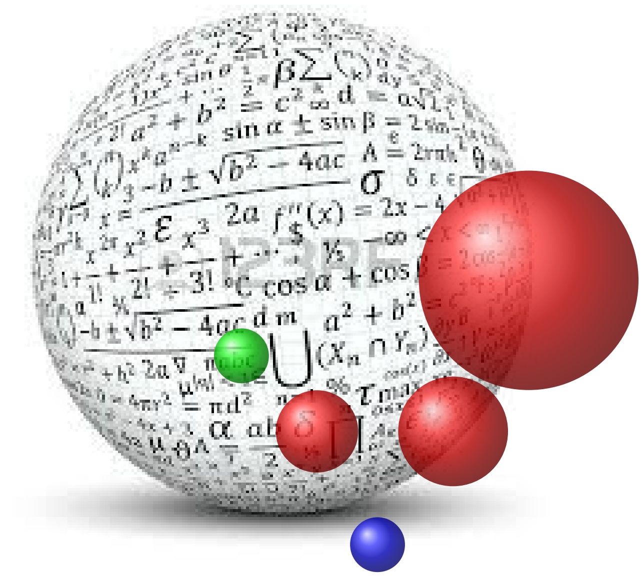
جامعة محمد خيضر بسكرة

قسم الرياضيات



الأستاذة عبدلي جيهان

مقياس الرياضيات التطبيقية

قسم علوم المادة، سنة ثانية كيمياء

السنة الدراسية: 2020/2021

مقدمـــة

هذه الدروس مخصص للطلاب في السنوات الثانية لقسم علوم المادة تخصص كيمياء وفق المنهج المقدم من طرف الوزارة حيث يمكن أن يساعد ايضا طلبة الفيزياء من نفس القسم أو طلبة الرياضيات والباحثين في المجالات التطبيقية الذين يحتاجون إلى فهم المفاهيم الأساسية للدوال المتعددة المتغيرات والتكاملات المتعددة .

يمكن أن تكون بمثابة دروس تأسيسية للسنة الثانية في القسم ، وتكون نقطة البداية لمزيد من التدريب المتقدم في حساب التكاملات. تمت كتابة هذه الدروس بطريقة واضحة وبسيطة لتحفيز الطلاب على تعلم المبادئ والمفاهيم الأساسية للتحليل الرياضي، في محاولة لتبسيط التعاريف والتفسيرات لطرق التفاضل والتكامل الذي يتطلب وصف الظاهرة الفيزيائية أو الكيميائية و معرفة أشياء معينة حول هذه الظواهر، أو الملاحظات ، أو العينات.

في هذه الدروس ، قمنا بدمج أمثلة وتمارين تمت معالجتها جيدا.و ينقسم هذا العمل إلى أربعة فصول ، أولها مخصص للتكاملات البسيطة و المتعددة. يقدم الفصل الثاني التكاملات ، كما نتحدث عن المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والثانية في الفصل الثالث وفي الأخير نتطرق للسلاسل العددية و سلاسل الدوال و سلاسل فورييه.

الفهرس

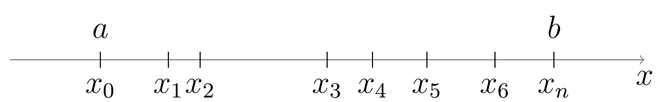
الفصل الأوّل

التكامـــلات البسيطة والمضاعفة

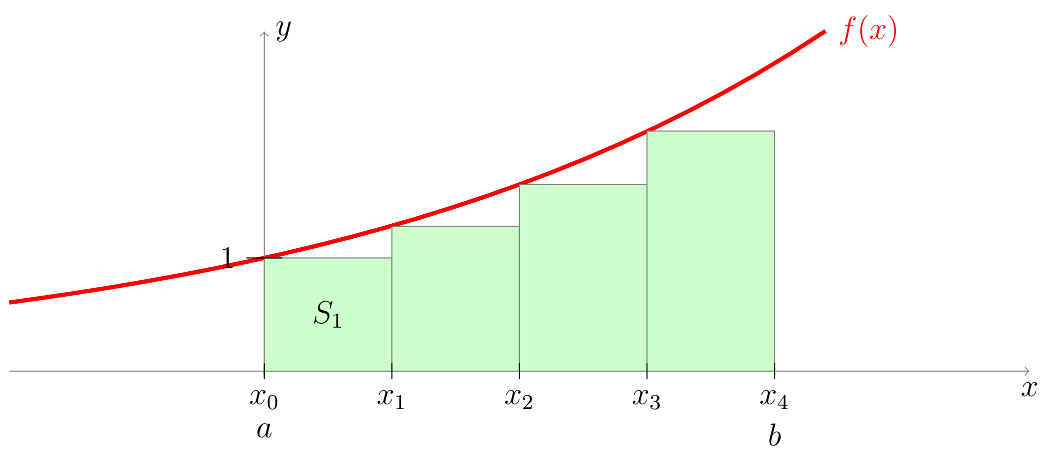
1.1 تكامل ريمان، التكامل المحدود

تعريف 1.1.1 : لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال $[a,b]$. نقسم المجال $[a,b]$ الى n جزء كيفي، ولتكن ξ_k نقطة كيفية حيث

$$\xi_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right], 1 \leq k \leq n.$$



ولتكن S_n مجموع مساحات المستطيلات التي طول كل منها $f\left(\xi_k\right)$ وعرض كل منها $\left(x_k - x_{k-1}\right)$.



$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

إذا كان للمجموع S_n نهاية محدودة لا تتعلق بطريقة تقسيم المجال $[a,b]$ عندما $n \to \infty$، فإننا نرمز لهذه النهاية بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

و نسمي هذه النهاية بتكامل ريمان للدالة f على المجال $[a,b]$. و نقول أن f قابلة للتكامل حسب ريمان على المجال $[a,b]$. ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.1.1. خواص

الخصائص الرئيسية الثلاثة للتكامل هي علاقة شال $Chasles$ ، الإيجابية والخطية.

علاقة شال

اقتراح 1 : **ليكن** $a < c < b$. **إذا كانت f قابلة للتكامل على المجال $[a,c]$ و المجال $[c,b]$ فإن f قابلة للتكامل على المجال $[a,b]$ ونكتب**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

لدينا أيضا

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{ومن أجل} \quad a < b \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

إجابية التكامل

اقتراح 2 : **لتكن** $a \le b$ **عددين حقيقيين و f و g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a,b]$. اذا كانت $f \le g$ فإن**

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

على وجه الخصوص ، تكامل الدالة الموجبة موجب: إذا كان $f \geq 0$ فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

خطية التكامل

اقتراح 3 : لتكن f, g دالتين قابلتين للتكامل على المجال $[a, b]$.

1) $f + g$ دالة قابلة للتكامل و لدينا

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

2) من أجل كل λ ، λf قابلة للتكامل ولدينا

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

ومنه لدينا خطية التكامل أي من أجل كل λ, μ

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

3) $f \times g$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a, b]$

لكن على العموم لدينا

$$\int_a^b (fg)(x)\, dx \neq \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right).$$

4) $|f|$ دالة قابلة للتكامل على المجال $[a, b]$ و لدينا

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx$$

مثال 1 :

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right) dx = 7\int_0^1 x^2\, dx \ - \ \int_0^1 e^x\, dx = 7\frac{1}{3} \ - \ (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

استخدمنا الحسابات التي رأيناها قبلا : $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$ و $\int_0^1 e^x\, dx = e - 1$.

مثال 2 : ليكن $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\, dx$. أثبت أن $I_n \to 0$ عندما $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\, dx\right| \leq \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\, dx \leq \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\, dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^n}\, dx$$

يبقى فقط حساب هذا التكامل الأخير:

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\, dx = \int_1^n x^{-n}\, dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

لأن ($n^{-n+1} \to 0$ و $\frac{1}{-n+1} \to 0$).

ملاحظة 1 : لاحظ أنه بالرغم من أن $f\times g$ قابل للتكامل لدينا بشكل عام

$$\int_a^b (fg)(x)\, dx \neq \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right).$$

على سبيل المثال ، ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ الدالة المحددة بواسطة $f(x) = 1$ إذا كان $x \in [0, \frac{1}{2}[$ و $f(x) = 0$ من أجل $x \notin [0, \frac{1}{2}[$. لتكن $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ والدالة المعرفة بـ $g(x) = 1$ إذا كان $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ و $g(x) = 0$ من أجل $x \notin [\frac{1}{2}, 1[$.

ومنه $f(x)g(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$ و $\int_0^1 f(x)g(x)\, dx = 0$ حيث $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$ و $\int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

2.1 حساب الدوال الأصلية

تعريف 1.2.1 : ليكن $I = [a,b]$ مجال في $\mathbb{R}$ والتكن f دالة حيث

$$f : I \to \mathbb{R}$$

نقول أن F دالة أصلية للدالة f حيث

$$F : I \to \mathbb{R}$$

إذا تحقق ما يلي

1- F قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I.

(-2

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

نظرية 1.2.1 : كل دالة مستمرة $f : I \to \mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية

نظرية 2.2.1 : لتكن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ حيث f تقبل دالة أصلية

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي

$$\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$$

حيث F دالة أصلية خاصة للدالة f.

نرمز بـ $\int f(t)dt$ للدالة الأصلية للدالة f ونكتب:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

1.2.1. التكامل المحدود

لتكن الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ و المستمرة على المجال $[a, b]$ حيث $b \geq a$.

يمكن تعريف التكامل بطريقة أخرى أكثر استعمالا في ايجاد قيم ثابتة للتكاملات من خلال النظرية التالية:

نظرية 3.2.1 : لتكن الدالة $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ المعرفة

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

هي دالة أصلية للدالة f يعني أن الدالة F قابلة للإشتقاق وتحقق :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

تعريف 2.2.1 : نسمي التكامل المحدود للدالة f الذي نرمز له بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f و نكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

مثال 1 : لنحسب التكاملات التالية:

1- **من أجل** $f(x)=e^x$ **لتكن** $F(x)=e^x$ **دالة أصلية لها، ومنه**

$$\int_0^1 e^x\ dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2- **من أجل** $g(x)=x^2$ **لتكن** $G(x)=\frac{x^3}{3}$ **دالة أصلية لها، ومنه**

$$\int_0^1 x^2\ dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

3-

$$\int_a^x \cos t\ dt = \left[\,\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$$

دالة أصلية للدالة $\cos x$.

4- إذا كانت دالة فردية تكون دالتها الأصلية دالة زوجية (نبرهن لاحقا) ونستنتج أن

$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0.$$

2.2.1. طرق التكامل

التكامل بالتجزئة

نظرية 4.2.1 : لتكن u و v دالتين من الفئة C^1 المعرفتين على المجال $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\ dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\ dx$$

صيغة التكامل بالتجزئة للدالة الأصلية هي نفسها ولكن بدون حدود:

$$\int u(x)v'(x)\ dx = [uv] - \int u'(x)v(x)\ dx.$$

مثال 2 : لحساب التكامل

$$\int_0^1 xe^x \, dx$$

نضع $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 1$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة v' و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\
&= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

مثال 3 : لحساب التكامل

$$\int_1^e x \ln x \, dx.$$

نضع هذه المرة $u(x) = \ln x$ و $v'(x) =$.

و منه الدالة $u' = \dfrac{1}{x}$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v = \frac{x^2}{2}$ هي الدالة الأصلية للدالة v' و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x \cdot x \, dx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} \, dx \\
= \left(\ln e \frac{e^2}{2} - \ln 1 \frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

مثال 4 : لحساب التكامل

$$\int \arcsin x \, dx$$

لإيجاد دالة أصلية للدالة $\arcsin(x)$ نجعلها من شكل جداء حيث نضع $u(x) = \arcsin(x)$ و $v'(x) = 1$، حيث لدينا $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ و $v(x) = x$، ثم نطبق صيغة التكامل بالتجزئة فنجد

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \arcsin(x)dx &= [x\arcsin(x)] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= [x\arcsin(x)] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\
&= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

مثال 5 : حساب التكامل

$$\int x^2 e^x dx.$$

نضع $u(x) = x^2$ و $v'(x) = e^x$.

نعلم أن الدالة $u'(x) = 2x$ هي الدالة المشتقة للدالة $u(x)$ و الدالة $v(x) = e^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $v'(x)$ و باستعمال صيغة التكامل بالتجزئة نجد:

$$\int x^2 e^x\, dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x\, dx$$

نعيد التكامل بالتجزئة للمرة الثانية على الجزء الثاني من المساوات السابقة نجد:

$$\int x e^x\, dx = [xe^x] - \int e^x\, dx = (x-1)e^x + c$$

في الأخير نجد

$$\int x^2 e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

التكامل بتغيير المتغير

نظرية 5.2.1 : إذا كانت f دالة معرفة على المجال $I = [a,b]$ و ليكن التقابل $\varphi : J \to I$ من الفئة $\mathcal{C}^1$. من أجل كل $a, b \in J$ لدينا:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن $F \circ \varphi$ هي الدالة الأصلية للدالة $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. بصفة أخرى

$$\left(\int f(x)\, dx\right) \circ \varphi = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

أي أن الدالة الأصلية للدالة $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ تنتج من تركيب كل من الدالة f و φ.

