جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير
التاريخ: 2020/10/20

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية LMD-SEGC
السنة الأولى ليسانس. (مؤجلون + B + C)
المدة: ساعة واحدة (12:30 – 13:30)

امتحان الدورة العادية في مقياس الإحصاء 02.

تنبيه هام جدا:

1. على الطالب أن يحل 3 تمارين فقط. أي أن يختار أحد التمرينين الاختياريين الثاني أو الثالث
2. سيُعامل التمرينان الأول وأحد التمرينين الاختياريين (الثاني أو الثالث) كفرضين لجميع الطلبة بلا استثناء.

<u>التمــرين الأول:</u> (6ن) (فرض) (تمرين إجباري)

1. نرمي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة. نفرض X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور الوجه face.
   أ- حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.+
   ب- ما هو احتمال الحصول على face مرة واحدة؟
   ج- ما هو احتمال الحصول على face مرتين؟
2. نفرض أننا رمينا القطعة الآن مرتين متتاليتين، نفرض X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور pile:
   أ- حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.
   ب- ما هو احتمال الحصول على face مرة واحدة؟
   ج- ما هو احتمال الحصول على pile مرتين؟
   د- ما هو احتمال الحصول على pile مرتين أو أقل؟
   ه- أحسب التوقع الرياضي لهذا التوزيع الاحتمالي.

<u>التمــرين الثاني:</u> (6ن) (فرض) (تمرين اختياري)

1. دخل 5 مرضى الى قاعة الانتظار في إحدى العيادات الخاصة، فوجدوا في القاعة 5 كراسٍ في شكل صف.
   المطلوب: بكم طريقة يمكن ان يجلس هؤلاء المرضى في قاعة الانتظار؟
2. ارتأت الممرضة أنه من الأنسب وضع الكراسي في شكل دائرة، بكم طريقة الآن يمكن ان يجلس هؤلاء المرضى في قاعة الانتظار وفقا للديكور الجديد؟
3. لسبب ما قرر الطبيب أنه لن يفحص إلا 3 مرضى ويؤجل الباقي إلى الفترة المسائية، بكم طريقة يمكن أن يدخل الثلاثة على الطبيب إذا كان:
   أ- دخولهم على الطبيب دفعة واحدة. (بافتراض ان هذا ممكن طبعا)
   ب- دخولهم بشكل متتابع، أخذا بعين الاعتبار أدوارهم حسب اسبقية الوصول إلى العيادة.

<u>التمرين الثاني:</u> (6ن) (فرض) (تمرين اختياري)

لتكن دالة التوزيع (تابع التوزيع) المعرفة كما يلي:

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . x_k < 0 \\ Cx^3 \dots\dots\dots\dots .0 < x_k < 3 \\ 1 \dots . \dots\dots\dots\dots\dots\dots x_k \geq 3 \end{cases}$$

حيث C عدد حقيقي ثابت.

1. أوجد(f(x دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X
2. أوجد الثابت C الذي يجعل الدالة (f(x دالةَ كثافةٍ احتمالية للمتغيرِ العشوائي X.
3. أحسب $P(1 \leq X \leq 2)$
4. أحسب التوقع الرياضي (E(X

التمرين الثالث: (8ن) (تمرين إجباري)

لدى تلميذ 29 قلما موزعة على 3 مقلمات: في الأولى أقلام جافة، وفي الثانية أقلام لباد وفي الثالثة ألوان خشبية، وكل هذه الأقلام بلونين: أحمر وأزرق فقط (أنظر الجدول أدناه)

المقلمات / اللون	قلم جاف (الحدث S)	قلم لباد (الحدث F)	ألوان خشبية (الحدث C)	المجموع
اللون الأحمر (الحدث R)	3	8	4	15
اللون الأزرق (الحدث B)	7	5	2	14
المجموع	**10**	**13**	**6**	**29**

المطلوب:

1. سحبنا عشوائيا قلما من الألوان الخشبية، ما هو احتمال أن يكون أزرقا؟
2. الآن سحبنا قلما عشوائيا: ما هو احتمال أن يكون أزرقا؟
3. الآن سحبنا قلما عشوائيا، فكان أزرقا: ما هو احتمال أن يكون هذا القلم الأزرق قلما جافا؟

انتهـــى ...

بالتوفيق للجميع. **أسرة المقياس.**

التصحيح النموذجي لامتحان الدورة العادية في مقياس الإحصاء 02.

خاص بالمجموعتين B و C و المؤجلين.

