جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 01 في الإحصـــاء الرياضي

التحليل التوفيقي

التمرين الأول:

يتكون فوج من ستة طلبة تم استدعاؤهم لحضور اجتماع.

المطلوب:

1. بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف به ست مقاعد؟
2. بكم طريقة يمكنهم الجلوس حول طاولة مستديرة؟
3. لنفرض أنه طُلب إليهم تكوين لجنة مشكلة من رئيس، مقرِّر وأمين عام، فبكم طريقة يمكنهم تكوين هذه اللجنة؟

التمرين الثاني:

أراد شخص إنشاء كلمة سر لبريده الإلكتروني، ماهو عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من:

1. ثلاثة أرقام ، مع إمكانية التكرار؟
2. أربعة أرقام ، مع إمكانية التكرار؟
3. خمسة أرقام بدون تكرار؟

التمرين الثالث:

قررت إحدى الشركات بعث 12 شخصا لحضور اجتماع تنسيقي جهوي، فوضعت تحت تصرفهم ثلاث سيارات؛ إحداها بسِتِّ مقاعد، والأخرى بأربع مقاعد، والثالثة بمقعدين.

المطلوب: بكم طريقة يمكن أن يركب هؤلاء بفرض أن:

1. أيَّ شخص منهم يمكنه القيادة (الجميع يحمل رخصة سياقة)؟
2. أربعةَ أشخاص فقط لديهم رخصة سياقة؟

التمرين الرابع:

يُراد تكوين لجنة طلابية ذات 5 طلاب من بين 10 طلبة في مستوى السنة الثالثة، و 15 طالبا في مستوى السنة الثانية.

المطلوب: أحسب عدد الحالات الملائمة لاحتواء اللجنة على طالبين من مستوى السنة الثالثة، وثلاثة طلاب من مستوى السنة الثانية.

أقلب الورقة

التمرين السابع:

أحسب عدد المجموعات المكونة من ثلاثة طلبة، والتي يمكن سحبها – مع الإرجاع – من فوج يحوي ستة طلبة.

التمرين الثامن:

قرر صاحب مصنع ترقية خمسة عمال، فتم ترشيح عشرين عاملا، منهم اثنا عشر رجلا وثمانية نساء، بشرط أن يترق رجلان وامرأتان على الأقل.

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار العمال الخمسة في كل من الحالات الآتية:

1. كل المرشحين يمكن اختيارهم؟
2. استبعاد رجلين تم الطعن في استحقاقهما للترقية؟
3. تم تحويل رجل وامرأة من المرشحين إلى فرع آخر؟

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول:

يتنافس طلبة أحد الأفواج على المراتب الثلاث الأولى في مادة الإحصاء. بفرض أن الفوج مكون من تسعة طلاب وأن معدلاتهم مختلفة، ما هو عدد الحالات الممكنة ليحقق طلبة الفوج ذلك؟

التمرين الثاني:

يتألف المجلس العلمي للكلية من 15 عضوا، ولكي يجتمع هذا المجلس لابد من حضور النصاب القانوني والبالغ 10 أعضاء.

المطلوب:

1. بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني بالضبط؟
2. بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني على الأقل؟

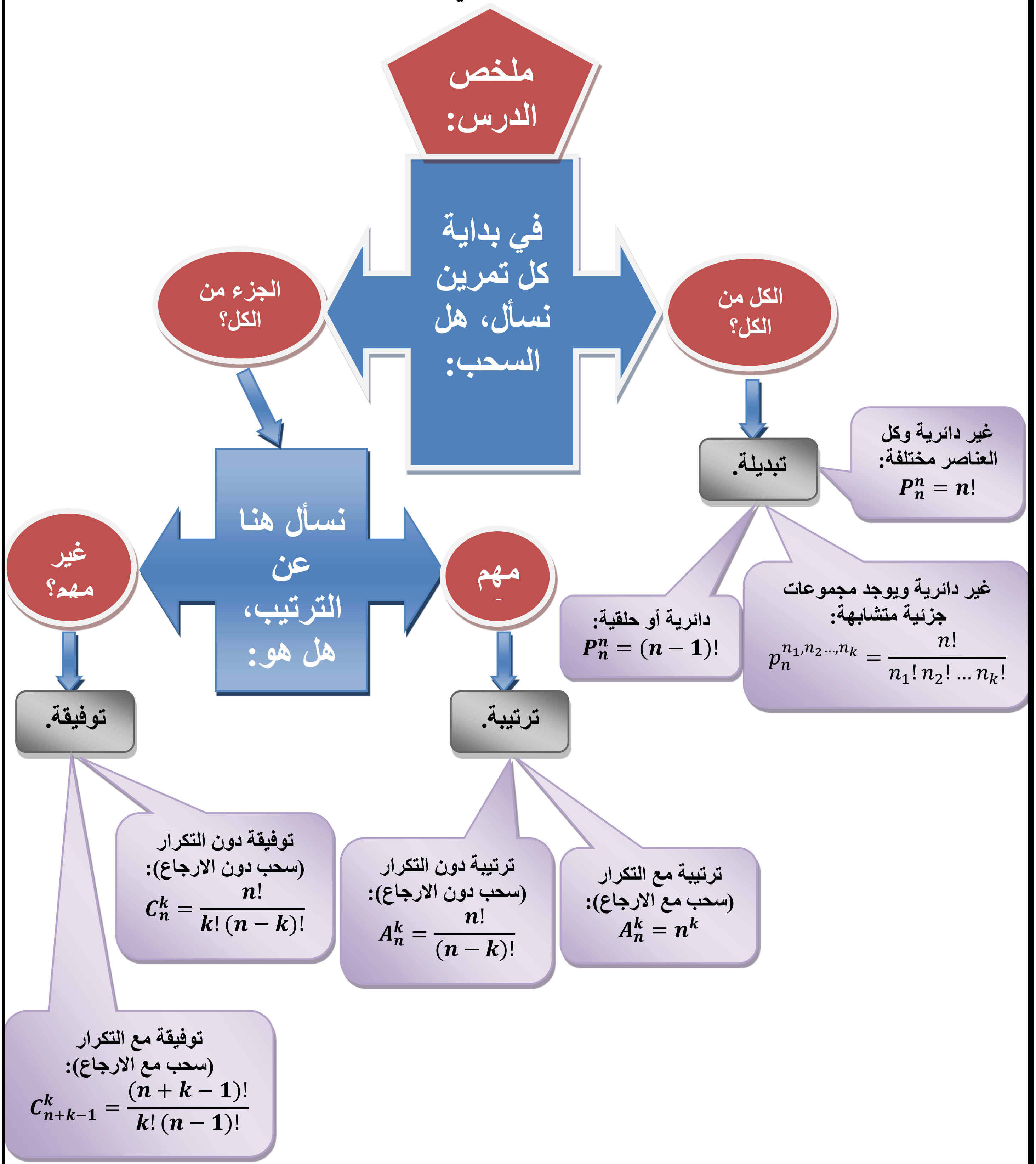
أسرة المقياس

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

حلول سلسلة التمــارين رقم 01 في الإحصـــاء الرياضي.

التحليل التوفيقي.



التمرين الأول:

يتكون فوج من ستة طلبة تم استدعاؤهم لحضور اجتماع.

المطلوب:

1. **بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف به ست مقاعد؟**

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الكل من الكل.
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا عناصر مكررة.
- ✓ لا عناصر مستنسخة أو متشابهة.

إذن نطبق قانون التبديلة غير الدائرية:

$$P_n^n = n! = 6! = \mathbf{720}$$

إذن يمكنهم الجلوس في صف واحد وفق 720 طريقة.