العبارة $\int f(x)\ dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ dt$ تمثل فعلا تغيير للمتغير، أو بصيغة مبسطة نضع $x=\varphi(t)$ ومنه نجد بعدها بالإشتقاق $\dfrac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ أي $dx=\varphi'(t)\ dt$ ما يعطينا :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

مثال 6 : حساب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

بوضع

$$\sin(x)=t \Longrightarrow \sin(x)'=\cos(x)=dt$$

ومنه تتغير حدود التكامل من x الى t كما يلي

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t=\sin(0)=0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{aligned}$$

ومنه نجد

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow \sin(0)=0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx &= \int_0^1 t^2dt \\ &= \left.\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.1 تذكير بالدوال ذات عدة متغيرات

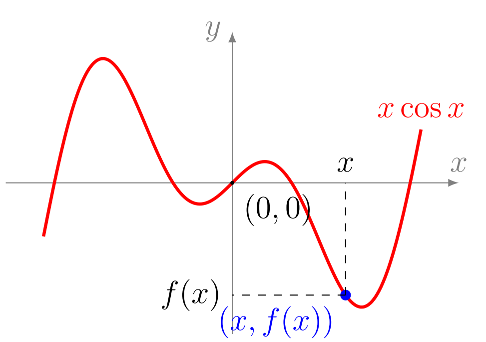
في هذا الجزء سوف ندرس الدوال ذات المتغيرات المتعددة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ ، ويمكن أيضا دراستها في الإطار العام أي على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي ستكون هذه الدوال من النموذج

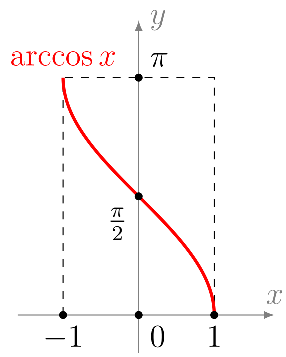
$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

حيث $n \geq 1$ **عدد طبيعي**

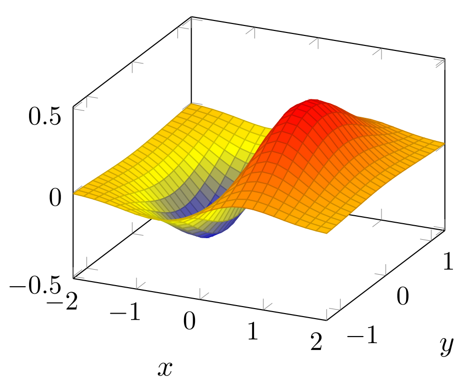
بعبارة أخرى ، ستكون عناصر مجموعة البداية E **أشعة من الشكل** $x = (x_1, \ldots, x_n)$، **وستكون عناصر المجموعة النهائية أعداد حقيقية.**

مثال 1 : 1) $n = 1$، $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: **وهي أبسط حالة،** $x \mapsto f(x)$. **فيما يلي الرسوم البيانية للدوال** $x \mapsto x\cos x$ **و** $x \mapsto \arccos x$:





2) $n = 2$، $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **نرمز إلى المتغيرات بالرمز** (x, y). **الدوال** $(x, y) \mapsto f(x, y)$، **يتم تمثيلها، على سبيل المثال، من خلال الأسطح :**



منحنى يمثل الدالة $(x, y) \mapsto -x \cdot e^{-x^2-y^2}$.

بمجرد أن يكون $n > 2$ ، **من الصعب جدا الحصول على رؤية رسومية للدوال ذات عدة متغيرات.**

1.3.1. النهايات

يمكن تعميم مفهوم النهايات والاستمرار للدوال ذات متغير واحد على الدوال ذات عدة متغيرات دون تعقيد، يكفي استبدال القيمة المطلقة بالمعيار الإقليدي.

لتكن f دالة $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرفة في جوار النقطة $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ماعدى النقطة x_0.

تعريف 1.3.1 : الدالة تقبل كنهاية العدد الحقيقي ℓ عندما x يؤول الى x_0 اذا كان:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in E : \qquad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

ونكتب

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{أو} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

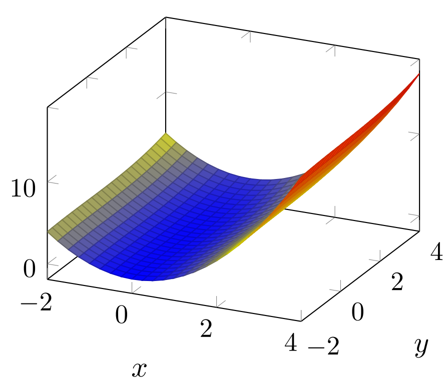
بنفس الطريقة نعرف النهاية في المالانهاية $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ كمايلي :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in E : \qquad 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x)| > A$$

مثال 2 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x, y) = x^2 + y \sin(x + y^2).$$

1) لنثبت أن f تؤول إلى 0 لما $(x, y) \to (0, 0)$.



الدالة $f(x, y)$ محدودة باستعمال $|\sin(t)| \leq 1$: نجد

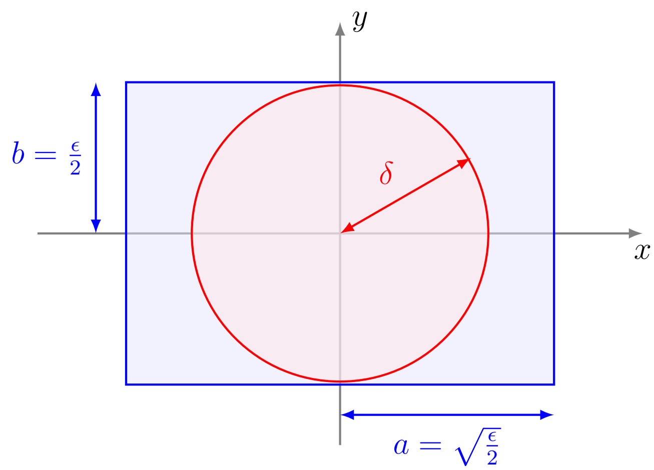
$$\big|f(x, y)\big| = \big|x^2 + y \sin(x + y^2)\big| \leq x^2 + |y|\big|\sin(x + y^2)\big| \leq x^2 + |y|$$

نأخذ $0<\epsilon<1$، $a=\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ و $b=\frac{\epsilon}{2}$، إذاً من أجل $x\in]-a,a[$، لدينا $x^2<\frac{\epsilon}{2}$، من أجل $y\in]-b,b[$ لدينا $|y|<\frac{\epsilon}{2}$.
ومنه من أجل $(x,y)\in]-a,a[\times]-b,b[$ نجد:

$$\left|f(x,y)\right|\leq x^2+|y|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

أحد قيم δ التي تحقق النهاية هي $\delta=\frac{\epsilon}{2}$ حقيقةً، إذا كان $\|(x,y)\|<\delta$ فإن $|x|<\delta=\frac{\epsilon}{2}\leq\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$ و $|y|<\delta=\frac{\epsilon}{2}$ ومنه $|f(x,y)|<\epsilon$. نستنتج : f تقبل نهاية 0، لما (x,y) تؤول إلى $(0,0)$.

2) نبحث عن U مجال مفتوح يحتوي على 0 بحيث من أجل كل $(x,y)\in U$ يكون لدينا $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.
من أجل $\epsilon=\frac{1}{100}$ لدينا $a=\frac{1}{\sqrt{200}}$ و $b=\frac{1}{200}$. من أجل كل (x,y) من المجال $]-a,a[\times]-b,b[$، لدينا $|f(x,y)|<\frac{1}{100}$.



عمليات على النهايات

نادرا ما يستخدم التعريف في حساب النهايات و بدلاً من ذلك ، نستخدم النظريات العامة: من عمليات على النهايات على الدوال ذات عدة متغيرات، فلا توجد أي صعوبة أو حداثة في ذلك.

اقتراح 1 : لتكن $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ معرفتين في جوار $x_0\in\mathbb{R}^n$ حيث f و g تقبل نهاية عند x_0. لدينا

الخواص التالية

$$\lim_{x_0}(f+g)=\lim_{x_0}f+\lim_{x_0}g, \qquad \lim_{x_0}(fg)=\lim_{x_0}f\lim_{x_0}g$$

$$\lim_{x_0}\frac{1}{g}=\frac{1}{\lim_{x_0}g}, \qquad \lim_{x_0}\frac{f}{g}=\frac{\lim_{x_0}f}{\lim_{x_0}g}$$

4.1 التكامل المضاعف

لتكن $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ **دالة معرفة على المجموعة المحدودة** $D\subset\mathbb{R}^2$.

تعريف 1.4.1 : **من أجل كل** $\delta>0$، نسمي **تجزئة للمجموعة** D المجموعة $\mathcal{S}_\delta$ **من المربعات** K_i **من** جنب δ التي تغطي أو تشمل D في أي خطوة سياج δ. نعتبر التجزئتين الجزئيتين:

- $\mathcal{S}_\delta^{ext}$ تعني **تغطية شاملة** (من الخارج)،
- $\mathcal{S}_\delta^{int}$ تعني **غطاء صارم** (من الداخل).

ولأن D محدود ، تحتوي التجزئة الجزئية على عدد محدود من المربعات ، ولدينا $\mathcal{S}_\delta^{int}\subset\mathcal{S}_\delta^{ext}$.
في الواقع ، المربعات الموجودة في المجموعة $\mathcal{S}_\delta^{ext}\setminus\mathcal{S}_\delta^{int}$ تغطي الحافة بالضبط ∂D لـ D.
لأي اختيار من النقاط $(x_i,y_i)\in K_i\cap D$، نسمي **مجموع ريمان** f المرافق للتجزئة الجزئية $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ و في النقاط $\{(x_i,y_i)\}$ المجاميع

$$R_\delta^{ext/int}(f,\{(x_i,y_i)\})=\sum_{K_i\in\mathcal{S}_\delta^{ext/int}}f(x_i,y_i)\ \delta^2,$$

حيث أي حد $f(x_i,y_i)\ \delta^2$ يمثل **الحجم الجبري** من القاعدة المتوازية K_i ذو الارتفاع $f(x_i,y_i)$ مع إشارة $\pm$ التي هي إشارة f عند (x_i,y_i).

تعريف 2.4.1 : إذا كانت النهايات

$$\lim_{\delta\to0}R_\delta^{ext/int}(f;\{(x_i,y_i)\})$$

موجودة ، فهي مستقلة عن اختيار النقاط $(x_i,y_i)\in K_i\cap D$ فهم متطابقين. في هذه الحالة نسمي **التكامل الثنائي لـ** f **على** D هذه النهاية:

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy=\lim_{\delta\to0}R_\delta^{ext/int}(f;\{(x_i,y_i)\}).$$

نقول أنه **تكامل** f **على** D **حسب ريمان إذا كان التكامل** $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ منته (عدد حقيقي وليس $\pm\infty$).
حالة خاصة إذا كانت الدالة f مستمرة فإن D يكون محدود.

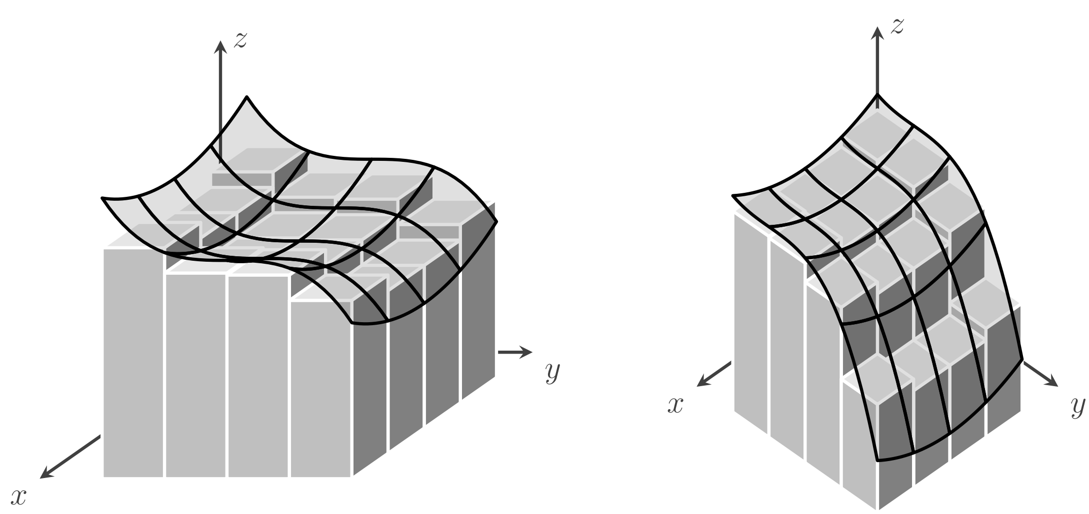
تعريف 3.4.1 : التكامل الثنائي هو أحد أنواع التكامل المحدد الموسع ليشمل الدوال المعرفة ذات متغيرين ، فاذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في $\mathbb{D}$ من المستوي (xOy) فان

$$\iint_{\mathbb{R}} f\left(x,y\right)dxdy$$

يسمى التكامل الثنائي أو التكامل المضاعف للدالة $f(x,y)$ في $\mathbb{D}$.

وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي وفي الكهرومغناطيسية والحرارة والموجات الصوتية والميكانيك ومواضيع اخرى .
ومن اجل حل التكامل الثنائي المبين في الصيغة أعلاه، نبدأ أولا بالتكامل الداخلي والذي تكامله بالنسبة لـ x حيث نعتبر المتغير y ثابتا ثم نجد قيمة التكامل الخارجي والذي تكامله بالنسبة لـ y.

المعنى الهندسي للتكامل الثنائي



نتيجة 1 : 1) القيمة $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ هي الحجم الجبري للجزء المحصور بين الرسم البياني لـ f والمستوى xOy.

2) بينما $\iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy$ هو حجم جزء الحيز الموجود بين الرسم البياني لـ f والمستوى xOy.

مثال 1 : حجم الكرة

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$$

هو ضعف حجم نصف الكرة

$$B^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\},$$

المحصورة بين منحنى الدالة $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ والمحور xOy . لدينا إذا

$$Volume(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad \text{حيث} \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

لحساب التكاملات الثنائية، نستخدم الخصائص التالية وطريقتين محددتين.

حساب التكامل الثنائي نظرية فيبيني

في الحالة الأولى: لتكن $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة و معرفة على المستطيل $D=[a,b]\times[c,d]$.

نظرية 1.4.1 : $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right)\ dy.$

نتيجة 2 :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\,f_2(y)\ dx\ dy = \int_a^b f_1(x)\ dx\ \int_c^d f_2(y)\ dy.$$

ملاحظة 1 : يمكننا أيضا كتابة العبارة:

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\ f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx.$$

مثال 2 : .

1) لنحسب التكامل الثنائي التالي

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\ dx\ dy &= \int_0^1 x\ dx\ \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 [\sin y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2) لنحسب التكامل:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (x^2y-1)\ dy \\ &= \int_{-1}^{1} dx\ \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

الحالة الثانية: لتكن $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة معرفة على المجموعة المحدودة D الكيفية، ومنه:

1) **من أجل كل** $(x,y)\in D$ **توجد القيم** $a,b\in\mathbb{R}$ **حيث** $a\leq x\leq b$

2) **من أجل كل** $x\in[a,b]$ **توجد القيم** $c(x),d(x)\in\mathbb{R}$ **حيث** $c(x)\leq y\leq d(x)$

على النحو الذي يكون فيه

$$D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y\in[c(x),d(x)]\,\right\}.$$

نلاحظ أن المنحنيين

$$\partial D^-=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y=c(x)\,\right\}$$

و

$$\partial D^+=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y=d(x)\,\right\}$$

يشمل كل حافة D. **بالمقابل:**

1) **من أجل كل** $(x,y)\in D$ **توجد القيم** $c,d\in\mathbb{R}$ **حيث** $c\leq y\leq d$

2) **من أجل كل** $y\in[c,d]$، **توجد القيم** $a(y),b(y)\in\mathbb{R}$ **حيث** $a(y)\leq x\leq b(y)$

على النحو الذي يكون فيه

$$D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],\ x\in[a(y),b(y)]\,\right\}.$$

في هذه الحالة ، هذان هما المنحنيان

$$\partial D^- = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x = a(y) \right\}$$

و

$$\partial D^+ = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x = b(y) \right\}$$

اللذان يشملان كل حافة D.

بناءً على الخيار الذي سوف نعتمده لوصف D ، لدينا بعد ذلك النظرية التالية:

نظرية 2.4.1 :

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\ dx \right)\ dy$$

.

مثال 3 : لنفرض أن D هو الجزء من المستوى xOy محددا بقوس القطع المكافئ $y = x^2$ في الأسفل ، والخط $y = 1$ في الأعلى. يمكننا بعد ذلك وصف D على أنه المجموعة

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [x^2,1]\right\}.$$

لذلك لدينا:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2y\ dx\ dy &= \int_{-1}^{1} x^2dx\ \int_{x^2}^{1} y\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

حساب التكامل الثنائي ، تغير المتغير

ليكن التكامل الثنائي

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$$

وتغيير المتغير

$$(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

. من أجل أن نعبر عن التكامل بواسطة الدالة $\tilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ يجب أن نعبر عن D و الجداء $dx\ dy$ بواسطة (u,v): ومنه

1) نحول المنطقة D إلى المنطقة

$$\tilde{D} = h^{-1}(D) = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = h(u,v) \in D\big\}.$$

2) العناصر dx و dy تتحول الى

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}\ du + \frac{\partial x}{\partial v}\ dv \\ \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}\ du + \frac{\partial y}{\partial v}\ dv \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_h(u,v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

هي المصفوفة اليعقوبية لتغيير الإحداثيات.

ويكفي تبني الصيغة التالية ، مع القيمة المطلقة للعامل اليعقوبي:

$$\boxed{dx\ dy = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial y}{\partial u}\right|\ du\ dv = \left|\det J_h(u,v)\right|\ du\ dv.}$$

على وجه الخصوص ، تغيير المتغير في حالة الإحداثيات القطبية لدينا:

$$\boxed{dx\ dy = \rho\ d\rho\ d\varphi}.$$

نصل أخيراً إلى النظرية التالية:

نظرية 3.4.1 :

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{h^{-1}(D)} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\ \left|\det J_h(u,v)\right|\ du\ dv.$$

مثال 4 : من أجل

$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}$$

نحسب

$$Volume(B) = 2\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{حيث} \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

مع تغيير المتغيرات في الإحداثيات القطبية،

$$(x,y)=h(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

لأن $x^2+y^2=\rho^2$ لدينا:

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-\rho^2} \quad \text{و}\\ &h^{-1}(B)=\big\{(\rho,\varphi)\in[0,\infty[\times[0,2\pi[\ \big|\ \rho\le 1\big\}=[0,1]\times[0,2\pi[\end{aligned}$$

ومنه، علما أن $dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$ و نستعمل نظرية فيبيني لفصل المتغيرات، ينتج لدينا:

$$Volume(B)=2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=2\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\ \int_0^{2\pi}d\varphi.$$

التكامل في φ هو بسيط : $\int_0^{2\pi}d\varphi=\big[\varphi\big]_0^{2\pi}=2\pi$. من أجل الجزء الآخر ، إذا وضعنا $t=1-\rho^2$ لدينا

$$\begin{aligned}&\rho=0 \implies t=1 \quad \text{و} \quad \rho=1 \implies t=0,\\ &\sqrt{1-\rho^2}=\sqrt{t}=t^{1/2},\\ &dt=-2\rho\,d\rho \implies \rho\,d\rho=-\frac{1}{2}\,dt,\end{aligned}$$

وأخيراً نحصل على:

$$Volume(B)=-\frac{2}{2}\,2\pi\int_1^0 t^{1/2}\,dt=2\pi\int_0^1 t^{1/2}\,dt=2\pi\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=2\pi\,\frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

مثال 5 : أحسب قيمة التكامل الثنائي

$$\iint_{\mathbb{D}}\left(3y^2-x\right)dxdy$$

إذا علمت أن

$$\mathbb{D}=\{(x,y):0\le x\le 2,1\le y\le 2\}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}}\left(3y^2-x\right)dxdy &= \int_1^2\left(\int_0^2\left(3y^2-x\right)dx\right)dy\\ &= \int_1^2 3xy^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 dy\\ &= \int_1^2\left(6y^2-2\right)dy\\ &= 2y^3-2y\big|_1^2\\ &= 12\end{aligned}$$

مثال 6 : أحسب قيمة التكامل الثنائي

$$\int_1^2\int_y^{y^2} dxdy.$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_y^{y^2} dxdy &= \int_1^2 x\big|_y^{y^2} dy\\ &= \int_1^2\left(y^2-y\right)dy\\ &= \frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\Big|_1^2\\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

مثال 7 : أحسب قيمة التكامل الثنائي

$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y dydx$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y dy dx &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{x} x\sin y dy\right)dx \\
&= \int_0^{\pi} -x\cos y|_0^x \, dx \\
&= \int_0^{\pi} -x\left(\cos x-1\right)dx \\
&= \left.\frac{1}{2}x^2 - x\sin x - \cos x\right|_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{2}+2.
\end{aligned}$$

5.1 التكامل الثلاثي

لتكن $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة ذات ثلاث متغيرات (x,y,z) ولتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ مجموعة محدودة المعرفة عليها الدالة f.

تعريف 1.5.1 : نعرف التكامل الثلاثي للدالة f على Ω نهاية مجموع ريمان المرفق للتجزئة $\mathcal{S}_\delta$ لـ Ω على المكعبات الصغيرة K_i ذات الأبعاد δ^3 حيث δ ينتهي للصفر:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \lim_{\delta\to 0}\sum_{K_i\in\mathcal{S}_\delta} f(x_i,y_i,z_i)\,\delta^3,$$

أيا كان إختيار النقاط $(x_i,y_i,z_i)\in K_i$.

هذا التعريف هو نظير تعريف التكاملات الثنائية في البعد 3. وبالتالي ، فإن التكاملات الثلاثية لها نفس خصائص التكاملات المزدوجة تماماً، ونفس نظريات الوجود (f يستمر على Ω محدود).

لمعنى الهندسي للتكامل الثلاثي أكثر تجريدية: عن طريق القياس ، يصبح الحجم (الجبري) لجزء المسافة بين الرسم البياني لـ f والمستوى xOy الحجم الرباعي (الجبري) لجزء من المسافة الرباعية بين الرسم البياني لـ f والفضاء $Oxyz$.

حساب التكامل الثلاثي نظرية فيبيني

نظرية 1.5.1 : 1) **إذا كان** $\Omega = [a,b][c,d][e,g]$ **متوازي السطوح ، فإن:**

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\, f(x,y,z)$$

بالترتيب الذي نريده .

2) **إذا كان**

$$\Omega = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x \in [a,b],\; y \in [c(x), d(x)],\; z \in [e(x,y), g(x,y)] \Big\}$$

هي أي مجموعة محدودة ، إذن:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\, f(x,y,z)$$

ترتيب قسري .

مثال 1 : 1) **لنحسب التكامل**

$$\begin{aligned}
\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2 - 2yz)\; dx\; dy\; dz &= \int_2^3 dz\; \int_1^2 dy \int_0^1 dx\; (x^2 - 2yz) \\
&= \int_2^3 dz\; \int_1^2 dy\; \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz\; \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz\right) \\
&= \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z\right]_{y=1}^{y=2} dz = \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z\right)\; dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z\right) dz = \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2\right]_2^3 \\
&= \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \\
&= -\frac{43}{6}.
\end{aligned}$$

2) **إذا كان** Ω **هي الاسطوانة الكاملة ، قاعدتها القرص** $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\; z = 0\big\}$ **ذو الإرتفاع** 3 **نستطيع أن نكتب**

$$\begin{aligned}
\Omega &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mid x^2 + y^2 \leq 1,\; 0 \leq z \leq 3\big\} \\
&= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mid x \in [-1,1],\; y \in \Big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\Big],\; z \in [0,3]\Big\}
\end{aligned}$$

ومنه

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}(1-2yz)\;dx\;dy\;dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\;dx\;dy\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1} dx\;\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-2yz)\;dy\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1}\left[y-y^2z\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\;dx\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)z+\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)z\right)dx\\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\;dx\\
&= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\;dt = 3\pi.
\end{aligned}
$$

