vec{n}|=1$) alors : $I + (*n)^2 = (\vec{n}) \cdot^t (\vec{n})$

Exemple :

On considère une base orthonormée de R_3 définie par les vecteurs suivant :

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \vec{e}_1 + \frac{1}{6} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_3$$

Soit le vecteur A défini dans la base initiale par : $A = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

a) Déterminer les projections du vecteur A sur les axes d'unitaires $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ et $\vec{f}_3$.

b) Déterminer la projection du vecteur A sur le plan formé par les vecteurs $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$.

Solution :

a) Soient $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ les projections du vecteur A respectivement sur les axes $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ et $\vec{f}_3$.

$$\vec{A}_i = [I + (*f_i)^2] A = [(f_i) \cdot^t (f_i)] A$$

$$\vec{A}_1 = [{}^t(f_1)(f_1)] \cdot A = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{array} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_2 = [{}^t(f_2)(f_2)] \cdot A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_3 = [{}^t(f_3)(f_3)] \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Soit $\bar{A}_{12}$ la projection du vecteur A sur le plan formé par les vecteurs f_1 et f_2 .

Le vecteur unitaire f_3 est normal au plan formé par les vecteurs f_1 et f_2 .

$$\bar{A}_{12} = [-(f_3)^2]A$$

$$\bar{A}_{12} = [-(f_3)^2] \cdot A = \left[- \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

I-3-5 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : On appelle vecteur propre du tenseur A tous vecteur $\vec{X}$ non nul tel que $A(\vec{X}) = \lambda(\vec{X})$

λ : valeur propre associé à $\vec{X}$

Pour déterminer les valeurs propres λ_i il faut résoudre l'équation : $\det(A - \lambda I) = 0$

Pour déterminer les vecteurs propres $\vec{X}$ il faut résoudre l'équation vectorielle : $(A - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}$

Exemple

On considère le tenseur A suivant défini dans la base (e_1, e_2, e_3) :

$$A = \begin{pmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A.

Solution :

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et X_I, X_{II} et X_{III} les directions propres correspondants.

Valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 57 - \lambda & 0 & 24 \\ 0 & 50 - \lambda & 0 \\ 24 & 0 & 43 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(50 - \lambda)[(57 - \lambda)(43 - \lambda) - 576] = 0 \Rightarrow (50 - \lambda)(\lambda^2 - 100\lambda + 1875) = 0$$

$$\lambda_1 = 50 \qquad \lambda_2 = 75 \qquad \lambda_3 = 25$$

Directions propres :

Pour $\lambda_1 = 50$

$$(A - \lambda_1 I) X_I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 57-50 & 0 & 24 \\ 0 & 50-50 & 0 \\ 24 & 0 & 43-50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7a_1 + 24c_1 = 0 \\ 0b_1 = 0 \\ 24a_1 - 7c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_I = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ la valeur de } b_1 \text{ est quelconque}$$

$$X_I \text{ vecteur unitaire} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad b_1^2 = 1$$

$$\text{on prend } b_1 = +1 \Rightarrow X_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 75$

$$(A - \lambda_2 I) X_{II} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 57-75 & 0 & 24 \\ 0 & 50-75 & 0 \\ 24 & 0 & 43-75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -18a_2 + 24c_2 = 0 \\ -25b_2 = 0 \\ 24a_2 - 32c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{3}{4}a_2 \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_{II} \text{ vecteur unitaire} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \quad a_2^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a_2^2 = 1 \Rightarrow a_2^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{On prend : } a_2 = \frac{4}{5} = 0.8 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow X_{II} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3 = 25$

$$(A - \lambda_3 I) X_{III} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 25-75 & 0 & 24 \\ 0 & 25-75 & 0 \\ 24 & 0 & 25-75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la même manière que X_{II} on trouve X_{III} .

$$X_{III} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

X_{III} peut être trouver par la relation suivante : $X_{III} = X_I \wedge X_{II}$

$$X_{III} = X_I \wedge X_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

I-4 Opérateurs différentielles

Soit un point P de coordonnées x_1, x_2, x_3 . $P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $dP \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$

$\phi(x_1, x_2, x_3)$: fonction scalaire des coordonnées de P.

