Chapitre 1. Equation aux Dérivées Partielles

1. Définition

Une équation aux dérivées partielles EDP est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (U dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y, \ldots) \in \boldsymbol{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x, y, \ldots, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \ldots) = 0 \qquad (1.1)$$

Exemple :

L'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.2)$$

2. Classification des EDP

Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équations : les équations elliptiques (qui servent typiquement à décrire des phénomènes d'équilibre en physique) pour les problèmes stationnaires, les équations paraboliques (qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion) et les équations hyperboliques (qui permettent de décrire les phénomènes de propagation) pour les problèmes d'évolution.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre est :

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} + E\frac{\partial U}{\partial y} + FU = G(x, y) \qquad (1.3)$$

La classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de :

$$\Delta = B^2 - 4AC \qquad (1.4)$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation est Elliptique

Exemple :

Equation de Poisson ou de Laplace si $f = 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f \tag{1.5}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation est Parabolique

Exemple :

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1.6}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation est Hyperbolique

Exemple :

Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \tag{1.7}$$

Notons que le genre d'une équation peut varier selon les valeurs des variables.

L'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{1.8}$$

est Hyperbolique si $|x| < |y|$, Elliptique si $|x| > |y|$ et Parabolique si $|x| = |y|$.

3. Conditions aux limites

La résolution d'une EDP n'a de sens que si on impose un certain nombre de conditions aux limites que la solution doit respecter. Ces conditions peuvent être des conditions initiales et des conditions aux limites sur une région. Les 3 types sont :

- On impose la valeur de la solution sur la frontière de la région $U = U_0$. On parle alors de conditions de Dirichlet.
- On impose une condition de flux de la solution à la frontière de la région de la forme $\frac{\partial U}{\partial n} = \phi_0$, n étant la normale à la frontière. On parle alors de condition de Neumann.
- Il arrive aussi qu'on impose une condition de la forme $\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha U = \beta$. On parle alors de conditions de Cauchy.