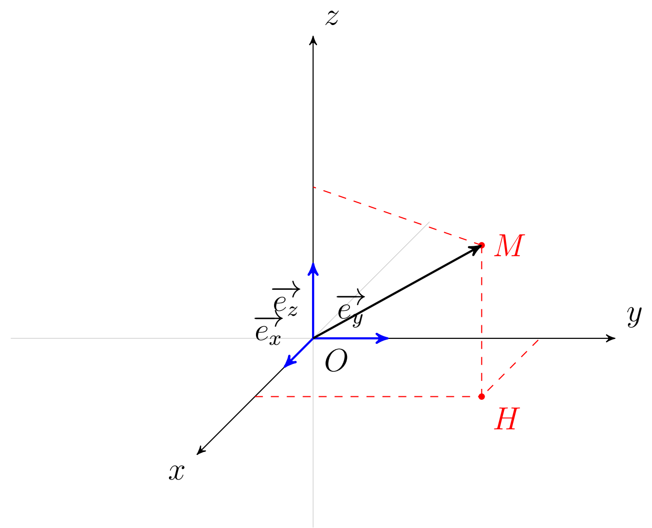
حساب التكامل الثلاثي تغير المتغير

نظرية 2.5.1 : **إذا كان** $(x,y,z)=h(u,v,w)$ **تغيير متغير فإن:**

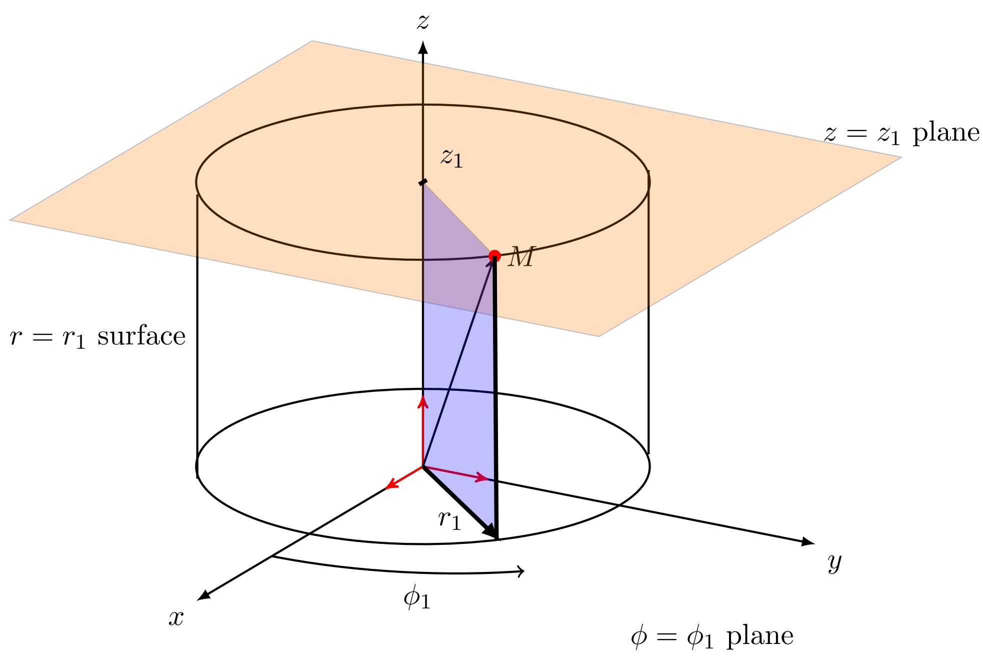
$$
\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\;dx\;dy\;dz\\
=\;&\iiint_{h^{-1}(\Omega)} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\left|\det J_h(u,v,w)\right|\;dudvdw
\end{aligned}
$$

على وجه الخصوص ، من أجل التغييرات للإحداثيات **الأسطوانية** أو **إحداثيات الكروية** لدينا :

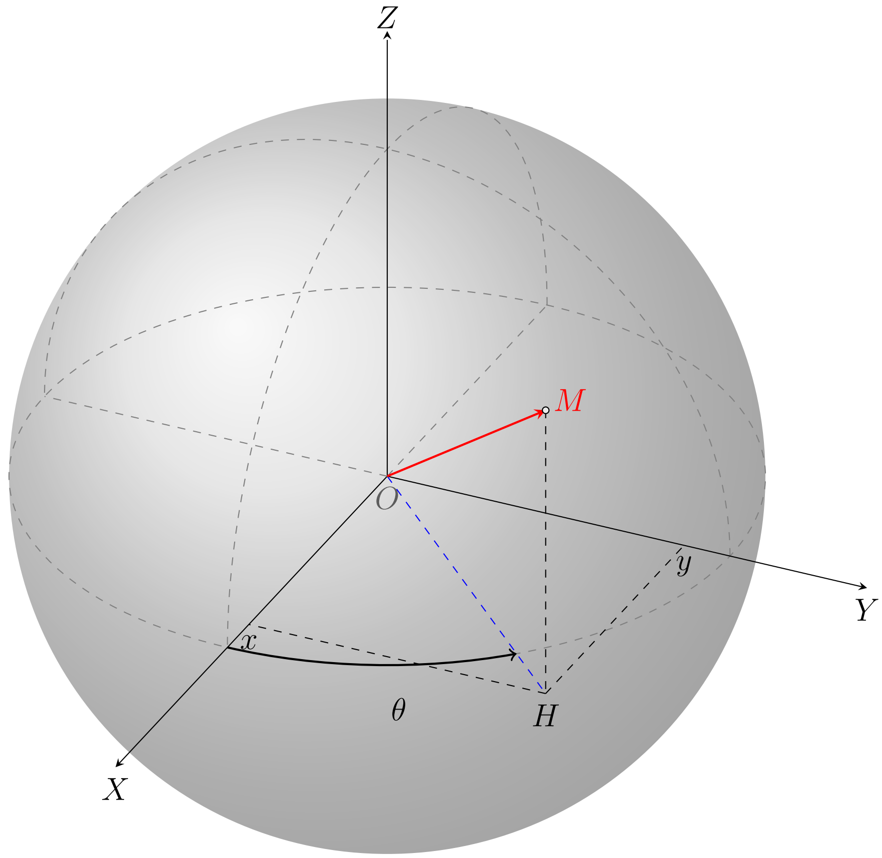
$$\boxed{dx\;dy\;dz=\rho\;d\rho\;d\varphi\;dz\qquad=r^2\sin\theta\;dr\;d\varphi\;d\theta.}$$



z
M
y
$\overrightarrow{e_z}$
$\overrightarrow{e_y}$
$\overrightarrow{e_x}$
O
H
x



z
$z = z_1$ plane
z_1
M
$r = r_1$ surface
r_1
y
ϕ_1
x
$\phi = \phi_1$ plane



مثال 2 : لنتذكر مرة أخرى تكامل الدالة $f(x,y,z)=1-2yz$ على الاسطوانة الكاملة $Omega$ التي قاعدتها القرص $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1,\ z=0\right\}$ ذو الإرتفاع 3. في الإحداثيات الأسطوانية ، لدينا:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 3\right\}\\ &= \left\{\ (\rho,\varphi,z)\mid \rho\in[0,1],\ \varphi\in[0,2\pi[,\ z\in[0,3]\right\}\end{aligned}$$

وبالتالي، لأن

$$dx\ dy\ dz=\rho\, d\rho\ d\varphi\ dz$$

ينتج لدينا:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (1-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\ dx\ dy \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\ \ [\varphi + 2\rho\cos\varphi z]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 (2\pi + 2\rho z - 2\rho z)\ \ \rho\, d\rho \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\, d\rho = 3\ \pi\ \left[\rho^2\right]_0^1 = 3\pi.
\end{aligned}$$

سلسلة التمارين رقم 1

تمرين 1 : أحسب التكاملات التالية

$$1)\int\sqrt{3x}\log x dx \qquad 3)\int x^2e^xdx$$
$$2)\int_0^1\left(7x^2-e^x\right)dx \qquad 4)\int x\sqrt{x^2+1}dx$$

تمرين 2 : أدرس قيم التكامل التالي

$$I_n=\int_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx,$$

من أجل كل $n>0$.

1- أثبت أن $0\leq I_{n+1}\leq I_n$

2- أثبت أن $I_n\leq\ln\frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

3- أحسب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty}nI_n.$$

تمرين 3 : أحسب النهايات التالية

$$1)\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} \qquad 3)\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$
$$2)\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{x^2+y^2} \qquad 4)\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x k\in\mathbb{R}$$

تمرين 4 : أدرس استمرارية الدالة f عند النقطة $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ثم الدالة g عند النقطة $(x_0, y_0) = (0,1)$ $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \neq (0,1) \\ 0, & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

تمرين 5 : أدرس قيم التكامل التالي

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\, dx,$$

من أجل كل $n > 0$.

1- أثبت أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

2- أثبت أن $I_n \leq \ln \frac{n+1}{n}$ ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3- أحسب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

الحـــل

1- إثبات أن $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: من أجل كل $0 \leq x \leq 1$، لدينا $0 < x+n \leq x+n+1$ و $\sin(\pi x) \geq 0$، ومنه ، نجد

$$0 \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$$

بتطبيق خاصية إيجابية التكامل.

2- من خلال $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ لدينا

$$\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$$

نجد

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n}\, dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln \frac{n+1}{n} \to 0.$$

3- حساب قيمة التكامل

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n.$$

لنجري تكامل بالتجزئة، حيث نضع $u(x)=\dfrac{1}{x+n}$ و $v'(x)=\sin(\pi x)$ ومنه $u'(x)=-\dfrac{1}{(x+n)^2}$ و $v(x)=-\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)$ نجد

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

يبقى لنا إيجاد قيمة

$$J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}dx.$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{\pi}J_n\right| \leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx &\leq \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx \\ &= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0. \end{aligned}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}.$$

سلسلة التمارين رقم 2

تمرين 6 : أحسب التكاملات المضاعفة التالية:

$$
\begin{array}{lll}
1) & \iint_D \left(xy+y^2+1\right) dxdy & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 3\} \\
2) & \iint_D \left(xye^{x+y}\right) dxdy & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq a, 1\leq y\leq b\} \\
3) & \iint_D \left(xe^{xy}\right) dxdy & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2, 1\leq y\leq 2\} \\
4) & \iint\limits_{[0,1][0,1]} \dfrac{1}{x+y+1} dxdy &
\end{array}
$$

تمرين 7 : أحسب التكامل الثنائي التالي

$$\iint_D \left(xye^{x+y}\right) dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\right\}$$

تمرين 8 : أحسب مساحة Δ المعرفة كمايلي:

$$\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x}{a^2}+\frac{x}{b^2}\leq 1\right\}, (a,b)\neq(0,0)$$

تمرين 9 : أحسب التكامل الثلاثي التالي:

$$\iiint\limits_D x^a y^b z^c dxdydz, \qquad (a,b,c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$$

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq xy\right\}$$

تمرين 10 : أحسب التكامل الثلاثي التالي:

$$\iiint\limits_V x\ y\ z\ dx\ dy\ dz,$$

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\} (a,b,c)\neq(0,0,0)$$

الفصل الثاني

التكامل الموسع

1.2 التكامل الموسع على $\pm\infty$.

.1.1.2 تعاريف

تعريف 1.1.2 : إذا كان f مستمر أو مستمر في قطع على $[a,+\infty[$ ، نقول ان

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

تكامل موسع على $+\infty$.
يتقارب إذا كان $\int_a^M f(t)\,dt$ يقبل نهاية محدودة عندما $M \to +\infty$ ونكتب عندها

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

(وإلا فإنه يتباعد.) بنفس الطريقة $-\infty$.

مثال 1 : بين أن $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (موسع عند $+\infty$)متقارب ثم أحسب قيمته.

$$\int_0^M e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M = -e^{-M}+1 \to 1$$

ومنه $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ يتقارب وقيمته 1.

تمرين 1 : تكاملات ريمان: بين أنه إذا كان $\alpha > 1$ فإن $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ يتقارب و يتباعد إذا كان $\alpha \leqslant 1$.

خصائص

أبسطها هو العودة إلى التكامل الجزئي الذي لا توجد فيه مشكلة تقارب إذا لم يكن كذلك ، فمن الضروري أولاً إثبات تقارب كل جزء قبل العمل.

اقتراح 1 :

1) علاقة شال: إذا كان $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ متقارب فإن

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt$$

2) الخطية: إذا كان

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{و} \quad \int_a^{+\infty} g(t)\,dt,$$

متقارب فإن:

$$\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

3) الإيجابية: إذا كان

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{و} \quad \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

متقارب حيث:

$$f(t) \leqslant g(t) \quad \text{على} \quad [a, +\infty[$$

فإن:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

4) تكامل دالة محدودة: إذا كان

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$$

متقارب فإن:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

قابلة للإشتقاق أين تكون الدالة f مستمرة و

$$G'(x) = f(x)$$

مثال 2 : ليكن
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t^2}dt.$$
أثبت أن F **قابلة للإشتقاق على** $]-\infty,0[$ **ثم أحسب المشتق الدالة المعرفة كما يلي:**

$$f(t)=\frac{e^t}{t^2}$$

المستمرة على $\mathbb{R}^*$.

من أجل $a<0,$ **التكامل الموسع على** $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{e^t}{t^2}dt$$

متقارب و محدود $\left(\frac{e^t}{t^2}\leq\frac{1}{t^2}\right)$ **للدوال الموجبة. ومنه** F **قابلة للإشتقاق على** $]-\infty,a]$ **و**

$$F'(x)=\frac{e^x}{x^2}.$$

تمرين 2 : نعود إلى التكامل الجزئي. أحسب

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}dt$$

نظرية 1.1.2 : إذا كان f و g موجبة و $g\leqslant f$ على $[a,+\infty[$ **(أو** $f=o(g)$ **) فإنه إذا كان** $\int_a^{+\infty}f$ **متباعد فإن** $\int_a^{+\infty}g$ متباعد ايضا عن طريق الحد السفلي للدالة الموجبة.

