

CHAPITRE 2

Méthodes analytiques

1. Equations différentielles linéaire:

une équation différentielle est linéaire si la variable dépendante U et ses dérivées partielles apparaissent séparément et au plus à la première puissance et n'apparaissent dans aucune des fonctions.

Exemple:

Eq. diff. du premier ordre linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Eq. diff. du premier ordre non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin(u) = 0$$

Eq. diff. du second ordre non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2. Principe de superposition:

Si u_1 et u_2 satisfont une EDP linéaire et homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $\alpha u_1 + \beta u_2$ avec α et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation.

3. Méthode de séparation des variables:

La méthode de séparation des variables est largement utilisée pour résoudre des équations différentielles partielles vérifiant certaines conditions initiales et certaines conditions aux limites.

3-1- Applications:

3-1-1 Equation de la chaleur

Considérons un fil ou une fine tige métallique de longueur L . Soit x la position le long du fil et soit t le temps. soit $u(x, t)$ la température au point x et au temps t .

L'équation régissant cette configuration s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{où } k > 0 \quad (1)$$

Les extrémités du fil sont maintenues à la température $T=0$. Alors les conditions aux limites sont:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (\text{conditions de Dirichlet}) \quad (2)$$

On a également besoin d'une condition initiale

$$\text{Au temps } t=0 \quad u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

Application de la méthode des séparation des variables:

la méthode des séparation des variables consiste à essayer de trouver des solutions qui des produits de fonctions à une variable.

on essaie de trouver les solutions de la forme:

$$u(x, t) = X(x).T(t) \quad (4)$$

Par différentiation de (4) par rapport à t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T'(t)X(x)$$

et deux fois par rapport à x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

et par substitution dans (1), on obtient:

$$T'(t)X(x) = kX''(x)T(t) \quad 0 < x < L \quad t > 0$$

On peut écrire:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5)$$

Cette doit être valable pour tout x et pour tout t mais le côté gauche ne dépend pas de x et le côté droite ne dépend pas de t . Par conséquent chaque côté doit être une constante. Appelons cette constante $(-\lambda)$.

On obtient:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

ou

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (6)$$

$$T' + \lambda kT = 0 \quad (7)$$

On cherche une solution non triviale et on peut supposer que $T(t) \neq 0$ alors

$$\begin{cases} u(0, t) = X(0).T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L).T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0$$

On cherche maintenant à résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(L) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

On distingue trois cas:

Cas 1: $\lambda = -\mu^2 < 0$ alors:

$$X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$$

α et β sont des réels.

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L} = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\beta$$

$$\alpha e^{-\mu L} = \alpha e^{\mu L}$$

si $\alpha \neq 0$, on obtient $e^{2\mu L} = 1$

ceci n'est pas possible car $\mu \neq 0$ et $L \neq 0$

Par conséquent

$$\alpha = \beta = 0 \quad \text{alors } X \equiv 0 \quad \text{et } u(x, t) = 0$$

Cas 2: $\lambda = 0$ alors:

$$X(x) = \alpha + \beta x$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta L = 0 \end{cases}$$

avec $L \neq 0$

$$\text{Alors } \alpha = \beta = 0$$

dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ tout $0 \leq x \leq L$ $t \geq 0$

Cas 3: $\lambda = \mu^2 > 0$ alors:

$$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \sin(\mu L) = 0 \end{cases}$$

pour éviter la solution $X \equiv 0$, on suppose $\beta \neq 0$

Alors:

$$\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \quad \text{et } \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Enfin:

$$X_n(x) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Il reste maintenant à résoudre l'équation (7)

c'est l'une des équations fondamentale et la solution est une exponentielle. elle est donnée par:

$$T_n(t) = \delta_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Alors:

$$u(x, t) = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

On utilise le principe de superposition pour écrire

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x) \quad \text{condition initiale.}$$

3-1-2 Equation de Laplace

Soit le domaine Ω , l'équation de Laplace par rapport à la dépendante u s'écrit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

Pour:

$$0 < x < L \quad \text{et} \quad 0 < y < K$$

Les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(L, y) = 0 \quad \text{pour } 0 < y < K \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad u(x, K) = \psi(x) \quad \text{pour } 0 < x < L \end{aligned} \quad (10)$$

Où $\varphi, \psi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Dans ce cas les conditions de compatibilités sont:

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0$$

- Séparation des variables:

La méthode repose sur la séparation des variables x et y . Nous supposons une solution u de la forme:

$$u(x, y) = X(x).Y(y) \quad (11)$$

en injectant (11) dans (9), nous obtenons l'égalité suivante:

$$X''(x).Y(y) = -Y''(y).X(x)$$

et donc il y a une constante λ telle que

$$X'' - \lambda X(x) = Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

On cherche une solution non triviale et on peut supposer que $Y(y) \neq 0$ alors

$$\begin{cases} u(0, y) = X(0).Y(y) = 0 \\ u(L, y) = X(L).Y(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0$$

On cherche la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{pour } 0 < x < L \\ X(0) = 0, & X(L) = 0 \end{cases}$$

$-\lambda = \mu^2 > 0$ alors:

$$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \sin(\mu L) = 0 \end{cases}$$

pour éviter la solution $X \equiv 0$, on suppose $\beta \neq 0$

Alors:

$$\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \text{ et } \lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Enfin:

$$X_n(x) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

La solution générale de:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$$

Pour $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ est:

$$Y(y) = P e^{\frac{n\pi}{L}y} + Q e^{-\frac{n\pi}{L}y}$$

avec P et Q sont des constantes arbitraires

Les solutions de (9) ayant la forme:

$$u_n(x, y) = \sin \frac{n\pi}{L} x \left(P e^{\frac{n\pi}{L}y} + Q e^{-\frac{n\pi}{L}y} \right)$$

avec le principe de superposition pour écrire

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^m \left(P_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}y} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

On essaie de choisir m, P_n, Q_n afin de satisfaire les conditions (10) qui deviennent

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^m (P_n + Q_n) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

et

$$\psi(x) = u(x, K) = \sum_{n=1}^m \left(P_n e^{\frac{n\pi}{L}K} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}K} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

On peut écrire:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

et

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Où tous, sauf un nombre fini, les coefficient α_n et β_n sont nuls.:

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = P_n + Q_n$$

$$\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = P_n e^{\frac{n\pi}{L} K} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L} K}$$

La solution de ce système est

$$P_n = \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L} K}}{2 \sinh \frac{n\pi}{L} K} \text{ et } Q_n = \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L} K} - \beta_n}{2 \sinh \frac{n\pi}{L} K}$$

En ce cas la solution est:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L} K}}{2 \sinh \frac{n\pi}{L} K} e^{\frac{n\pi}{L} y} + \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L} K} - \beta_n}{2 \sinh \frac{n\pi}{L} K} e^{-\frac{n\pi}{L} y} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{L} x}{2 \sinh \frac{n\pi}{L} K} \left(\beta_n \sinh \frac{n\pi}{L} y - \alpha_n \sinh \frac{n\pi}{L} (y - K) \right) \end{aligned}$$

avec

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

et

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

3-1-3 Equation d'onde

soit à trouver la solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (12)$$

satisfaisant aux conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution non identiquement nulle de l'équation (12) satisfaisant les conditions aux limites précédentes sous forme de produit de deux fonctions $X(x)$ et $T(t)$ dont la première ne dépend que de x et la deuxième ne dépend que de t

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

effectuant une substitution dans (12) et avec un réarrangement on obtient:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Nous obtenons de ces égalités deux équations:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

Les solutions générales de ces équations sont:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x) \\ T(t) &= C \cos(a \mu t) + D \sin(a \mu t) \end{aligned}$$

avec

$$\mu = \sqrt{\lambda}$$

et

A, B, C et D sont des constantes arbitraires

alors

$$u(x, t) = (A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)) (C \cos(a \sqrt{\lambda} t) + D \sin(a \sqrt{\lambda} t))$$

Choisissant maintenant les constantes A et B de sorte que soient vérifiées les conditions aux limites. Nous obtenons

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0 \\ X(L) &= B \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \end{aligned}$$

pour $B \neq 0$

$$\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

d'où

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

Nous obtenons ainsi:

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Connaissant $\sqrt{\lambda}$, nous pouvons écrire:

$$T(t) = C \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + D \sin\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Alors

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(C_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + D_n \sin\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \right)$$

avec

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(C_n \cos\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) + D_n \sin\left(a \frac{n\pi}{L} t\right) \right) \end{aligned}$$

Pour $t=0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

et

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$D_n \frac{an\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

finalement

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$