التمـريـن الأول: (6ن) **(فرض) (تمرين إجباري)**

3. نرمي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة. نفرض X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور الوجه face.

أ- تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X. .... (1ن)

لتحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X لا بد أولا أن نحدد مجموعة الإمكانيات Ω ثم نحدد احتمالاتها.

$$\Omega = \{0 , 1\}$$

X	0	1	**المجموع**
P(X)	1/2	1/2	**1**

الجدول أعلاه يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير X و هو يحقق الشرطين: احتمالاتها موجبة ومجموعها يساوي1.

ب- احتمال الحصول على face مرة واحدة. .... (0.5ن)

$$p(X = 1) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

ج- ما هو احتمال الحصول على face مرتين؟ .... (0.5ن)

$$p(X = 2) = \mathbf{0}$$

4. نفرض أننا رمينا القطعة الآن مرتين متتاليتين، نفرض X متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات ظهور pile:

أ- تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X. .... (1ن)

لتحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X لا بد أولا أن نحدد مجموعة الإمكانيات Ω ثم نحدد احتمالاتها.

$$\Omega = \{0 , 1 , 2\}$$

X	0	1	2	**المجموع**
P(X)	1/4	2/4	1/4	**4/4**

ب- حساب احتمال الحصول على face مرة واحدة. .... (0.5ن)

الحصول على face مرة واحدة معناه الحصول على pile مرة واحدة، أي إحدى الرميتين pile والأخرى face.

$$p(X = 1) = \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

ج- حساب احتمال الحصول على pile مرتين. .... (0.5ن)

$$p(X = 2) = \frac{1}{4}$$

د- ما هو احتمال الحصول على pile مرتين أو أقل؟ .... (1ن)

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{4}{4}} = \mathbf{1}$$

ه- حساب التوقع الرياضي لهذا التوزيع الاحتمالي. .... (1ن)

$$E(X) = \sum x_i p_i = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{2}{4}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \mathbf{\frac{4}{4}} = \mathbf{1}$$

التمــرين الثاني: (6ن) (فرض) **(تمرين اختياري)**

1. دخل 5 مرضى الى قاعة الانتظار في إحدى العيادات الخاصة، فوجدوا في القاعة 5 كراسٍ في شكل صف.
   - ✓ **بكم طريقة يمكن ان يجلس هؤلاء المرضى في قاعة الانتظار؟**

الكل من الكل، ولا عناصر متكررة، وليست دائرية: **تبديلة مستقيمة**.

$P_n^n = n! = P_5^5 = 5! = \mathbf{120}$**..........(1.5)**

2. ارتأت الممرضة أنه من الأنسب وضع الكراسي في شكل دائرة،
   - ✓ **بكم طريقة الآن يمكن ان يجلس هؤلاء المرضى في قاعة الانتظار وفقا للديكور الجديد؟**

الكل من الكل، ولا عناصر متكررة، وهي دائرية: **تبديلة دائرية**.

$P_n^n = (n-1)! = P_5^5 = 4! = \mathbf{24}$**..........(1.5)**

3. لسبب ما قرر الطبيب أنه لن يفحص إلا 3 مرضى ويؤجل الباقي إلى الفترة المسائية، بكم طريقة يمكن أن يدخل الثلاثة على الطبيب إذا كان:

أ- دخولهم على الطبيب دفعة واحدة. (بافتراض ان هذا ممكن طبعا).

الجزء من الكل، والترتيب غير مهم، ولا يسمح بتكرار العناصر، إذن توفيقة بدون تكرار.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{120}{12} = \mathbf{10} \ldots\ldots\ldots..\ (\mathbf{1.5})$$

ب- دخولهم بشكل متتابع، أخذا بعين الاعتبار أدوارهم حسب أسبقية الوصول إلى العيادة.

الجزء من الكل، والترتيب مهم، ولا يسمح بتكرار العناصر، إذن ترتيبة بدون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = \mathbf{60} \ldots\ldots\ldots..\ (\mathbf{1.5})$$

<u>التمرين الثاني:</u> (6ن) (فرض) (تمرين اختياري)

لتكن دالة التوزيع (تابع التوزيع) المعرفة كما يلي:

$$F(x_k)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_k<0\\ Cx^3 \ldots\ldots\ldots\ldots 0<x_k<3\\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_k\geq 3\end{cases}$$

حيث C عدد حقيقي ثابت.

1- إيجاد *f(x)* دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي *X* .