إذا كان $\int_a^{+\infty}g$ **متقارب فإن** $\int_a^{+\infty}f$ **متقارب أيضا عن طريق الحد العلوي للدالة الموجبة.**

نظرية 2.1.2 : إذا كان f و g موجبة حيث $f\sim g$ على $+\infty$ فإن

$$\int_a^{+\infty}f \quad \text{و} \quad \int_a^{+\infty}g$$

هم من نفس الطبيعة، بإستعمال تكافؤ الدوال الموجبة.

ملاحظة 1 : تكامل ريمان
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

متقارب إذا كان $\alpha > 1$ ومتباعد إذا كان $\alpha \leqslant 1$.
الدالة الأسية :

$$\int_1^{+\infty} e^{\alpha x} dx$$

متقارب إذا كان $\alpha < 0$ ومتباعد إذا كان $\alpha \geq 0$

مثال 3 : إثبات تقارب

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+e^{-x}}{x^4+x} dx$$

موسع عند $+\infty$.

نبحث عن تكافؤ معروف مثلا:

$$\frac{x^2+e^{-x}}{x^4+x} = \frac{x^2\left(1+e^{-x}/x\right)}{x^4\left(1+1/x^3\right)} \sim \frac{1}{x^2} \geq 0$$

حيث التكامل يتقارب عند $+\infty$. ومنه، بإستعمال تكافؤ الدوال الموجبة

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+e^{-x}}{x^4+x} dx$$

يتقارب.

نظرية 3.1.2 : إذا كان $\int_a^{+\infty} |f|$ متقارب فنقول $\int_a^{+\infty} f$ متقارب مطلقا. فهو إذا متقارب
تتيح هذه النظرية إمكانية تطبيق معايير المقارنة السابقة على الدوال ذات الإشارة المتغيرة.

نتيجة 1 : إذا كانت f دالة موجبة مستمرة أو مستمرة على قطع ومتناقصة، فإن السلسلة: $\sum_{k\geq 0} f(k)$ و التكامل الموسع على $+\infty$: $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ لها نفس الطبيعة.
ميزة دراسة تقارب التكامل بدلاً من تقارب السلسلة يعطينا المزيد من الدوال الأصلية حيث يمكننا القيام بعمليات تكامل جزئية.

2.2 التكامل الموسع على نقطة

تعريف 1.2.2 : لتكن الدالة f مستمرة أو مستمرة على قطع $]a,b]$. نقول أن $\int_a^b f$ تكامل موسع عند a.
إذا كان $\int_x^b f$ يقبل نهاية منتهية لما $x \to a,$ نقول أن $\int_a^b f$ يتقارب و

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a} \int_x^a f.$$

مثال 1 : إثبت التقارب وأحسب $\int_0^1 \ln(t)\, dt$.

من أجل

$$x > 0 : \int_x^1 \ln(t)\, dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 + x\ln(x) - x \to -1,$$

ومنه $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ يتقارب نحو القيمة 1

ملاحظة 1 : تكامل ريمان $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ متقارب إذا كان $\alpha \geq 1$ و يكون متباعد إذا كان $\alpha < 1$. (هو عكس السلوك عند $+\infty$)

نظرية 1.2.2 : نظريات المقارنة والحصر بالقيمة الصغرى والكبرى للدوال الموجبة تبقى محققة أما علاقة شال والخاصية الخطية والإيجابية لاتتحقق إلا بعد التحقق من تقارب كل جزء.

ملاحظة 2 : إذا كان التكامل غير موسع في عدة نقاط، فإننا نعزل كل نقطة من نقاط الشوائب. سوف نتقارب إذا تقاربت عند كل نقطة من نقاط الشوائب ستكون مجموع التكاملات الجزئية الموسعة.

مثال 2 : ليكن $f(x) = \frac{1}{x^2}$ إذا كان

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} & \text{إذا كان} \quad x \in [0,1] \\ f(x) = e^{-x} & \text{إذا كان} \quad x > 0. \end{cases}$$

أحسب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

الدالة f مستمرة على قطع $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$ فإن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ موسع عند $-\infty$, عند 0^- وعند $+\infty$

اقتراح 1 : (1 $\quad$ (a عند : $-\infty$

$$\int_x^{-1} f(t)\, dt = \int_x^{-1} \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{-1} = 1 + \frac{1}{x} \to 1$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt = 1.$$

يمكننا أيضاً رؤية التقارب من قبل ريمان

b) عند : 0^-

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{-t}}dt = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = -2\sqrt{x}+2 \to 2$$

ومنه

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = 2.$$

c) عند : $+\infty$

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_{0}^{x} = -e^{-x}+1 \to 1$$

فإن

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

2) ومنه التكامل : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ يتقارب نحو

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 4$$

سلسلة التمارين رقم 3

تمرين 1 : أدرس طبيعة التكاملات التالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt,\qquad \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}dt,\qquad \int_{0}^{1}\frac{t}{\left(1-t\right)^2}dt,$$
$$\int_{2}^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt,\qquad \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt,\qquad \int_{1}^{+\infty}\frac{e^{\sin(t)}}{t}dt.$$

تمرين 2 : لتكن الدالة F المعرفة كما يلي:

$$F\left(x\right)=\int_{1}^{x}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt.$$

1) أحسب $F\left(x\right)$.

2) إستنتج أن التكامل $F\left(+\infty\right)$ متقارب و أوجد قيمته.

تمرين 3 : أثبت أن التكامل

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin\left(t\right)}{t}dt.$$

متقارب لكن ليس متقارب مطلقا.

تمرين 4 : نضع

$$I_n=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{nt}}{\left(1+e^{t}\right)^{n+1}}dt,\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

1) تحقق من وجود I_n (التكامل متقارب).

2) أوجد علاقة تراجع بين I_n .

3) إستنتج $\lim_{n\to\infty} I_n$.

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية

1.3 أساسيات في المعادلات التفاضلية

يتضمن هذا الفصل مجموعة من التعريفات والمفاهيم في المعادلات التفاضلية ، ومن أهم تلك المفاهيم :

تعريف 1.1.3 : المعادله التفاضلية : هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن $y(x)$ ، مع واحد أوأكثر من المشتقات التفاضلية ...

تعريف 2.1.3 : رتبة المعادلة التفاضلية : هي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة .

تعريف 3.1.3 : درجة المعادلة التفاضلية: هي درجة أو قوة أو أس أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط عدم إحتواء المعادلة على معاملات تحوي قوى كسرية .
أو يقال هي أكبر أس لأعلى رتبة أشتقاق في المعادلة .

1.1.3. حل المعادلات التفاضلية

تعريف 4.1.3 : نسمي الداله $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', . . . , y^n)$ إذا كانت :
1ـ قابلة للأشتقاق n مرة .
2ـ تحقق المعادلة التفاضلية أي :

$$F(x, y(x), y'(x), . . . , y^{(n)}(x)) = 0$$

2.1.3. الحل العام والحل الخاص للمعادلات التفاضلية

تعريف 5.1.3 : الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الأختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

تعريف 6.1.3 : أي معادلة تفاضلية من الرتبة n نجد أن حلها العام يعتمد دائما على n من الثوابت الأختيارية ويكتب على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$$

3.1.3. الشروط الإبتدائية والشروط والحدية

في المسائل المطلوب منك التحقق من حل المعادلة التفاضلية العادية، يمكنك أيضا أيجاد الثوابت الإختيارية الظاهرة في الحل العام للمعادلة، وذلك يتم عن طريق الشروط الإبتدائية التي تعطى في البداية .

وفي حال وجود حل عام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مثلا، تحتوي على ثابتين أختياريين، يلزم لتحديد الثابتين شرطين إضافيين للمعادلة.

إذا أعطيت الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$ ، $y(x_2) = y_2$ كانت الشروط شروطا حدية ، عندها نسمي المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية بمسألة القيمة الحدية.

2.3 تعاريف في المعادلات التفاضلية

تعريف 1.2.3 : المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وهي من الشكل

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E)$$

مثال 1 :

$$\frac{dx}{dy}z + ydx = u$$

وتصنف المعادلة التفاضلية الى :

1- معادلة تفاضلية عادية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات عادية لتابع أو أكثر

مثال 2 :

$$ydx + xdy = e^z$$

2- معادلة تفاضلية جزئية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات جزئية لتابع أو أكثر

مثال 3 :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = zx$$

3- المعادلة التفاضلية العادية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع أو التوابع ومشتقاتها و لا تحوي على جداءات لها .

4- المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة.

ملاحظة 1 : .

1- ان مرتبة المعادلة هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها.

2- ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية من شكل لآخر لتسهيل حلها.

3.3 المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الأولى

تعريف 1.3.3 : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ، هي علاقة بين دالة (تعتبر مجهولة) y وبين مشتقتها الأولى والمتغير x لـ y .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

أو

$$M(x, y)d(x) + N(x, y)d(y)$$

ولحل مثل هذه المعادلات نتبع الطرق التالية :

1.3.3. طريقة فصل المتغيرات

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة في x فقط و $g(y)$ داله في y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

حيث c ثابت اختياري ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي ، نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلا خاصا.

مثال 1 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy^2dx + (1-x^2)dy = 0$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $y^2(1-x^2)$ فنحصل على :

$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كمايلي :
بتكامل الطرفين

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{1-x^2} + \int \frac{dy}{y^2} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) - \frac{1}{y} = c \\
&\Rightarrow \ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{y} = c \\
&\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} - c
\end{aligned}$$

و بالتالي حل المعادلة التفاضلية هو

$$y = \left(\ln\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} - c\right)^{-1}$$

2.3.3. المعادلات التفاضلية التامة

إذاكانت المعادلةالتفاضلية :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

تامة ، فإنة توجد دالة $f(x,y)$ حيث ان :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = df$$

أي أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P\left(x,y\right) \tag{1}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q\left(x,y\right) \tag{2}$$

بمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة لـ y و المعادلة (2) بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

وحتى تكون المعادلة تامة فمن الضروري توفر الشرط التالي :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

و هو محقق لأن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

لحل المعادلة التامة هناك بضع خطوات نتبعها :

- نفترض دالة ما تحقق

$$df\left(x,y\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

فيكون حلها $f(x,y) = c$ حيث أن c ثابت. و تحقق

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

بالتكامل نجد

$$f\left(x,y\right)=\int P\left(x,y\right)dx+\psi\left(y\right) \tag{3}$$

حيث أن $\psi\left(y\right)$ مقدار ثابت بالنسبة إلى x .

ـ نفاضل أطراف (3) جزئيا بالنسبة ل y واستخدام المعادلة $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$ نجد

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P\left(x,y\right)dx+\psi'\left(y\right)=Q\left(x,y\right)$$

أي أن

$$\psi'\left(y\right)=Q\left(x,y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\int P\left(x,y\right)dx$$

نلاحظ ان الطرف الأيمن في المعادلة الأخيرة دائما داله في y فقط . (لماذا)؟

ـ نكامل طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى y ، نستنتج شكل الداله $\psi'\left(y\right)$ حيث :

$$\psi\left(y\right)=\int Q\left(x,y\right)dy-\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P\left(x,y\right)dx\right)dy$$

وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة ، ويكون على الصورة :

$$\int P\left(x,y\right)dx+\int Q\left(x,y\right)dy-\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P\left(x,y\right)dx\right)dy=c$$

مثال 2 : أوجد حل المعادلة :

$$(6x^2+4xy+y^2)dx+(2x^2+2xy-3y^2)dy=0)$$

الحل :

نضع :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{d(6x^2+4xy+y^2)}{dy}=4x+2y\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{d(2x^2+2xy-3y^2)}{dx}=4x+2y\end{aligned}$$

وهذا يعني أن المعادلة تامة . ولحل المعادلة نتبع مايلي : نضع

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 4xy + y^2 \\ Q(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2xy - 3y^2 \end{aligned}$$

بالتكامل نجد :

$$\begin{aligned} \int P(x,y)\,dx &= 2x^3 + 2x^2y + xy^2 \\ \int Q(x,y)\,dy &= 2x^2y + xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

بالتفاضل نجد

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx = 2x^2 + 2xy$$

و بالتكامل نجد

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy = 2x^2y + xy^2$$

نطبق القانون نتحصل على:

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - \left(2x^2y + xy^2\right) = c$$

$$\Leftrightarrow c = f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3.$$

3.3.3. المعادلات التفاضلية المتجانسة

هذا الصنف من المعادلات التفاضلية الغير قابلة لفصل المتغيرات في الأصل تصبح قابلة للفصل بعد تحويل المتغير .