2. **بكم طريقة يمكنهم الجلوس حول طاولة مستديرة؟**

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط السابقة ذاتها باستثناء أن الطاولة مستديرة، إذن نطبق قانون التبديلة الدائرية:

$$P_n^n = (n-1)! = P_6^6 = 5! = \mathbf{120}$$

إذن يمكنهم الجلوس في شكل دائري وفق 120 طريقة.

3. **لنفرض أنه طُلب إليهم تكوين لجنة مشكلة من رئيس، مقرِّر وأمين عام، فبكم طريقة يمكنهم تكوين هذه اللجنة؟**

الجواب : نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل.
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار.

إذن نستخدم الترتيبة بدون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \mathbf{120}$$

التمرين الثاني:

أراد شخص إنشاء كلمة سر لبريده الإلكتروني، ما هو عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من:

1. ثلاثة أرقام، مع إمكانية التكرار؟

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 3 أرقام ، الكل 10 أرقام: 0، 1، 2، ...، 9)
- ✓ الترتيب مهم.

- ✓ يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق بالإرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة مع تكرار.

$$A_n^k = n^k = A_{10}^3 = 10^3 = \mathbf{1000}$$

2. أربعة أرقام، مع إمكانية التكرار؟

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 4 أرقام ، الكل 10 أرقام: 0، 1، 2، ...، 9)
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق بالإرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة مع تكرار.

$$A_n^k = n^k = A_{10}^4 = 10^4 = \mathbf{10000}$$

3. خمسة أرقام بدون تكرار؟

الجواب: نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 5 أرقام ، الكل 10 أرقام: 0، 1، 2، ...، 9)
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق دون إرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة دون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \mathbf{30240}$$

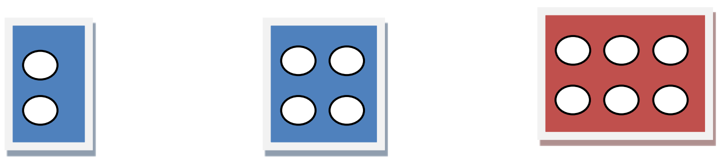
<u>التمرين الثالث:</u>

قررت إحدى الشركات بعث 12 شخصا لحضور اجتماع تنسيقي جهوي، فوضعت تحت تصرفهم ثلاث سيارات؛ إحداها بسِتِّ مقاعد، والأخرى بأربع مقاعد، والثالثة بمقعدين.

المطلوب: بكم طريقة يمكن أن يركب هؤلاء بفرض أن:

1. **أيَّ شخص منهم يمكنه القيادة (الجميع يحمل رخصة سياقة)؟**

الجواب:



في هذه الحالة أول ما نلاحظه هو وجود 12 شخصا و12 مقعدا، وعليه سنستخدم التبديلات، غير أن هؤلاء الأشخاص لن يتوجهوا الى سيارة واحدة بل الى ثلاث سيارات وهنا اذا اختار شخص ما السيارة الأولى مثلا سيجد أمامه 6 مقاعد، يمكنه الجلوس في أي منها (أي حالات متشابهة).

لكنه اذا اختار السيارة الثانية فهذه طريقة جديدة للركوب، وسيكون أمامه 4 مقاعد يمكنه الجلوس في أي منها (أي حالات متشابهة). ونفس الشيء للسيارة الأخيرة أين يمثل مقعداها حالتين متشابهتين.

اذن نحن أمام الشروط الآتية:

- ✓ الكل من الكل. (12 عاملا للجلوس في 12 مقعدا)
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ توجد مجموعات جزئية متشابهة أو عناصر متشابهة. (حالة تغيير المقعد داخل نفس السيارة لا تنتج جديدا).

إذن نطبق قانون التبديلة غير الدائرية مع وجود مجموعات متشابهة. (المجموعات هي 6 و 4 و 2)

$$p_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

تطبيق عددي:

$$p_{12}{}^{6\prime 4\prime 2} = \frac{12!}{6!\,4!\,2!} = \mathbf{13860}\text{طريقة}$$

2. أربعة أشخاص فقط لديهم رخصة سياقة؟

في هذه الحالة علينا أولا البحث على عدد طرق اختيار 3 سائقين (لدينا 3سيارات) من بين الأربعة الذين لديهم رخصة السياقة، اذن هناك سحب واذا غيرنا اماكن السائقين سنحصل على نتائج جديدة (مثلا السائق a مع السيارة1 والسائق b مع السيارة 2 والسائق c مع السيارة 3.. هذه ليست نفس التوليفة اذا اخذ السائق a السيارة 3 والسائق b السيارة 1 والسائق c السيارة 2) ، وعليه الترتيب مهم... كما لا يمكن لسائق واحد قيادة سيارتين في آن واحد أي لا يوجد تكرار.

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 3 عمال ، الكل 4 عمال ممن يحسنون القيادة)
- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق دون إرجاع)

إذن نستخدم الترتيبة دون تكرار لتحديد عدد طرق ركوب السائقين.

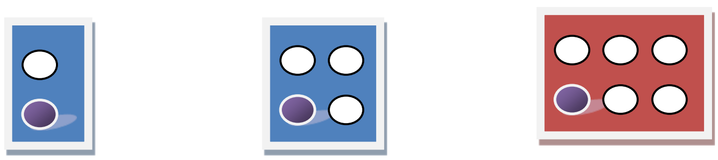
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

تطبيق عددي:

$$A_4{}^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \mathbf{24}\text{طريقة}$$

وعليه لدينا 24 طريقة لتوجيه السائقين.

واذا اخترنا واحدة من هذه الطرق يبقى عندنا 9 ركاب وثلاث سيارات بها 9 مقاعد شاغرة 5 في الاولى و3 في الثانية و1 في الأخيرة (نرجع لتحليل السؤال الأول الشيء الذي يختلف هو نقص مقعد من كل سيارة)



اذا يمكن توجيه بقية الركاب بـ:

$$p_9^{5'3'1} = \frac{9!}{5!\,3!\,1!} = \mathbf{504}\text{طريقة}$$

اذا لدينا 24 طريقة لتوجيه السائقين وكل طريقة تقابلها 504 طريقة لتوجيه بقية الركاب، ومن ثم نرجع الى شجرة الامكانيات فنجد عدد الطرق الاجمالي لتوجيه جميع الركاب بما فيهم السائقين هو:

$$A_4^3 \times p_9^{5'3'1} = 24 \times 504 = \mathbf{12096}\text{طريقة}$$

التمرين الرابع:

يُراد تكوين لجنة طلابية ذات 5 طلاب من بين 10 طلبة في مستوى السنة الثالثة، و 15 طالبا في مستوى السنة الثانية.

المطلوب: أحسب عدد الحالات الملائمة لاحتواء اللجنة على طالبين من مستوى السنة الثالثة، وثلاثة طلاب من مستوى السنة الثانية.

الجواب: حساب عدد الحالات الملائمة لاحتواء اللجنة على طالبين من مستوى السنة الثالثة وثلاث طلبة من مستوى السنة الثانية:

هناك اختيار **عشوائي** (سحب) لـ 2 طلبة من بين 10 طلبة يدرسون سنة ثالثة (اذا اخترنا الطالب a ثم الطالب b أو اذا اخترنا الطالب b أولا ثم الطالب a فإن النتيجة نفسها – المهم أن الاختيار وقع على الطالب a و الطالب b أي هما عضوين في اللجنة ولا يهم من اختير أولا) الترتيب غير مهم، ولا يمكن اختيار طالب واحد أكثر من مرة في نفس اللجنة (لا يوجد تكرار) وعليه نطبق قانون التوفيقة دون تكرار وهو أكثر قوانين التحليل التوفيقي استخداما لأن أغلب التجارب العشوائية يكون فيها سحب عشوائي، ونفس الشيء بالنسبة للاختيار العشوائي لـ 3 طلبة من بين 15 :

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل.
- ✓ الترتيب غير مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار.