نعلم ان **<u>دالة الكثافة هي مشتقة دالة التوزيع</u>**، وبالتالي يكون لدينا:

$$* X<0 \Longrightarrow F(x)=0 \Longrightarrow f(x)=0$$

$$* 0\leq X<3 \Longrightarrow F(x)=Cx^3 \Longrightarrow f(x)=3Cx^2$$

$$* X\geq 3 \Longrightarrow F(x)=1 \Longrightarrow f(x)=0$$

إذن دالة الكثافة الاحتمالية تكون على النحو التالي:**(1.5)..............**

$$f(x)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X<0\\ 3Cx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 0\leq X<3\\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X\geq 3\end{cases}$$

2- إيجاد الثابت C الذي يجعل الدالة *f(x)* دالةَ كثافةٍ احتمالية للمتغيرِ العشوائي *X*.(1.5)...............

بما أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية فإن:

$$\int_0^3 f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_0^3 3Cx^2\,dx=1 \Leftrightarrow 3C\int_0^3 x^2\,dx=1 \Leftrightarrow 3C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=1 \Rightarrow \boldsymbol{C}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}$$

3- حساب *P (1≤ X≤ 2)* (1.5).......................

$$P(1\leq X\leq 2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 3Cx^2\,dx=F(2)-F(1)=\frac{1}{27}(2)^3-\frac{1}{27}(1)^3=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$$

4- حساب التوقع الرياضي E(X)(1.5).......................

$$E(X)=\int_0^3 x\,f(x)\,dx=\int_0^3 x\,\frac{3}{27}x^2\,dx=\frac{3}{27}\int_0^3 x^3\,dx=\frac{3}{27}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3=\frac{3}{108}3^4=\boxed{\mathbf{2{,}25}}$$

التمرين الثالث: (8ن) (تمرين إجباري)

لدى تلميذ 29 قلما موزعة على 3 مقلمات: في الأولى أقلام جافة، وفي الثانية أقلام لباد وفي الثالثة ألوان خشبية، وكل هذه الأقلام بلونين: أحمر وأزرق فقط (أنظر الجدول أدناه)

المقلمات / اللون	قلم جاف (الحدث S)	قلم لباد (الحدث F)	ألوان خشبية (الحدث C)	المجموع
اللون الأحمر (الحدث R)	3	8	4	15
اللون الأزرق (الحدث B)	7	5	2	14
المجموع	**10**	**13**	**6**	**29**

المطلوب:

1. **سحبنا عشوائيا قلما من الألوان الخشبية، ما هو احتمال أن يكون أزرقا؟**

واضح ان السحب تم من مجموعة الألوان الخشبية فقط، ولهذا فالاحتمال يحسب بالقاعدة البسيطة (عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة).

$$p(B/C) = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots..(\mathbf{2})$$

2. **الآن سحبنا قلما عشوائيا: ما هو احتمال أن يكون أزرقا؟**

نطبق قانون الاحتمال الكلي. .... (1ن)

لأن الأزرق قد يكون من الأقلام الجافة او قد يكون من أقلام اللباد او قد يكون من الألوان الخشبية.

$$p(B) = p(S \cap B) + p(F \cap B) + p(C \cap B)$$

$$= p(S).p(B/S) + p(F).p(B/F) + p(C).p(B/C) \dots\dots\dots\dots(\mathbf{1})$$

$$= \left(\frac{10}{29} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{13}{29} \times \frac{5}{13}\right) + \left(\frac{6}{29} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{7+5+2}{29} = \mathbf{\frac{14}{29}} = \mathbf{0.4827} \dots\dots(\mathbf{1})$$

3. **الآن سحبنا قلما عشوائيا، فكان أزرقا: ما هو احتمال أن يكون هذا القلم الأزرق قلما جافا؟**

نطبق قانون الاحتمال السببي لتوفر شروطه: .... (1ن)

$$p(S/B) = \frac{p(S \cap B)}{p(B)} = \frac{p(S).p(B/S)}{(S).p(B/S) + p(F).p(B/F) + p(C).p(B/C)} \dots\dots\dots..(\mathbf{1})$$

$$= \frac{\left(\frac{10}{29} \times \frac{7}{10}\right)}{\frac{14}{29}} = \frac{\frac{7}{29}}{\frac{14}{29}} = \frac{7}{29} \times \frac{29}{14} = \mathbf{\frac{1}{2}} = \mathbf{0.5} \dots\dots\dots..(\mathbf{1})$$

انتهى...