هذه المعادلات يمكن كتابتها على الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

هذا النوع من المعادلات يصبح قابل للفصل وذلك بوضع $v = y/x$ نجد أن :

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + v.$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قابلة لفصل المتغيرات .

مثال 3 : أوجد حل المعادلة التالية :

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

بوضع $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ يمكن كتابة مايلي

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

وبوضع $v = y/x$ نستنتج أن المعادلة التفاضلية متجانسة . وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية نجد ان :

$$dy = \left(\frac{1}{v} + v\right) dx$$

ولكن: $y = xv$

وبتفاضل الطرفين يصبح

$$dy = xdv + vdx$$

وبالتعويض بدلا عن dy نحصل على العلاقة التالية :

$$xdv + vdx = \left(\frac{1}{v} + v\right) dx \Rightarrow xdv = \frac{1}{v} dx \Rightarrow vdv = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نجد

$$\int vdv = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \ln x + c$$

ويمكن كتابة المعادلة بالصورة

$$y^2 = 2x^2 \ln x + 2x^2 c.$$

تعريف 2.3.3 : المعادلات التفاضلية التي تكتب من الشكل :

$$N(x,y) \frac{dy}{dx} = M(x,y)$$

حيث أن N ، M دوال متجانسة من نفس الدرجة، نقول أنها معادلات تفاضلية متجانسة .

ويمكن كتابتها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

وبالتالي بعد تحويل المتغير تصبح قابلة لفصل المتغيرات .

تعريف 3.3.3 : نقول أن الدالة $g(x,y)$ المعرفة من أجل كل قيم (x,y) أنها متجانسة من الدرجة n إذا كان :

$$g(tx,ty)=t^n g(x,y)$$

من أجل كل قيم (x,y).

مثال 4 : بين فيما إذا كانت المعادلة التالية متجانسة ثم أوجد حلها ؟

$$xy'-y=xe^{x/y}$$

الحل: يمكن كتابة

$$xy'-y=xe^{x/y}\Rightarrow xy'=y+xe^{x/y}$$

بوضع

$$N\left(x,y\right)=x \quad \text{و} \quad M\left(x,y\right)=y+xe^{x/y}$$

نجد

$$N\left(tx,ty\right)=tx=tN\left(x,y\right)$$

و

$$M\left(tx,ty\right)=ty+txe^{tx/ty}=t\left(y+xe^{x/y}\right)=tM\left(x,y\right)$$

منه فإن الدوال N ، M دوال متجانسة من الدرجة الأولى يمكن كتابتها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{x}{y}\right)$$

طريقة حلها كمايلي : بقسمة طرفي المعادلة على x تصبح المعادله :

$$y'-\frac{y}{x}=e^{y/x}\Rightarrow y'=\frac{y}{x}+e^{y/x}$$

بوضع $v=y/x$ نجد

$$y=vx\Rightarrow y'=x\frac{dv}{dx}+v$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx}+v=v+e^v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=e^v\Rightarrow \frac{dx}{x}=e^{-v}dv$$

بتكامل الطرفين نحصل على

$$\int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x} + c \Longrightarrow -e^{-v} = \ln x + c$$

بإدخال الـ $\ln$ على الطرفين

$$\ln\left(-e^{-v}\right) = \ln(\ln x + c) \Longrightarrow v = \ln(\ln x + c)$$

بوضع $v = y/x$ تصبح المعادلة

$$\frac{y}{x} = \ln(\ln x + c) \Longrightarrow y = x\ln(\ln x + c)$$

4.3 المعادلة التفاضلية الخطية

تعريف 1.4.3 : تكون المعادله التفاضلية خطية إذا كان المتغيرالتابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الأولى .
فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبةالأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

وتسمى خطية في y.
أما المعادلة الخطية في x فإنها على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} + xa(y) = b(y)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل :

$$y = e^{-I(x)}\left(\int e^{I(t)}Q(t)\,dt + c\right)$$

حيث :

$$I(x) = \int P(x)\,dx$$

و c عدد ثابت .

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(y+y^2)dx-(y^2+2xy+x)dy=0$$

الحل : المعادلة خطية في x ، حيث يمكن وضعها على الشكل التالي :

$$\frac{dx}{dy}+xa\left(y\right)=b\left(y\right)$$

بقسمة طرفي المعادلة على $dy(y+y^2)$ نجد

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

أي أن

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2}{y+y^2}-\frac{2xy+x}{y+y^2}=0\Longrightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}x=\frac{y^2}{y+y^2}$$

بمقارنة المعادلة الناتجة مع المعادلة الأولى نجد

$$b\left(y\right)=\frac{y^2}{y+y^2},\qquad a\left(y\right)=-\frac{2y+1}{y+y^2}$$

ومنه

$$I\left(y\right)=e^{-\int\frac{2y+1}{y+y^2}dy}=e^{\ln\left(\frac{1}{y+y^2}\right)}=e^{-\ln\left(y+y^2\right)}=\frac{1}{y+y^2}$$

و

$$\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy=\int\frac{1}{y+y^2}\frac{y}{y+1}dy=\int\frac{1}{\left(y+1\right)^2}dy=-\frac{1}{y+1}$$

يكون حل المعادلة

$$I\left(y\right)x=\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy+c$$

$$\frac{1}{y+y^2}x=-\frac{1}{y+1}+c$$

أي

$$x=-y+c(y^2+y),c\in\mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

5.3 المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الثانية

ليكن المثال التوضيحي التالي الذي يشرح كيفية إيجاد حلول معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

مثال 1 : المطلوب من إيجاد حلول المعادلة التالية:

$$x^2y'' + xy' + y = 2$$

يمكنك حل هذه المعادلة بعدة طرق منها الطريقة التي ذكرناها سابقا، ولكن هذه المعادلة تختلف عن المعادلة

$$y'' + ay' + by = 0$$

في أن معاملات هذه دالة في x.

اما النوع الآخر وهو المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة :

$$y'' + ay' + by = Q(x) \qquad (II)$$

والحل العام لها هو :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \text{حل خاص}$$

يعنى نحل كما لو كانت معادلة تفاضلية متجانسة ومن ثم ايجاد التكامل الجزئى الذى يعبر عن الدالة التى في الطرف الأيمن .

نبدأ أولاً بحل معادلة تفاضلية متجانسة، ولتكن :

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

في هذه الحالة: نفرض أن

$$y = Ce^{rx}$$

حيث r عدد حقيقى ما (ثابت) سوف نشرح لاحقا كيف نحصل عليه. الآن نوجد المشتقة الأولى والثانية في المعادلة التفاضلية اعلاه

$$y' = re^{rx} \quad \text{و} \quad y'' = r^2e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$r^2e^{rx} + 3re^{rx} - 4e^{rx} = 0$$

بأخذ e^{rx} عامل مشترك نجد

$$e^{rx}[r^2 + 3r - 4] = 0$$

ومنها اما $e^{rx} = 0$ وهذا مستحيل، اذاً نأخذ الحل الثاني :

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Longrightarrow (r+4)(r-1) = 0.$$

نجد $r = 1$ أو $r = -4$.
وبناء عليه تكون جميع الحلول الممكنة للمعادلة السابقة هي :

$$y_1 = C_1e^x \quad \text{أو} \quad y_2 = C_2e^{-4x}$$

حيث أن C_1 و C_2 ثوابت .
يمكن اثبات ان كلا المزج الخطي للحلين يشكلان حلا للمعادلة أيضاً. ومنه يكون الحل العام للمعادلة من الشكل :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

وبصفة عامة الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ على الشكل :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

بحيث r_1 و r_2 هما جذوراً للدالة المميزة

$$r^2 + ar + b = 0$$

الآن نأتي الى المعادلات غير المتجانسة أي التي على الشكل التالي :

$$y'' + ay' + by = Q(x) \qquad (II)$$

والحل العام لها هو :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \text{حل خاص}$$

لتكن الآن المعادلة غير المتجانسة

$$y'' + 3y' - 4y = x^2$$

نلاحظ هي نفسها الدالة السابقة مع وضع x^2 بدلاً من الصفر . هذا النوع من المعادلات نحل كما لو كانت: $y'' + 3y' - 4y = 0$ متجانسة.
وحلها العام كما اسلفنا القول :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

هذا الحل هو حل جزئى لهذه المعادلة التفاضلية، لآن نبحث عن الحل الذى يؤكد لنا صحة أن :

$$y'' + 3y' - 4y = x^2$$

الآن نلاحظ ان الطرف الأيمن عبارة عن دالة كثير حدود من الدرجة الثانية لذلك نفرض أن الحا الخاص لها هو دالة من الدرجة الثانية والصورة العامة له هي من الشكل :

$$y = ax^2 + bx + c$$

ومنه $y' = 2ax + b$ و $y'' = 2a$ بالتعويض في المعادلة نجد

$$y'' + 3y' - 4y = x^2 \Longrightarrow 2a + 3(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = x^2$$

نرتب هذه المعادلة من الأس الأكبر الى الأس الأصغر مع إعتبار أن a, b, c ثوابت .

$$2a + 6ax + 3b - 4a^2 - 4bx - 4c - x^2 = 0$$

$$(-4a - 1)x^2 + (6a - 4b)x + (2a + 3b - 4c) = 0$$

لكي تكون هذه المعادلة صحيحة نشترط أن يكون كل عامل من هؤلاء يساوي صفر أي:

$$4a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1/4$$

$$6a - 4b = 0 \Longrightarrow b = -3/8$$

وأخيراً $2a + 3b - 4c = 0$ يعطينا $c = -13/32$. ومنه يكون الحل العام لهذه المعادلة غير المتجانسة هو :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - (1/4)x^2 - (3/8)x - (13/32)$$

ماذ نفعل لو كانت الدالة هي $Q(x) = A\sin(x)$ مثلاً وليست x^2 ؟ حيث A عدد ثابت :

هنا نفرض أن الحل الخاص هو من الشكل التالي:

$$y = C\sin x + D\cos x$$

بحساب المشتق الأول والثاني ونعوض في الدالة الأصلية، ومن ثم نضع شروطاً كما فعلنا لإيجاد كلاً من C و D .

لو كانت الدالة $Q(x) = ax$ فإنا نفرض أن الحل الخاص دالة تآلفية أي من الشكل $y = Cx + D$.

لو كانت الدالة في الطرف الأيمن هي $Q(x) = e^{Ax}$ فإننا نفرض أن: $y = Ce^{Ax}$.

بإختصار الفرضية تكون من نفس فصيلة الدالة التي في الطرف الأيمن .

بإسلوب مشابه ننتقل الى الحالة التي فيها العوامل دالة أخرى في x.

$$P(x)y'' + q(x)y' + R(x)y = Q(x) \qquad (III)$$

نواصل حل المثال المطروح كي نفهم معا طريقة حل المعادلات التفاضلية من هذا النوع.

$$x^2y'' + xy' + y = 2$$

نلاحظ ان الطرف الأيمن دالة في x أو اعتبرها دالة ثابتة في x (وانتهت المشكلة) أي نتعامل معادلة تفاضلية غير متجانسة من الدرجة الثانية .

طريقة أويلر ـ كوشي تتلخص في فكرة واحدة وهي :

يمكنك تحويل المعادل السابقة الى معادلة أخرى على الشكل :

$$y'' + ay' + by = 2$$

بحيث a ، b ثوابت، ولكن لكي تتم هذه الطريقة بنجاح ننقل الدالة من المتغير x الى متغير آخر t (وهي طريقة مشابهة جزئياً لتحويل لا بلاس)

نلاحظ في المعادلة السابقة عند كتابة y' المقصود منها هو $\dfrac{dy}{dx}$ وعندما نكتب y'' نقصد منها $\dfrac{d^2y}{d^2x}$ أي المشتق الثاني بالنسبة لـ x .
الآن نضع تحويلا يحول $\dfrac{dy}{dx}$ الى $\dfrac{dy}{dt}$.