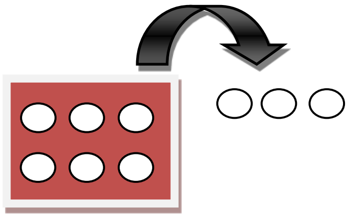
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

تطبيق عددي: $C_{10}{}^2 \times C_{15}{}^3 = \mathbf{20475}$ حالة ملائمة

التمرين الخامس:

أحسب عدد المجموعات المكونة من ثلاثة طلبة، والتي يمكن سحبها – مع الإرجاع – من فوج يحوي ستة طلبة.

الجواب: هناك سحب عشوائي لجزء من الكل "مع امكانية الارجاع" والترتيب غير مهم (3طلبة ولا يهم أي واحد اختير اولا).



اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل.
- ✓ الترتيب غير مهم.
- ✓ يسمح بالتكرار.

اذا نستخدم التوفيقة مع التكرار (وهي حالات نادرة):

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

تطبيق عددي:

$$C_{6+3-1}^{3} = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = 56 \text{مجموعة}$$

التمرين السادس:

قرر صاحب مصنع ترقية خمسة عمال، فتم ترشيح عشرين عاملا، منهم اثنا عشر رجلا وثمانية نساء، بشرط أن يترقى رجلان وامرأتان على الأقل.

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار العمال الخمسة في كل من الحالات الآتية:

1. **كل المرشحين يمكن اختيارهم؟**

لدينا 20 عاملا (12 رجل و8 نساء) استحقوا الترقية، وسنختار (نسحب) هنا خمس عمال بصفة عشوائية بشرط أن يكون هناك رجلان وامرأتان على الأقل في المجموعة المختارة، فلكي نضمن تحقق هذا الشرط هناك حالتان:

الحالة الأولى: نختار 2 رجال عشوائيا من بين 12 رجل **و** 3 نساء عشوائيا من بين 8 نساء ... **أو...** **الحالة الثانية:** نختار عشوائيا 3 رجال من بين 12 رجل **و** 2 نساء عشوائيا من ضمن 8 نساء.

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (3 رجال من 12 و 2 نساء من 8 ... أو ... 2 رجال من 12 و 3 نساء من 8)
- ✓ الترتيب غير مهم. (لأنه لا يهم من أُختير أولا سواء العامل a أو العامل b ففي النهاية سيرقون الى نفس الرتبة).
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (لأنه لا يمكن أن يرقى عامل واحد الى نفس الرتبة مرتين).

اذن نطبق التوفيقة دون تكرار مع اعتبار الحرف(**و**) **عملية ضرب** و الحرف (**أو**) **عملية جمع**.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$${C_{12}}^2 \times {C_8}^3 + C_{12}^3 \times C_8^2 = \mathbf{9856}$$ طريقة

2. **استبعاد رجلين تم الطعن في استحقاقهما للترقية:**

يبقى التحليل السابق نفسه قائما... فقط يصبح لدينا 10 رجال بدلا عن 12 رجل.

فإما أن نختار 2 رجال عشوائيا من بين 10 رجال **و**3 نساء عشوائيا من بين 8 نساء **أو** أن نختار عشوائيا 3 رجال من بين 10 رجال **و** 2 نساء عشوائيا من ضمن 8 نساء.

$$\mathrm{C_{10}}^2 \times \mathrm{C_8}^3 + \mathrm{C_{10}}^3 \times \mathrm{C_8}^2 = \mathbf{5880}$$ طريقة

3. **رجل وامرأة من المترشحين تم تحويلهما الى فرع آخر:**

يبقى التحليل السابق ذاته معمولا به... فقط يصبح لدينا 11 رجال بدلا عن 12 رجل، و7 نساء بدلا عن 8.

فإما أن نختار 2 رجال عشوائيا من بين 11 رجلا **و**3 نساء عشوائيا من بين 7 نساء **أو** نختار عشوائيا 3 رجال من بين 11 رجلا **و** 2 نساء عشوائيا من ضمن 7 نساء.

$${C_{11}}^2 \times {C_7}^3 + {C_{11}}^3 \times {C_7}^2 = \mathbf{5390}$$ طريقة

حلول التمارين المقترحة للحل.

التمرين الأول المقترح:

يتنافس طلبة أحد الأفواج على المراتب الثلاث الأولى في مادة الإحصاء. بفرض أن الفوج مكونٌ من تسعة طلاب وأن معدلاتهم مختلفة، ما هو عدد الحالات الممكنة ليحقق طلبة الفوج ذلك؟

الجواب:

نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (الجزء 3 طلبة ، الكل 9 طلبة)
- ✓ الترتيب مهم. (فالأول قطعا افضل من الثاني)
- ✓ لا يسمح بالتكرار. (كأن السحب من الصندوق دون إرجاع، إذ لا يمكن للطالب أن يشغل مرتبتين).

إذن نستخدم الترتيبة دون تكرار.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

تطبيق عددي:

$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \mathbf{504}$ طريقة.

التمرين الثاني المقترح:

يتألف المجلس العلمي للكلية من 15 عضوا، ولكي يجتمع هذا المجلس لابد من حضور النصاب القانوني والبالغ 10 أعضاء.

المطلوب:

1. **بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني بالضبط؟**

الجواب:

أي بكم طريقة يمكن ان يحضر 10 أعضاء من أصل 15 عضوا؟

اذن نلاحظ أننا أمام الشروط الآتية:

- ✓ الجزء من الكل. (10 من 15)
- ✓ الترتيب غير مهم.
- ✓ لا يسمح بالتكرار.

اذن نطبق قانون التوفيقة دون تكرار.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!\,(15-10)!} = \mathbf{3003} \text{ طريقة}$$

2. بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني على الأقل؟

أي بكم طريقة يمكن ان يحضر 10 أعضاء على الأقل من أصل 15؟

يتم ذلك بحضور 10 أو 11 أو 12 أو 13 أو 14 أو 15 عضوا. أي:

$$C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{15}^{14} + C_{15}^{15} = \mathbf{4944} \text{ طريقة}$$

أسرة المقياس

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 02 في الإحصـــاء الرياضي

مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمال

التمرين الأول:

لنفرض أنه في بلد ما توجد ثلاث جرائد يومية A و B و C . فإذا علمنا أن احتمال قراءة شخص ما الجريدة A هو 0.20 ، و احتمال قراءة شخص ما الجريدة B هو 0.16 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدة C هو 0.14 . واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين A و B معا هو 0.05 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين A وC معا هو 0.04 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين B و C معا هو 0.08. أما احتمال قراءة شخص ما الجرائد الثلاث معا فهو 0.02 . اخترنا شخصا ما من هذا البلد عشوائيا، المطلوب:

ما هو احتمال أن يقرأ هذا الشخص:

1. جريدة واحدة على الاقل؟
2. جريدة واحدة على الأكثر؟
3. جريدتان على الاكثر؟
4. جريدتان على الأقل؟

التمرين الثاني:

نرمي قطعتي نرد على التوالي، نسمي A حدثا يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول، و B حدثا يتحقق إذا كان مجموع نتيجتي النردين يساوي 5 . أما C فيتحقق إذا كان الرقمان المتحصل عليهما من النّردين متساويين.

1. أحسب الاحتمالات التالية: $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$
2. أحسب $(A \cup B \cup C)$ وقارنه مع $(A) + P(B) + P(C)$

التمرين الثالث:

يقوم قنّاصان بالتصويب على هدف واحد، حيث احتمال أن يصيب الرامي الأول الهدف (الحدث E_1) هو 0.6 و احتمال أن يصيب الرامي الثاني الهدف نفسه (الحدث E_2) هو 0.8 . أطلق كلٌّ منهما طلقة واحدة نحو الهدف نفسه، ما هو احتمال أن يصاب الهدف:

1. بطلقة واحدة على الأقل؟
2. بطلقة واحدة فقط؟

التمرين الرابع:

إذا أُختير الطلبة في فصل بطريقة عشوائية وبشكل متتابع واحدا بعد الآخر لإجراء اختبار معين. أوجد احتمال أن يتعاقب الطُّلاب والطالبات إذا كان بالفصل:

1. أربعةُ طُلاب و ثلاثُ طالبات.
2. ثلاثةُ طُلاب وثلاثُ طالبات.