$\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$: fonction vectorielle des coordonnées de P. $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$

I-3-1 Gradient d'une fonction scalaire

$$d\phi = \text{grad}\phi \cdot dp \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}\phi} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{pmatrix} \quad \text{c'est un vecteur}$$

I-3-2 Gradient d'une fonction vectorielle

$$d\vec{u} = \text{grad}\vec{u} \cdot dp \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3 \\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3 \\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad \text{c'est un tenseur}$$

I-3-3 Divergence d'une fonction vectorielle

$$\text{div}(\vec{u}) = \text{tr}(\text{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_p}{\partial x_p} \quad \text{c'est un scalaire}$$

I-3-4 Divergence d'un tenseur

$A(x_1, x_2, x_3)$: tenseur des coordonnées de P

$$\text{div}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_i^1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial A_i^2}{\partial x_i} \\ \frac{\partial A_i^3}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad \text{c'est un vecteur}$$

I-3-5 Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad} \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_p} \right) \quad \text{c'est un scalaire}$$

I-3-6 Laplacien d'une fonction vectorielle

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_p} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_p} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_p} \right) \end{pmatrix} \quad \text{c'est un vecteur}$$

I-3-7 Rotationnel d'une fonction vectorielle

$$\text{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad * \text{rot}(\vec{u}) = 2 \text{ antisym}(\text{grad}(\vec{u}))$$

I-3-8 Coordonnées cylindriques d'axe Ox_3

$$P \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ x_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad dP \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

a) Gradient d'une fonction scalaire

$$d\varphi = \text{grad}\varphi \cdot d\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

b) Gradient d'une fonction vectorielle

$$d\vec{u} = \text{grad}\vec{u} \cdot d\mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta} - u_2 \right) & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1 \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_3}{\partial\theta} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

c) Divergence d'une fonction vectorielle

$$\text{div}(\vec{u}) = \text{tr}(\text{grad}\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1 \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

d) Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta\varphi = \text{div}(\text{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

I-4 Théorème intégrale de Gauss et de Stokes

Soit un volume V de frontière S sur laquelle est défini en tout point régulier la normale unitaire extérieure $\mathbf{n}$. Soit la grandeur A continue et dérivable sur V . Le théorème de divergence de Gauss (ou de Green-Ostogradski) traduit la relation entre l'intégrale de volume est l'intégrale de surface :

$$\iiint_V \text{div}(A) dV = \iint_S A \cdot \vec{n} dS \quad \text{ou} \quad \iiint_V A_{ij,j} dV = \iint_S A_{ij} \cdot n_j dS$$

Soit une surface plane S de normale $\mathbf{n}$ et de contour C . Soit $\mathbf{t}$ le vecteur tangent sur ce contour. Le théorème de Stokes permet de passer de l'intégrale de surface à l'intégrale de contour et inversement :

$$\iint_S \text{rot}(A) \cdot \vec{n} dS = \int_C A \vec{\tau} dC \quad \text{ou} \quad \iint_S \varepsilon_{ijk} A_{k,j} \cdot n_i dS = \int_C A_i \tau_i dC$$

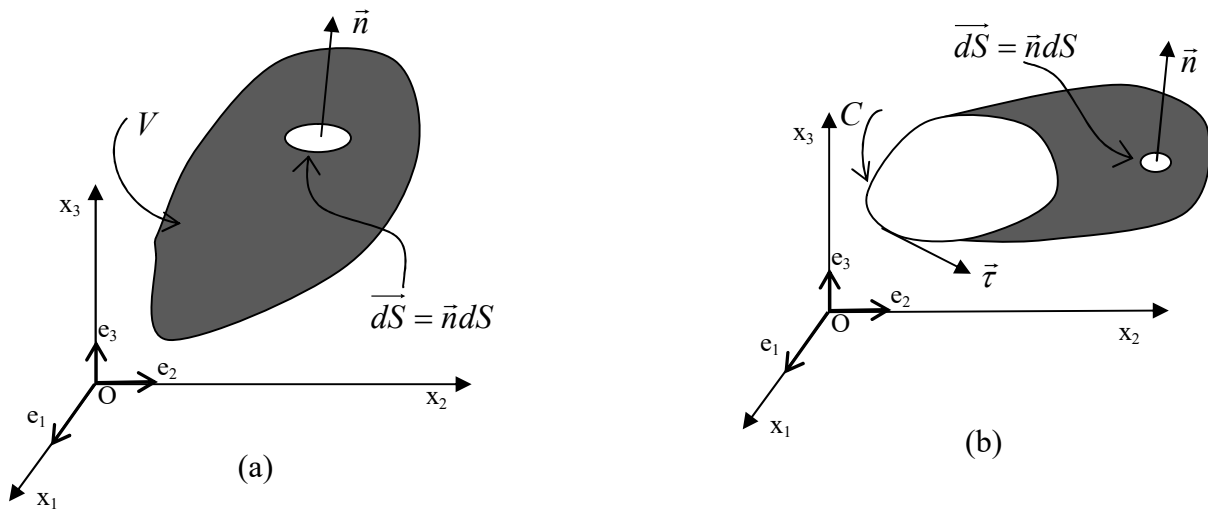


Fig. xx