نفرض أن : $x = e^t$ نشتق الطرفين بالنسبة لـ t

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

نعلم ان $x = e^t$ والمشتقة الأولى ايضاً بـ x لكننا نريد $\frac{dy}{dt}$ بإستعمال القاعدة التالية :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} . \frac{dy}{dx}$$

ولكن لدينا $x = \frac{dx}{dt}$ اذاً

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة للمتغير t نجد

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

يمكنك تبسيط الحل بالشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right).\frac{dx}{dt}$$

أي:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x}\right)\frac{dx}{dt}$$

علمان أن $x = \frac{dy}{dt}$ بالتعويض

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x}\right)x$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

الفى نظرة على أول المسألة نجد أن :

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

ومنه :

$$x^2\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية $x^2y'' + xy' + y = 2$ نجد

$$\frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 2$$

أختصر .

$$\frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$$

تحولت الى معادلة تفاضلية غير متجانسة في المتغير t. بحيث يمكنك حلها كما أسلفنا .
حلها يكون من الشكل :

$$y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \text{ حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت . r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة .
أولاً نوجد الحل الجزئى للمعادلة أعلاه بوضع :

$$\frac{d^2y}{d^2x} + y = 0$$

المعادلة المميزة هي :$r^2 + 1 = 0$ و منه $r_1 = i$ و $r_2 = -i$ حيث i وحدة تخيلية . ومنه يكون الحل على الشكل

$$y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} + \text{ حل خاص}$$

وهنا نريد تبسيط هذا المقدار (وضعه في صورة أخرى وهي صيغة أويلر).

$$C_1e^{it} = C_1\cos(t) + iC_1\sin(t)$$

و

$$C_2e^{-it} = C_2\cos(t) - iC_2\sin(t)$$

بجمع المعادلتين معاً (مع مراعاة الحدود المشابهة) نجد:

$$y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} = (C_1 + C_2)\cos(t) + i(C_1 - C_2)\sin(t)$$

و بالتعويض في المعادلة $\frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$ أي أن الحل الخاص مساوي لـ 2 لتصبح المعادلة هي :

$$y = A\cos(t) + B\sin(t) + 2$$

بالرجوع لـ :$x = e^t$ بأخذ $\ln$ للطرفين ينتج : $t = \ln(x)$ وفي الأخير يصبح شكل المعادلة (في x) هو :

$$y = A\cos(\ln(x)) + B\sin(\ln(x)) + 2$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة .

نظرية 1.5.3 : لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' + ay' + by = Q(x) \qquad (I)$$

وليكن Δ مميز المعادلة المميزة لها

$$r^2 + ar + b = 0$$

1- إذا كان $\Delta > 0$ و كانت r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

2- إذا كان $\Delta = 0$ و كان r جذراً مضاعفا للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$y = e^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right) + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

3- إذا كان $\Delta < 0$ و كان $r = \alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

سلسلة التمارين رقم 4

تمرين 1 : أوجد في المجال I من $\mathbb{R}$ حلول المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{array}{lll} 1) & x\ln x y' + y = x, & I =]1, +\infty[\\ 2) & x(xy' + y - x) = 1, & I =]-\infty, 0[\\ 3) & 2xy' + y = x^4, & I =]-\infty, 0[\end{array}$$

الحـــل

المعادلات التفاضلية المطلوب حلها في هذا التمرين كلها خطية من الدرجة الأولى. نشير إلى أن المعادلة التفاضلية المقترحة (E) و المعادلة المتجانسة المصاحبة لها هي (E_H) .

1- الدالتان $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ و $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ مستمرة في I

ونعلم أن حلول (E) على I من الشكل $y_0 + \lambda y_1$ حيث y_0 هو حل المتجانس لـ (E_H) و y_1 هو حل خاص غير معدوم لـ (E).

لتكن y دالة قابلة للإشتقاق على I نقول أنها حل للمعادلة (E) على I.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ x\ln x y'(x) + y(x) = x \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ \ln x y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (\ln x . y)'(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x} \end{aligned}$$

2- الدوال $x \mapsto \frac{1}{x}$ و $x \mapsto 1+\frac{1}{x^2}$ مستمرة على I

لتكن y دالة قابلة للإشتقاق على I نقول أنها حل للمعادلة (E) على I.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x(xy'(x)+y(x)-x)=1\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xy)'(x)=x+\frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ xy(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(-x)+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x}.
\end{aligned}$$

حلول (E) على I هي دوال من الشكل

$$x \mapsto \frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

3- الدوال $x \mapsto \frac{1}{2x}$ و $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ مستمرة على I

لتكن y دالة قابلة للإشتقاق على I نقول أنها حل للمعادلة (E) على I.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x)+\frac{1}{2x}y(x)=\frac{x^3}{2}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\ln|x|/2}y'(x)+\frac{1}{2x}e^{\ln|x|/2}y(x)=\frac{x^3}{2}e^{\ln|x|/2}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{-x}y)'(x)=-\frac{1}{2}(-x)^{7/2}\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x}y(x)=\frac{1}{9}(-x)^{9/2}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ y(x)=\frac{1}{9}x^4+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}}
\end{aligned}$$

حلول (E) على I هي دوال من الشكل

$$x \mapsto \frac{x^4}{9}+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

تمرين 2 : أوجد في المجموعة $]-\infty,0[$ و المجموعة $]0,+\infty[$ حلول المعادلة التفاضلية

$$|x|y' + (x-1)y = x^3$$

الحـــلإيجاد الحلول المعادلة على المجال $]0,+\infty[$:

لتكن الدالة f القابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ التي تمثل حل للمعادلة، و منه

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]0,+\infty[,\ |x|f'^3\\
&\quad\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ xf'^3\\
&\quad\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) + (1-\frac{1}{x})f(x) = x^2\\
&\quad\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x) + (1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x) = e^{x-\ln x}x^2\\
&\quad\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'^x = ((x-1)e^x)'\\
&\quad\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda) = x^2 - x + \lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

حلول المعادلة على المجال $]0,+\infty[$ هي دوال من الشكل

$$x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

إيجاد الحلول المعادلة على المجال $]-\infty,0[$:

لتكن الدالة f القابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ التي تمثل حل للمعادلة، و منه

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ -x\,(f')^3\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ f'(x) + (-1+\frac{1}{x})f(x) = -x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x) + (-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x) = -e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ \left((-xe^{-x}y)'\right)^3 e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

نبحث عن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto -x^3e^{-x}$ من الشكل $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
&((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2+2bx+c))e^{-x}\\
=\ &(-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + c - d)e^{-x},
\end{aligned}$$

و

$$\left(((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'\right)^3 e^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=-1 \\ 3a-b=0 \\ 2b-c=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=6=d \end{cases}.$$

و منه نجد

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.\end{aligned}$$

حلول المعادلة على المجال $]-\infty,0[$ هي دوال من الشكل

$$x\mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x},\lambda\in\mathbb{R}.$$

الفصل الرابع

السلاســـل العددية

1.4 تعاريف وتقارب السلسلة العددية

تعريف 1.1.4 : لتكن (u_n) سلسلة عددية حقيقية ولنحدد المتتالية (S_n) بواسطة:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1) إذا كانت المتتالية (S_n) تقبل نهاية عندما $n \to +\infty$ حيث

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

ونقول أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة. ونكتب

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\geq 0} u_n = \sum u_n.$$

في هذه الحالة دراسة السلسلة يؤول إلى دراسة المتتالية (S_n) $n \geq 0$.

2) إذا كانت (S_n) لا تقبل نهاية ثابتة أو لها نهاية غير منتهية نقول أن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

3) المتتالية العددية

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

يسمى المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة $\sum u_n$.

4) نسمي u_n بالحد العام للسلسلة $\sum u_n$.

مثال 1 : لتكن

$$U_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

ومنه نبحث عن القيمتين A و B حيث يكون لدينا:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{(2k-1)} + \frac{B}{(2k+1)} \right)$$

نجد $A = \frac{1}{2}$ و $B = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)} \right]. \end{aligned}$$

ومنه فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)} \right) = \frac{1}{2} = S$$

السلسلة U_n متقاربة.

مثال 2 : السلسلة

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

متقاربة نحو 1. في الواقع ، يمكن كتابته كمجموع متداخل ، وبشكل أدق المجموع الجزئي:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \to 1 \qquad \text{لما} \quad n \to +\infty$$

من خلال تغيير الفهرس أو المؤشر ، لدينا أيضا السلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ و $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ متقاربة ولها نفس المجموع 1.

مثال 3 : لكن السلسلة

$$U_n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n$$

لدينا

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

أي:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{1} (-1)^k = 1-1 = 0 \\ S_2 &= \sum_{k=1}^{2} (-1)^k = 1-1+1 = 1 \\ S_3 &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^k = 1-1+1-1 = 0 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} n \text{ زوجي} &\iff S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 \\ n \text{ فردي} &\iff S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 0. \end{aligned}$$

أي أن النهاية غير موجودة ما يعني أن السلسلة متباعدة

1.1.4. السلسلة الهندسية

تعريف 2.1.4 : السلسلة الهندسية هي سلسلة من الشكل $\sum a\cdot q^n$ حيث $a, q \in \mathbb{R}$.

1) مجموع متتالية هندسية

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \begin{cases} a\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right), & \text{إذا كان} \quad q \neq 1, \\ (n+1)\,a & \text{إذا كان} \quad q = 1. \end{cases}$$

2) السلسلة متقاربة إذا وفقط إذا كان $|q| < 1$ ولدينا

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

لما يكون : $|q| \geq 1$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

عندها السلسلة تكون متباعدة

2.1.4. سلسلة ذات الحد الموجب

تعريف 3.1.4 : نقول أن $\sum u_n$ سلسلة ذات حد موجب إذا كان $u_n \geq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

مثال 4 : $\sum \frac{1}{n^2}$ ، $\sum \frac{1}{3^n}$ ، $\sum \left|\sin \frac{1}{n}\right|$

سلسلة ريمان

تعريف 4.1.4 : نقول أن $\sum u_n$ هي سلسلة ريمان إذا كانت من الشكل $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

اقتراح 1 : تكون سلسلة ريمان $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$.

مثال 5 : سلاسل ريمان التالية متقاربة

$$\sum \left(\frac{1}{n}\right)^2, \qquad \sum \frac{1}{n}^3.$$

و السلاسل التالية متباعدة

$$\sum \frac{1}{n}, \qquad \sum n^3, \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

3.1.4. رتابة المجموع الجزئي لسلسلة

لتكن (S_n) ممتالية المجموع الجزئي للسلسلة $\sum u_k$.

إذا كانت السلسلة ذات حدود موجبة أي: $u_n \geqslant 0$ من أجل كل n :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$$

فإن المتتالية (S_n) متزايدة.

اقتراح 2 : إذا كان (S_n) متتالية محدودة، فإن $\sum u_n$ سلسلة متقاربة.

معايير المقارنة

نظرية 1.1.4 : لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين موجبتين، إذا كان لدينا إبتداءا من درجة معينة $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ فإنه:

إذا كانت $\sum v_n$ مقاربة فإن $\sum u_n$ متقاربة أيضا.

إذا كانت $\sum u_n$ متباعدة فإن $\sum v_n$ متباعدة أيضا.

مثال 6 : نقوم بمقارنة السلاسل التالية بسلسلة ريمان لكي نحدد التقارب أو التباعد.

1) السلسلة $\sum \frac{|\cos(n)^n|}{n^2}$ متقاربة لأن:

$$\sum \frac{|\cos(n)^n|}{n^2} \leq \sum \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{6}\pi^2$$

2) السلسلة $\sum \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ متقاربة لأن:

$$\sum \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq \sum \left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi \sum \frac{1}{2^n} = \pi \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 2\pi$$

مثال 7 : لقد رأينا سابقا في المثال 2: أن السلسلة

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad .$$

متقاربة. وسوف نستنتج ذلك

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad .$$

متقاربة، في الواقع لدينا:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}.$$

على وجه الخصوص ، يوجد k_0 حيث من أجل $k \geq k_0$:

$$\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

هذا صحيح من أجل $k \geq 4$ ، لكن لا داعي لحساب قيمة دقيقة لـ k_0. نستنتج أن سلسلة الحد العام $\frac{1}{2k^2}$ تتقارب ، ومنه نجد النتيجة بإستعمال الخطية.

المتتاليات المتكافئة

تعريف 5.1.4 : لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين حيث v_n غير معدومة، فإنه إبتداءا من درجة معينة نقول أن (u_n) و (v_n) أنهما متكافئان إذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1.$$

ومنه نكتب

$$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n\,.$$

نظرية 2.1.4 : إذا كانت (u_n) و (v_n) موجبتين ومتكافئتين فإن السلاسل $\sum u_n$ و $\sum v_n$ من نفس الطبيعة.

مثال 8 : لتكن السلسلتين المتكافئتين

$$\frac{1}{n(n+1)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

. نعلم أن $\sum \frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان وهي سلسلة متقاربة ومنه $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ من نفس الطبيعة.

تمرين 1 : هل السلاسل التالية متقاربة؟

$$\sum \frac{1}{n^2+1},\qquad \sum \frac{n}{\sqrt{n^3+1}},\qquad \sum \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

قاعدة Cauchy

توجد سلسلة $\sum_{k\geq 0} u_k$ **حيث** $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ **لكن** $\sum_{k\geq 0} u_k$ **متباعدة. مثال كلاسيكي على السلسلة المتناسقة** Harmonique **المتباعدة**

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

بتعبير أدق ، لدينا: $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. **ومع ذلك لدينا** $u_k = \frac{1}{k} \to 0$ **(حيث** $k\to+\infty$**).**
لإثبات أن السلسلة متباعدة، يجب إستخدام معيار كوشي.