التمرين الخامس:

في نهاية المداولات بكلية الاقتصاد كتب رئيس اللجنة تقريرا جاء فيه: " ... ولقد لاحظنا رسوب 25% من الطلبة في مقياس الإحصاء، ورسوب 15% من الطلبة في مقياس الرياضيات، ورسوب 10% من الطلبة في المقياسين معا...".

سحبنا أحد الطلبة عشوائيا، المطلوب:

1. إذا كان راسبا في الرياضيات، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الإحصاء؟
2. إذا كان راسبا في الإحصاء، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات؟
3. ما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات أو الإحصاء؟

التمرين السادس:

تحوي ثلاثةُ صناديق متماثلة كراتٍ متجانسة: يحوي الأول 5 كرات بيضاء ومثلها سوداء، وفي الثاني 8 كرات بيضاء وكرتان سوداوان، أما الثالث ففيه 4 كريات بيضاء و 6 سوداء. بطريقة عشوائية سحبنا صندوقا ثم سحبنا منه كرة. أحسب احتمال أم تكون هذه الكرة المسحوبة بيضاء.

التمرين السابع:

بالعودة إلى صناديق التمرين الثامن، ولنفرض أن أحدهم سحب عشوائيا كرة من أحد الصناديق فكانت بيضاء، فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة البيضاء من الصندوق الثالث؟

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول:

تقوم شركة بإنتاج الأقمصة، حيث كان احتمال وجود عيب في النسيج المستخدم في الإنتاج هو 8% ، بينما احتمال وجود عيب ناتج عن الخياطة هو 6% . فإذا كانت العمليتان الإنتاجيتان (تهيئة النسيج والخياطة)، مستقلتين عن بعضهما البعض، أوجد احتمال إنتاج قميص معيب.

التمرين الثاني:

فيما يأتي عينة من خريجي أحد المعاهد موزعين حسب التخصص ونوع المهنة:

التخصص / المهنة	قطاع حكومي	قطاع خاص	عمل حر	المجموع
اقتصاد زراعي	15	5	10	**30**
اقتصاد صناعي	8	17	10	**35**
اقتصاد خدمي	12	10	13	**35**
المجموع	**35**	**32**	**33**	**100**

فإذا أُختير أحد الخرجين بطريقة عشوائية، **المطلوب**:

1. ما هو احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الزراعي ويعمل بالقطاع الخاص؟
2. ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون في القطاع الحكومي أو من خرجي الاقتصاد الصناعي؟
3. ما هو احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الصناعي أو من خرجي الاقتصاد الخدمي؟
4. إذا عُلم أنه من خرجي الاقتصاد الصناعي، ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرّا؟

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنـــة الأولـــى

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

سلسلة التمـــارين رقم 02 وحلولها في الإحصــــاء الرياضي.

مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمال.

التمرين الأول:

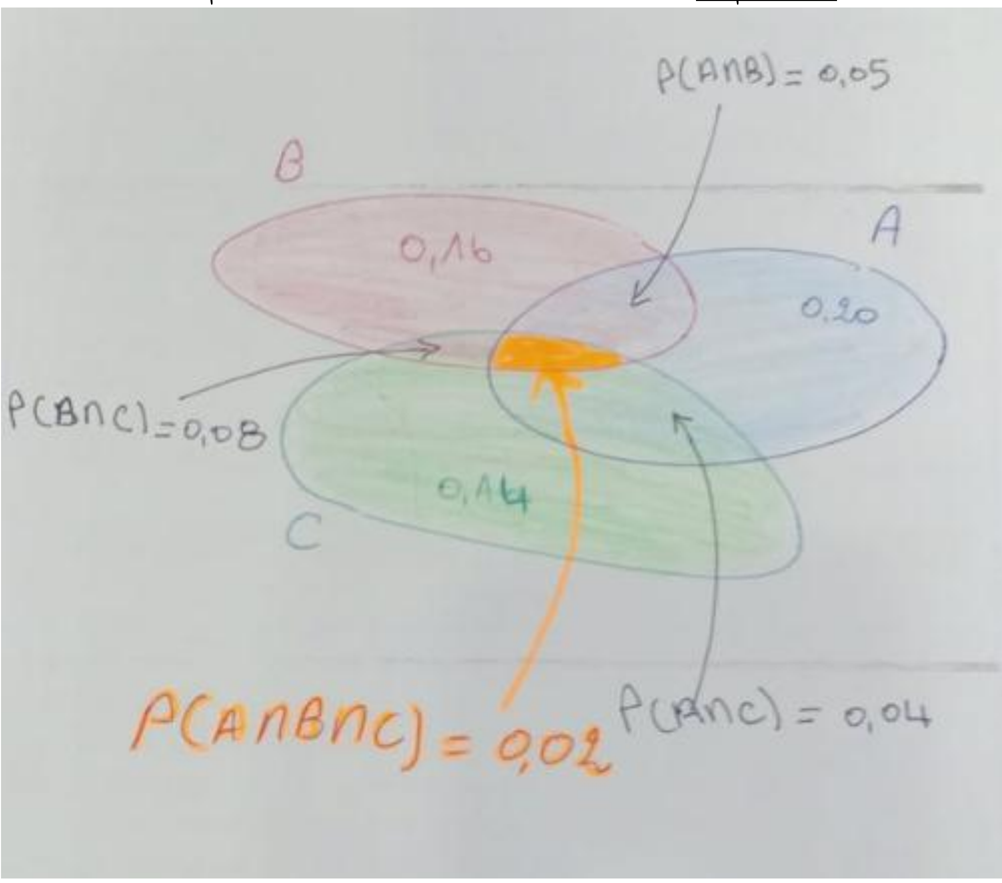
لنفرض أنه في بلد ما توجد ثلاث جرائد يومية A و B و C . فإذا علمنا أن احتمال قراءة شخص ما الجريدة A هو 0.20 ، و احتمال قراءة شخص ما الجريدة B هو 0.16 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدة C هو 0.14 . واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين A و B معا هو 0.05 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين A وC معا هو 0.04 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين B و C معا هو 0.08. أما احتمال قراءة شخص ما الجرائد الثلاث معا فهو 0.02 . اخترنا شخصا ما من هذا البلد عشوائيا، المطلوب:

ما هو احتمال أن يقرأ هذا الشخص:

1. جريدة واحدة على الاقل؟
2. جريدة واحدة على الأكثر؟
3. جريدتان على الاكثر؟
4. جريدتان على الأقل؟

حل التمرين الأول: نلخص أولا المعطيات في الشكل أدناه:

الشكل رقم 01: تلخيص معطيات التمرين الأول من السلسلة رقم 02



المصدر: معطيات التمرين الأول من السلسلة رقم 02.

حساب احتمال أن يقرأ الشخص المختار عشوائيا:

1. جريدة واحدة على الأقل:

أي يقرأ الشخص جريدة **أو** إثنين **أو** ثلاثة، وهذه الجريدة قد تكون A فقط أو B فقط أو C فقط

أو جريدتان: A و B ... A أو C و ... B أو C و، أو الجرائد الثلاث معا.

(أو) تقابل الاتحاد في نظرية المجموعات وتعني الجمع في نظرية الاحتمالات، وبما أنه يمكن لشخص واحد أن يقرأ أكثر من جريدة في آن واحد نطبق قانون **الحوادث المتلائمة** كالتالي:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.20 + 0.16 + 0.14 - 0.05 - 0.04 - 0.08 + 0.02 = \mathbf{0.35}$$

بمعنى هناك 35% من المجتمع المدروس يقرؤون على الأقل جريدة واحدة والبقية (65%) لا يقرؤون أي جريدة.

2-جريدة واحدة على الأكثر:(D)

بمعنى إما يقرأ الشخص جريدة واحدة من الثلاث فقط **أو** لا يقرأ أي جريدة.

وعليه يكون لدينا:

D :حادث قراءة الشخص جريدة واحدة على الأكثر.

H : حادث قراءة الشخص جريدة واحدة فقط.

E : حادث عدم قراءة الشخص أية جريدة.

نترجم الجملة المسطرة الى رموز نجد:

$$P(D) = P(H) + P(E)\{\text{الحادثين متنافيين}\}$$

-لا يمكن لشخص واحد أن يقرأ جريدة واحدة فقط وأن لا يقرأ أي جريدة في نفس الوقت-

أولا – حساب احتمال قراءة الشخص جريدة واحدة فقط:

إما يقرأ الشخص الجريدة A فقط ولا يقرأ B و C أو يقرأ B فقط ولا يقرأ A وC أو يقرأ C فقط ولا يقرأ A و B.

$$P(H) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + 3P(A \cap B \cap C)$$

وقد أضفنا التقاطع الثلاثي ثلاث مرات لأنه يتم حذفه في كل تقاطع ثنائي.

أنظر الشكل التوضيحي أسفله:

$$P(H) = 0.2 - 0.05 - 0.04 + 0.16 - 0.05 - 0.08 + 0.14 - 0.04 - 0.08 + 3 \times 0.02 = \mathbf{0.22}$$

حساب احتمال عدم قراءة الشخص أي جريدة:

حادث عدم قراءة الشخص أي جريدة هو الحادث المتمم لقراءة الشخص جريدة واحدة على الأقل، أي:

$$P(E) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.35 = \mathbf{0.65}$$

وعليه:

$$P(D) = P(H) + P(E) = 0.22 + 0.65 = \mathbf{0.87}$$

3-جريدتان على الأكثر:

إما ألا يقرأ الشخص أية جريدة، أو أن يقرأ جريدة واحدة فقط (الحادث D)، أو أن يقرأ جريدتان فقط. نسمي:

G : حادث قراءة الشخص جريدتان على الأكثر.

F : حادث قراءة الشخص جريدتان فقط.

D :حادث قراءة الشخص جريدة واحدة على الأكثر

نترجم العبارة المسطرة:

$$P(G) = P(F) + P(D)\{\text{حادثين متنافيين}\}$$

نبحث عن حادث قراءة الشخص جريدتان فقط.

وهنا يمكننا جمع التقاطعات الثنائية وحذف التقاطع الثلاثي كل مرة.

$$P(F) = [P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)] + [P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] + [P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

$$P(F) = [0.05 - 0.02] + [0.04 - 0.02] + [0.08 - 0.02] = \mathbf{0.11}$$

وعليه:

$$P(G) = 0.11 + 0.87 = \mathbf{0.98}$$

وبعبارة أخرى: كل المجتمع باستثناء الأشخاص الذين يقرؤون ثلاث جرائد معا (2 %).

4-جريدتان على الأقل:

أي يقرأ الشخص جريدتان فقط(F) أو ثلاث جرائد معا. نسمي:

K : حادث قراءة الشخص جريدتان على الأقل.

$$\mathrm{P(K) = P(F) + P(A \cap B \cap C)}$$

تطبيق عددي:

$$\mathrm{P(K)} = 0.11 + 0.02 = 0.13$$

التمرين الثاني:

نرمي قطعتي نرد على التوالي، نسمي A حدثا يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول، و B حدثا يتحقق إذا كان مجموع نتيجتي النردين يساوي 5 . أما C فيتحقق إذا كان الرقمان المتحصل عليهما من النّردين متساويين.

1. أحسب الاحتمالات التالية: $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$
2. أحسب $(A \cup B \cup C)$ وقارنه مع $(A) + P(B) + P(C)$

حل التمرين الثاني:

$$\Omega = \{(1.1).(1.2)\ldots\ldots(2.1).(2.2)\ldots\ldots(6.5).(6.6)\} = 36$$

1-حساب الاحتمالات التالية:

A: حادث يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول.

$$A = \{(3.1).(3.2).(3.3).(3.4).(3.5).(3.6)\} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B: حادث يتحقق اذا كان مجموع نتيجتي النردين يساوي خمسة.

$$B = \{(1.4).(2.3).(3.2).(4.1)\} = 4$$

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

C: حادث يتحقق اذا كان الرقمان المتحصل عليهما من النردين متساويان.

$$C = \{(1.1).(2.2).(3.3).(4.4).(5.5).(6.6)\} = 6$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$A\cap B$: حادث يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول و مجموع نتيجتي النردين يساوي خمسة.

$$A \cap B = \{(3.2)\} = 1$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$A\cap C$: حادث يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول و نتيجتي النردين متساويتين.

$$A \cap C = \{(3.3)\} = 1$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

$B\cap C$: حادث يتحقق عند حصولنا على مجموع خمسة وتكون نتيجتا النردين متساويتين.

$$A\cap C=\emptyset \Longrightarrow P(A\cap C)=0$$

2-حساب الاحتمال $P(A\cup B\cup C)$ ومقارنته مع $P(A)+P(B)+P(C)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+0=\frac{7}{18}$$

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

نلاحظ أن: $P(A\cup B\cup C)\neq P(A)+P(B)+P(C)$

وعليه نقول أن الحوادث ليست متنافية مثنى مثنى.

<u>التمرين الثالث:</u>

يقوم قنّاصان بالتصويب على هدف واحد، حيث احتمال أن يصيب الرامي الأول الهدف (الحدث $E1$) هو 0,6 واحتمال أن يصيب الرامي الثاني الهدف نفسه (الحدث $E2$) هو 0,8 .

أطلق كلٌّ منهما طلقة واحدة نحو الهدف نفسه، ما هو احتمال أن يصاب الهدف:

1. بطلقة واحدة على الأقل؟
2. بطلقة واحدة فقط؟

<u>حل التمرين الثالث:</u>

1-احتمال اصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل:

بمعنى قد يصاب الهدف بطلقة واحدة فقط (من الرامي الأول أو من الرامي الثاني) أو **أن** يصاب بطلقتين (من الراميين معا)

(أو) تصبح اتحاد أي جمع، ويمكن للهدف أن يصاب من الراميين (حوادث متلائمة)، وعليه:

$$P(E1\cup E2)=P(E1)+P(E2)-P(E1\cap E2)$$

$$P(E1\cup E2)=0.6+0.8-0.6\times 0.8\left\{\text{الحوادث مستقلة}\right\}=0.92$$

واعتبرت الحوادث مستقلة لأن اصابة الرامي الأول الهدف أو عدم اصابته لا تؤثر البتة على نتيجة الرامي الثاني، فكل حسب مهارته.

2-احتمال اصابة الهدف بطلقة واحدة فقط:

بمعنى يصيب الرامي الأول و لا يصيب الرامي الثاني أو لا يصيب الرامي الأول و يصيب الرامي الثاني.

نترجم العبارة الى رموز (في مكان (و) نضرب وفي مكان (أو) نجمع، واحتمال "**لا يصيب**" هو متمم احتمال "**يصيب**")

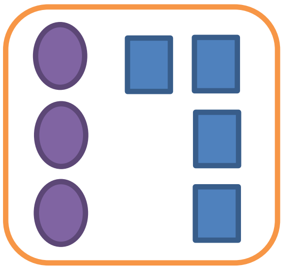
$$P(E1\ ) \times P(\overline{E2}) + P(\overline{E1}) \times P(E2) = 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.8 = 0.44$$

التمرين الرابع:

إذا أُختير الطلبة في فصل بطريقة عشوائية وبشكل متتابع واحدا بعد الآخر لإجراء اختبار معين. أوجد احتمال أن يتعاقب الطُّلاب والطالبات إذا كان بالفصل:

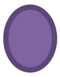
1. أربعةُ طُلاب و ثلاثُ طالبات.
2. ثلاثةُ طُلاب وثلاثُ طالبات.