للتذكير، المتتالية (s_n) من الأعداد الحقيقية (أو المركبة) تتقارب إذا وفقط إذا كانت من سلسلة كوشي ، وهذا يعني:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \qquad |s_n - s_m| < \epsilon$$

بالنسبة للسلاسل ، هذا يعطينا:

نظرية 3.1.4 : السلسلة $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ متقاربة إذا وفقط إذا

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \qquad \left| u_n + \cdots + u_m \right| < \epsilon \, .$$

يمكن صياغته أيضاً على النحو التالي:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \qquad \left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| < \epsilon$$

أو أيضا

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left| u_n + \cdots + u_{n+p} \right| < \epsilon$$

قاعدة Alembert

اقتراح 3 : إذا كان

$$u_n \geqslant 0 \quad \text{و} \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

فإنه توجد ثلاث حالات ممكنة التي هي:

1) إذا كان $l < 1$ ومنه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

2) إذا كان $l > 1$ ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

3) إذا كان $l = 1$ فلا نستطيع اتخاذ أي قرار فيما يخص التقارب أو التباعد.

تمرين 2 : هل السلاسل التالية متقاربة؟

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum \frac{x}{n!} \text{ حيث } x \text{ عدد حقيقي موجب } ,$$

$$\sum \frac{\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n}, \qquad \sum \frac{n^2}{(2n)!}, \qquad \sum \frac{2^n}{n!}.$$

4.1.4. قاعدة السلاسل المتناوبة

تعريف 6.1.4 : نقول أن السلسلة $\sum u_n$ متناوبة إذا كان إبتداءا من درجة معينة u_{n+1} و u_n من إشارتين مختلفتين.

مثال 9 :

$$\begin{array}{ll} 1) & \sum(-1)^n, \\ 2) & \sum(-1)^n \dfrac{n}{1+n}, \\ 3) & \sum(-1)^{n+1}|sin(nx)|, \quad x \in \mathbb{R} \\ 4) & \sum \sin\left(n\pi + x\right), \qquad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

ملاحظة 1 : ليس من الفوري دائما أن نرى أن هناك سلسلة متناوبة مثلا:

$$u_n = \sin\left(\pi \frac{n^2+1}{n}\right).$$

اقتراح 4 : لتكن $\sum u_n$ سلسلة متناوبة. إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ و $(|u_n|)$ متناقصة $\sum u_n$ فإنها متقاربة . و لدينا $|S - S_n| \leq |u_n|$ (ليس لدينا المجموع أو أي تقريب له).

مثال 10 : هل السلاسل $\sum(-1)^n \frac{n^2}{1+n}$ و $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة؟

5.1.4. التقارب المطلق

تعريف 7.1.4 : نقول أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا إذا كانت $\sum |u_n|$ سلسلة متقاربة.

السلسلة $\sum |u_n|$ هي سلسلة ذات حدود موجبة ويمكن تطبيق القواعد السابقة الخاصة بالسلاسل الموجبة عليها.

نظرية 4.1.4 : كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي سلسلة متقاربة.

مثال 11 : .

1) السلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

متقاربة مطلقا فهي متقاربة

2) السلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

ليست متقاربة مطلقا فهي متباعدة.

2.4 سلاســل الدوال

1.2.4. التقارب البسيط و التقارب المنتظم

تعريف 1.2.4 : لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، ولتكن (f_n) سلسلة من الدوال المعرفة من A في $\mathbb{R}$ و $f : A \to \mathbb{R}$. نقول أن (f_n) يتقارب ببساطة إلى f على A إذا كان:

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ حيث } \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

تعريف 2.2.4 : نقول أن (f_n) يتقارب بإنتظام إلى f على A إذا كان:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ حيث } \forall x \in A,\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

ملاحظة 1 : التقارب البسيط $(f_n(x))$ نحو $f(x)$ يعني أنه من أجل كل $x \in A$. و يفرض التقارب المنتظم أيضًا أن يحدث التقارب دائما بنفس السرعة. إذا كانت جميع الدالات f_n و f محدودة ، فإن (f_n) يتقارب بشكل منتظم نحو f على A إذا وفقط إذا كان $(\|f_n - f\|_{A,\infty})$ تنتهي إلى 0 ، حيث

$$\|g\|_{\infty,A} = \sup\{|g(x)|;\ x \in A\}.$$

خصائص

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$، (f_n) متتالية دوال I في $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$.

نظرية 1.2.4 : نفرض أن كل الدوال f_n مستمرة عند $a \in I$ و (f_n) تتقارب نظاميا نحو f على I. فإن f مستمرة عند a.

على وجه الخصوص ، إذا كانت جميع الدوال f_n مستمرة على I فإن f مستمر على I.

اقتراح 1 : نفرض أن جميع الدوال f_n من الفئة $\mathscr{C}^1$ و يوجد $g : I \to \mathbb{R}$ يحقق (f_n) يتقارب ببساطة نحو f على I.
متتالية الدوال (f'_n) تتقارب نظاميا نحو g على جميع القطع المستقيمة من I. فإن الدالة f من الفئة C^1 و $f' = g$.

اقتراح 2 : نفرض أن جميع الدوال f_n من الفئة $\mathscr{C}^1$ وأن يوجد دوال $g_j : I \to \mathbb{R}$ حيث من أجل كل $j = 0, \dots, k-1$ الدالة $(f_n^{(j)})$ تتقارب ببساطة إلى g_j على I و $(f_n^{(k)})$ تتقارب نظاميا نحو g_k على جميع القطع المستقيمة الموجودة في I.فإن g_0 من الفئة C^k على I و من أجل كل $j \leq k$، $g_0^{(j)} = g_j$.

اقتراح 3 : ليكن $I = [a, b]$، نفرض أن كل الدوال f_n مستمرة و أن (f_n) متقاربة نظاميا نحو f على I.
فإن :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

نظرية 2.2.4 : ليكن $I = [a, b[$ نفرض أن الدوال (f_n) متقاربة نظاميا نحو f على I. نفرض كذلك أن كل دالة f_n تقبل نهاية ℓ_n عند b.
فإن المتتالية (ℓ_n) تتقارب نحو النهاية ℓ، f تقبل نهاية عند b و $\lim_{x \to b} f(x) = \ell$.

غالباً ما يتم تطبيق هذه النظرية مع $b = +\infty$.

3.4 سلاسـل فوريبه

تعريف 1.3.4 : سلسلة فوريبه هي سلسلة حدها العام من الشكل:

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

حيث a_n, b_n, ω و t أعداد حقيقية، لذلك فهي عبارة عن سلسلة يمكن كتابتها بالشكل:

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

المعاملات a_n و b_n تسمى معاملات فوريبه.

مثال 1 :

$$3+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos(2\pi nt)+18\sin(2\pi nt)\ ,\ a_0 = 3\ ,\ a_n=(-1)^n\ ,\ b_n=18\ ,\ \omega=2\pi$$
$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)\ ,\ a_0 = \frac{\pi}{2}\ ,\ a_n=0\ ,\ b_n=\frac{(-1)^n}{n}\ ,\ \omega=1$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{(5)^n+3}{n+6}\cos(3nt)\ ,\ a_0 = 0\ ,\ a_n=\frac{(5)^n+3}{n+6}\ ,\ b_n=0\ ,\ \omega=3$$

تعريف 2.3.4 : إذا تقاربت هذه السلسلة لأي t حقيقي ، فإننا نحدد الدالة S بمايلي:

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\omega t)+b\sin(n\omega t)$$

نقول إن سلسلة فورييه تتقارب مع الدالة S.

ملاحظة 1 : تتقارب السلسلة إلى دالة وليست إلى عدد.

1.3.4. تحليل دالة الى سلسلة مثلثية

نظرية 1.3.4 : لنفترض أن f دالة مستمرة على مستويات دورية دورها T.

إذا تمت كتابة f كمجموع لسلسلة فورييه $a_0+\sum_{n\geq 1}a_n\cos(n\omega t)+b\sin(n\omega t)$ **فإن:**

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$
$$a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)dt \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$
$$\forall n>0,\ a_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$
$$\forall n>0,\ b_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\sin(n\omega t)dt \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

تعريف 3.3.4 : نقول أن الدالة الدورية f تفي بشروط *Dirichlet* (نقول أيضا أن f ينتمي إلى C^1 متعدد المستويات ، وهو ما يرمز له بالرمز CM^1) إذا كان:

1) باستثناء عدد محدد من النقاط المعينة خلال دور ما ، f دالة مستمرة ، قابل للإشتقاق ومشتقها f' مستمر.

2) في هذه النقاط المعينة ، يقبل f و f' نهاية محدودة يسارًا و يمينًا.

نظرية 2.3.4 : إذا كانت f دالة دورية تلبي شروط *Dirichlet* ، إذن

1) إذا كان f مستمرًا في t ، فإن سلسلة فوريه المرتبطة بـ f تتقارب نحو $f(t)$

2) إذا لم يكن f مستمرًا في t ، فإن سلسلة فوريه المرتبطة بـ f تتقارب نحو $\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]$

2.3.4. حساب معاملات فوريه

اقتراح 1 : 1) إذا كانت f دالة زوجية

$$\begin{aligned} \forall n \text{ حيث } , b_n &= 0 \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ \text{من أجل } n>0 \text{ حيث } , a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \end{aligned}$$

2) إذا كانت f دالة فردية

$$\begin{aligned} \forall n,\ a_n &= 0 \\ \text{من أجل } n>0 \text{ حيث } , b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \end{aligned}$$

3.3.4. التحليل الطيفي

بالنسبة للدالة f الدورية ذات الدور T للتحقق من شروط Dirichlet ، لدينا بالتالي سلسلة فوريه ، مع النبض $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

الذي يمكن كتابته أيضا:

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} A_n\sin(n\omega t - \varphi_n)$$

مع العوامل $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$.

تعريف 4.3.4 : طيف *Le spectre* الدالة f هو متتالية المعاملات (A_n).

4.3.4. علاقة Parseval

نظرية 3.3.4 : لنفترض أن f دالة دورية مستمرة على مستويات، ومنه لدينا

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

ملاحظة 2 : ليس من الضروري أن يحقق f شروط *Dirichlet*

5.3.4. شكل التخيلي لسلسلة فورييه

خـــواص

1) يمكن كتابة سلسلة فورييه المرتبطة بالدالة f كما يلي:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt$$

2) العلاقات بين المعاملات الحقيقية a_n و b_n والمعاملات المركبة c_n هي:

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

3) تكتب صيغة بارسوفال على الشكل:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

سلسلة التمارين رقم 5

تمرين 1 : حدد سلسلة فوريه (بعبارة $sinus$ و $cosinus$ للدوال التالية:

1) الدالة f الدورية ذات الدور -2π المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x \quad \text{إذا كان} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

2) الدالة : f الدورية ذات الدور 2π ، المعرّفة:

$$f(x) = 1 \quad \text{إذا كان} \quad x \in [0, \pi[\quad \text{و} \quad f(x) = -1 \quad \text{إذا كان} \quad x \in [-\pi, 0[.$$

3) الدالة الدورية ذات الدور$0 < L$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = |x| \quad \text{إذا كان} \quad x \in [-L/2, L/2].$$

تمرين 2 : حدد سلسلة فوريه للدالة الدورية ذات الدور 2π المعرفة

$$f(x) = x^2, \quad \text{من أجل} \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

إستنتج مجموع هذه السلاسل:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$$

.

تمرين 3 : لتكن f الدالة الدورية ذات الدور 2π المعرفة كما يلي:

من أجل كل $[0, 2\pi[\ni x$: $f(x) = x^2$.

1) أوجد سلسلة فوريبه للدالة f.

2) أحسب المجموع $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ ثم $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$.

تمرين 4 : أوجد سلسلة فوريبه للدالة الدورية ذات الدور 2π المعرفة بمايلي:

$$\forall x \in [-\pi, \pi]: \quad f(x) = |x|$$

. إستنتج قيمة المجاميع التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

تمرين 5 : لتكن f الدالة الدورية ذات الدور 2π $f(x) = e^x$ إذا كان $x \in [-\pi, \pi[$.
أوجد سلسلة فوريبه للدالة f. إستنتج قيمة المجاميع التالية:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1} \qquad \text{و} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

المراجع

[1] El Amrani Mohammed, 2011. Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. Ellipses.

[2] Mathieu de Segonzac, Gilbert Monna avec la contribution de Rémi Morvan. 2010. Séries numériques Exercices corrigés avec rappels de cours, Collection Bien débuter en mathématiques.

[3] Florence Monna, Gilbert Monna. 2013. Suites et séries de fonctions Exercices corrigés avec rappels de cours, Collection Bien débuter en mathématiques

[4] J.M. Rakosoton,J.E. Rakosoton, 1999. Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles,Ed. PUF.

[5] S. Nicaise, 2000. Analyse numérique et équations aux dérivées partielles: cours et problèmes résolus, Dunod.