حل التمرين الرابع:

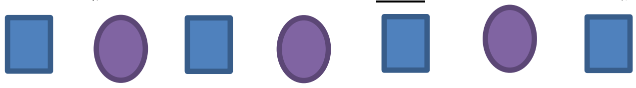


P(A) هو احتمال تعاقب الطلاب والطالبات اذا كان بالصف:

1-أربع طلاب وثلاث طالبات:

لنرمز للطالب بالمربع  ، ولنرمز للطالبة بالدائرة .

كي يتحقق التعاقب لا بد من أن نبدأ بطالب كالتالي:

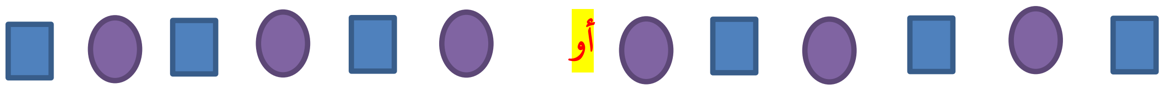


أي أن نختار طالبا عشوائيا من السبع طلبة، وبعد ذلك طالبة من بين الست وبعد ذلك طالب من الخمس ....وهكذا ونسمي هذا الاحتمال بالاحتمالي الشرطي أي احتمال تحقق حادث بمعلومية تحقق حادث آخر.

$$\mathrm{P(A)} = \tfrac{4}{7} \times \tfrac{3}{6} \times \tfrac{3}{5} \times \tfrac{2}{4} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{1} = \mathbf{0.028}$$

2-بالصف ثلاث طلاب وثلاث طالبات:

كي يتحقق التعاقب هنا إما أن نختار: "طالب و طالبة و طالب و طالبة و..." أو نختار: "طالبة وطالب وطالبة و طالب و...إلخ. أي وفقا للشكل الآتي:



$$P(A)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=0.1$$

التمرين الخامس:

في نهاية المداولات بكلية الاقتصاد كتب رئيس اللجنة تقريرا جاء فيه: " ... ولقد لاحظنا رسوب 25% من الطلبة في مقياس الإحصاء، ورسوب 15% من الطلبة في مقياس الرياضيات، ورسوب 10% من الطلبة في المقياسين معا...".

سحبنا أحد الطلبة عشوائيا، المطلوب:

1. إذا كان راسبا في الرياضيات، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الإحصاء؟
2. إذا كان راسبا في الإحصاء، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات؟
3. ما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات أو الإحصاء؟

حل التمرين الخامس:

1-حساب احتمال أن يكون الطالب المختار عشوائيا راسبا في الاحصاء مع العلم أنه راسبٌ في الرياضيات:

نسمي الأحداث الآتية:

M: حدث يتحقق بكون الطالب راسبا في الرياضيات.

S: حدث يتحقق بكون الطالب راسبا في الإحصاء.

عموما... إذا طلب إلينا حساب احتمالٍ شرطيٍّ، فإنه يساوي احتمال التقاطع مقسوما على احتمال الحدث المحقق منهما، أي:

$$P(S/M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{0.1}{0.15}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

2-حساب احتمال أن يكون الطالب المختار عشوائيا راسبا في الرياضيات مع العلم أنه راسب في الاحصاء:

$$P(M/S)=\frac{P(S\cap M)}{P(S)}=\frac{0.1}{0.25}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

3-حساب احتمال أن يكون راسب في الاحصاء أو الرياضيات:

بما أنه يمكن للطالب أن يكون راسبا في المادتين(حوادث متلائمة)، نطبق القانون التالي:

$$P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M)$$

$$P(S \cup M) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.3$$

التمرين السادس:

تحوي ثلاثةُ صناديق متماثلة كراتٍ متجانسة: يحوي الأول 5 كرات بيضاء ومثلها سوداء، وفي الثاني 8 كرات بيضاء وكرتان سوداوان، أما الثالث ففيه 4 كريات بيضاء و 6 سوداء. بطريقة عشوائية سحبنا صندوقا ثم سحبنا منه كرة. أحسب احتمال أم تكون هذه الكرة المسحوبة بيضاء.

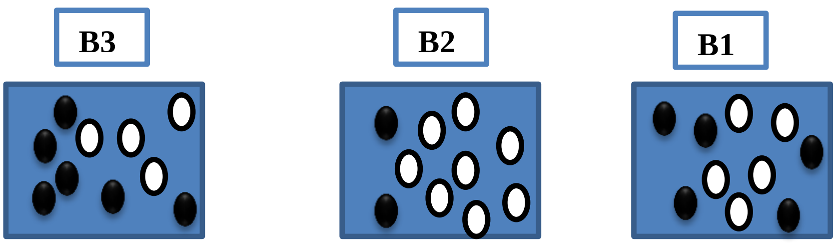
حل التمرين السادس:

حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء:

إما نسحب الصندوق الأول وتكون الكرة البيضاء من الصندوق الأول، أو نسحب الصندوق الثاني وتكون الكرة البيضاء من الصندوق الثاني أو نسحب الصندوق الثالث وتكون الكرة البيضاء من الصندوق الثالث. نسمي:

A : حادث سحب كرة بيضاء.

Bi : حادث سحب الصندوق i حيث، $i = \{1.2.3\}$



نترجم العبارة المسطرة نجد:

$$P(A) = P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)$$

$P(A) = P(\mathrm{B}i)P(A/\mathrm{B}i)$ قانون الاحتمال الكلي

بالتطبيق العددي نجد:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \mathbf{\frac{17}{30}}$$

التمرين السابع:

بالعودة إلى صناديق التمرين الثامن، ولنفرض أن أحدهم سحب عشوائيا كرة من أحد الصناديق فكانت بيضاء، فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة البيضاء من الصندوق الثالث؟

حل التمرين السابع:

حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثالث مع العلم أنها كانت بالفعل بيضاء:(احتمال سبي)

نطبق قانون الاحتمال أي عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة، لكن ما يميز هذا التمرين أن عدد الحالات الممكنة هو نفسه الاحتمال الكلي. نسمي هذه الحالة بدستور "بايز" أو قانةن الاحتمال السبي.

نطبقه كالتالي:

$$P(B3/A) = \frac{P(B3)P(A/B3)}{P(A)}$$

$$P(B3/A) = \frac{P(B3)P(A/B3)}{P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)}$$

$$P(B^3/A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{10}}{\frac{17}{30}} = \mathbf{\frac{4}{17}}$$

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول:

تقوم شركة بإنتاج الأقمصة، حيث كان احتمال وجود عيب في النسيج المستخدم في الإنتاج هو 8% ، بينما احتمال وجود عيب ناتج عن الخياطة هو 6% . فإذا كانت العمليتان الإنتاجيتان (تهيئة النسيج والخياطة)، مستقلتين عن بعضهما البعض، أوجد احتمال إنتاج قميص معيب.

حل التمرين المقترح الأول:

نسمي الأحداث الآتية:

T حدث يتحقق بكون العيب في النسيج.

P: حدث يتحقق بكون العيب في الخياطة.

انتاج قميص معيب يعني أن العيب يكون في النسيج أو في الخياطة:

$$P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P) = 0.08 + 0.06 - (0.08 \times 0.06) = \mathbf{0.1352}$$

التمرين الثاني:

فيما يأتي عينة من خريجي أحد المعاهد موزعين حسب التخصص ونوع المهنة:

المجموع	عمل حر L	قطاع خاص P	قطاع حكومي F	المهنة / التخصص
30	10	5	15	اقتصاد زراعي A
35	10	17	8	اقتصاد صناعي I
35	13	10	12	اقتصاد خدمي S
100	**33**	**32**	**35**	**المجموع**

فإذا أُختير أحد الخرجين بطريقة عشوائية، **المطلوب:**

1. ما هو احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الزراعي ويعمل بالقطاع الخاص؟
2. ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون في القطاع الحكومي أو من خرجي الاقتصاد الصناعي؟
3. ما هو احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الصناعي أو من خرجي الاقتصاد الخدمي؟
4. إذا عُلم أنه من خرجي الاقتصاد الصناعي، ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرّا؟

حل التمرين المقترح الثاني: نطبق القانون التقليدي المعروف: عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة.

1. احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الزراعي ويعمل بالقطاع الخاص:

$$P(A \cap P) = \frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$$

2. احتمال أن يكون ممن يعملون في القطاع الحكومي أو من خرجي الاقتصاد الصناعي:

$$P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I) = \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = \mathbf{0.62}$$

3. احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الصناعي أو من خرجي الاقتصاد الخدمي:

$$P(I \cup S) = P(I) + P(S) = \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = \mathbf{0.7}$$

4. إذا عُلم أنه من خرجي الاقتصاد الصناعي، ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرّا:

$$P(L/I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{10}{35} = \mathbf{0.2857}$$

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 03 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية

التمرين الأول:

يتكون فوج سياحي من ثمانية أشخاص: خمسة رجال وثلاث نساء. سحبنا عشوائيا خمسة أشخاص.

ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الرجال ضمن العينة المسحوبة.

المطلوب:

1. حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.
2. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع.
3. أحسب دالة التوزيع (تابع التوزيع) ومثلها بيانيا.

التمرين الثاني:

توجد في صندوق سبع زجاجات ماء معدني، أربع منها من نوع "بن هارون" B والباقي من نوع "سْعَيدة" S. سحبنا زجاجتين عشوائيا. ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الزجاجات المسحوبة من نوع "بن هارون".

المطلوب:

1. أدرج فضاء إمكانات هذه التجربة.
2. ما هي القيم الممكنة للمتغير X ؟
3. ما هو احتمال أن يكون ضمن الزجاجات المسحوبة زجاجة واحدة B على الأقل؟
4. أدرج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X ومثله بيانيا.
5. أوجد تابع التوزيع $F(x)$ ومثله بيانيا.

التمرين الثالث:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{64}x^2 \ldots\ldots\ldots 0 < x < 4 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots sinon \end{cases}$$

1. تأكد أن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية، ثم مثلها بيانيا.
2. أوجد الاحتمال $p(1 < x < 1.5)$
3. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذه الدالة.

التمرين الرابع:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي: حيث a عدد حقيقي.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \dots\dots\dots 0 < x < 1 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. حدد قيمة a حتى تكون f تابع كثافة، ثم مثلها بيانيا.
2. أحسب: $p(x < 0.5)$ ، $p\left(x < {}^{3}\!/_{4}\right)$
3. أحسب $F(x)$ ومثله بيانيا.
4. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذه الدالة.

تمارين إضافية مقترحة للحل

التمرين الأول: يرمي لاعب قطعة نرد، وذلك ضمن الشروط الآتية:

- إذا كان الرقم الناتج 1 يحصل اللاعب على نقطتين اثنتين.
- إذا كان الرقم الناتج 6 يحصل اللاعب على ثلاث نقاط.
- إذا كان الرقم الناتج أكبر من أو يساوي 2، وأقل من أو يساوي 5 يحصل اللاعب على نقطة واحدة.

ليكن X متغيرا عشوائيا يمثل النقاط التي يحصلها هذا اللاعب.

المطلوب: حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X وتأكد من تحقيقه للشرطين.

الجواب المنتظر:

x_i	1	2	3	**مجموع**
$P(x_i)$	4/6	1/6	1/6	**1**

$P(x_i) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3} P(x_i) = 1$

التمرين الثاني:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{2} \dots\dots\dots 1 < x < 3 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. تأكد أن هذه الدالة تابع كثافة احتمالية.
2. مثلها بيانيا.
3. أوجد الاحتمال $p(2 < x < 2.5)$ (ج: 0.25)
4. أوجد تابع التوزيع $F(x)$ ومثله بيانيا.
5. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذه الدالة. (ج : E(x)=2 ، v(x)=1/3)

أســـــــــرة المقياس.

جامعة محمد خيضر بسكرة — مجال العلوم الاقتصادية والتسيير

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية — و العلوم التجارية *LMD-SEGC*

و علوم التسييـــر — السنـــة الأولـــى

حلول سلسلة التمـــارين رقم 03 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية.

التمرين الأول:

يتكون فوج سياحي من ثمانية أشخاص: خمسة رجال وثلاث نساء. سحبنا عشوائيا خمسة أشخاص.

ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الرجال ضمن العينة المسحوبة.

المطلوب:

1. حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.
2. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع.
3. أحسب دالة التوزيع (تابع التوزيع) ومثلها بيانيا.

حل التمرين الأول:

1. تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

نلاحظ أن:

- ✓ النتائج المنتظرة ثنائية الإمكانية (كل شخص مسحوب إما رجل وإما امرأة).
- ✓ السحب دون إرجاع (أي السحبات غير مستقلة واحتمال النجاح P غير ثابت).
- ✓ لا أهمية للترتيب.

ومنه: X متغير عشوائي خاضع للتوزيع فوق الهندسي، أي: $X \sim H(n,M,N) \Leftrightarrow X \sim H(5,5,8)$

حيث: $\boldsymbol{P(X=k)=\frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}$

لتحديد جدول التوزيع الاحتمالي لابد من ايجاد مجموعة الامكانيات ... واحتمال كل واحدة من هذه الامكانيات:

$$\Omega=\{2,3,4,5\}$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2 \times C_3^3}{C_8^5}=\frac{10}{56}=\mathbf{0.187}$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3 \times C_3^2}{C_8^5}=\frac{30}{56}=\mathbf{0.535}$$

$$P(X=4)=\frac{C_5^5 \times C_3^1}{C_8^5}=\frac{15}{56}=\mathbf{0.267}$$

$$P(X=5)=\frac{C_5^5\times C_3^0}{C_8^5}=\frac{1}{56}=\mathbf{0.018}$$

الجدول رقم **01**: التوزيع الاحتمالي للمتغير **X**.

x_i	2	3	4	5	المجموع
$P(x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	$\mathbf{\frac{56}{56}}$

المصدر: التمرين الأول من السلسلة 03.

2. حساب التوقع الرياضي والتباين لهذا التوزيع:

✓ حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum x_ip_i=\left(2\times\frac{10}{56}\right)+\left(3\times\frac{30}{56}\right)+\left(4\times\frac{15}{56}\right)+\left(5\times\frac{1}{56}\right)=\frac{175}{56}=\mathbf{3.125}$$

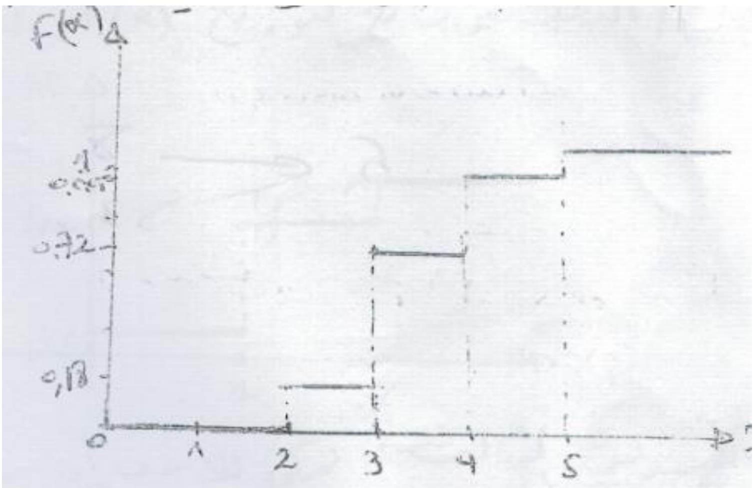
✓ حساب التباين:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum {x_i}^2p_i-[E(X)]^2$$
$$=\left[\left(2^2\times\frac{10}{56}\right)+\left(3^2\times\frac{30}{56}\right)+\left(4^2\times\frac{15}{56}\right)+\left(5^2\times\frac{1}{56}\right)\right]-\left(\frac{175}{56}\right)^2$$
$$=10.35-9.92=\mathbf{0.43}$$

3. حساب دالة التوزيع (تابع التوزيع) وتمثيلها بيانيا:

$$F(x_k)=\begin{cases}0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\infty<x_k<2\\ {}^{10}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\le x_k<3\\ {}^{40}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3\le x_k<4\\ {}^{55}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4\le x_k<5\\ {}^{56}/_{56}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5\le x_k<+\infty\end{cases}$$

تمثيلها البياني:



التمرين الثاني:

توجد في صندوق سبع زجاجات ماء معدني، أربع منها من نوع "بن هارون" B والباقي من نوع "سْعَيدة" S. سحبنا زجاجتين عشوائيا. ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الزجاجات المسحوبة من نوع "بن هارون".

المطلوب:

1. أدرج فضاء إمكانات هذه التجربة.
2. ما هي القيم الممكنة للمتغير X ؟
3. ما هو احتمال أن يكون ضمن الزجاجات المسحوبة زجاجة واحدة B على الأقل؟
4. أدرج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X ومثله بيانيا.
5. أوجد تابع التوزيع $F(x)$ ومثله بيانيا.

حل التمرين الثاني:

1. إدراج فضاء إمكانات هذه التجربة:

$$N = \{(S,S),(S,B),(B,B)\}$$

2. القيم الممكنة للمتغير X:

$$\Omega = \{0,1,2\}$$

3. احتمال أن يكون ضمن الزجاجات المسحوبة زجاجة واحدة B على الأقل.

نلاحظ أن:

- ✓ النتائج المنتظرة ثنائية الإمكانية (كل زجاجة مسحوبة إما ماء سعيدة وإما ماء بن هارون).
- ✓ السحب دون إرجاع (أي السحبات غير مستقلة واحتمال النجاح P غير ثابت)
- ✓ كما أنه لا أهمية للترتيب.

ومنه: X متغير عشوائي خاضع للتوزيع فوق الهندسي، أي: $X \leadsto H(n,M,N) \Leftrightarrow X \leadsto H(2,4,7)$

حيث: $\boldsymbol{P(X=k) = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} + \frac{C_4^2 \times C_3^0}{C_7^2} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \mathbf{\frac{6}{7}}$$

4. أدرج جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

لتحديد جدول التوزيع الاحتمالي لابد من ايجاد مجموعة الامكانيات ... واحتمال كل واحدة من هذه الامكانيات:

$$\Omega = \{0,1,2\}$$

وسبق حساب $P(X=1)$ و $P(X=2)$، ولم يبق لنا إلا حساب $P(X=0)$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0\times C_3^2}{C_7^2}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

أو بطريقة أخرى (طرقة المتمم):

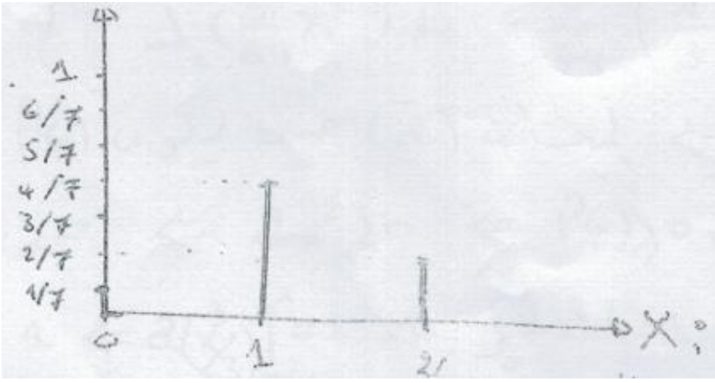
$$P(X=0)=P(X<1)=1-P(X\geq 1)=\left(1-\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{7}{7}-\frac{6}{7}\right)=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

الجدول رقم **02**: التوزيع الاحتمالي للمتغير **X**.

x_i	*0*	*1*	*2*	*المجموع*
P(x_i)	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\mathbf{\frac{7}{7}}$

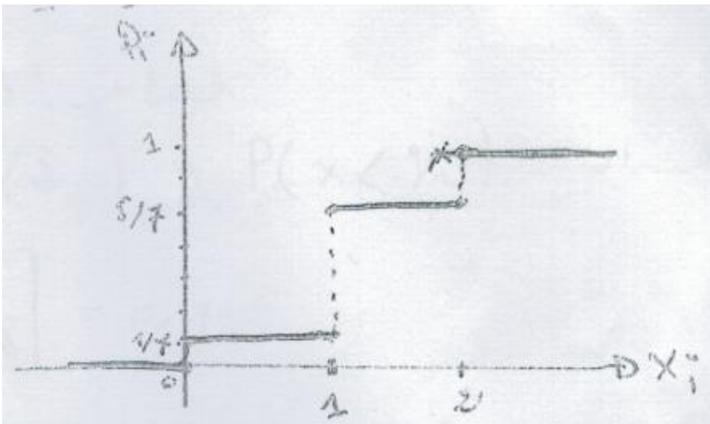
المصدر: التمرين الثاني من السلسلة 03.

تمثيله بيانيا:



5. إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ وتمثيله بيانيا:

$$F(x_k)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\infty < x_k < 0\\ {}^{1}/_{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0\leq x_k<1\\ {}^{5}/_{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\leq x_k<2\\ {}^{7}/_{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\leq x_k<+\infty\end{cases}$$



التمرين الثالث:

يرمي لاعب قطعة نرد، وذلك ضمن الشروط الآتية:

- إذا كان الرقم الناتج 1 يحصل اللاعب على نقطتين اثنتين.
- إذا كان الرقم الناتج 6 يحصل اللاعب على ثلاث نقاط.
- إذا كان الرقم الناتج أكبر من أو يساوي 2، وأقل من أو يساوي 5 يحصل اللاعب على نقطة واحدة.

ليكن X متغيرا عشوائيا يمثل النقاط التي يحصلها هذا اللاعب.

المطلوب: حدد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X وتأكد من تحقيقه للشرطين.

حل التمرين الثالث:

تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

يمكن لهذا الاعب أن يحصد نقطة واحدة، أو نقطتين أو ثلاث نقاط، حسب الوجه الذي يظهر من الترد.

إذن القيم الممكنة للمتغير X هي: $\Omega = \{1,2,3\}$

x_i	$p(x_i)$
1	$^4/_6$
2	$^1/_6$
3	$^1/_6$
المجموع	$^6/_6$

$$P(X=1)=\frac{4}{6}$$
$$P(X=2)=\frac{1}{6}$$
$$P(X=3)=\frac{1}{6}$$

نلاحظ أن هذا التوزيع يحقق الشرطين الأساسيين ليكون توزيعا احتماليا، وهما:

$$p(x_i) \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = 1$$

التمرين الرابع:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{64}x^2 \dots\dots\dots 0<x<4\\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon\end{cases}$$

1. تأكد أن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية، ثم مثلها بيانيا.
2. أوجد الاحتمال $p(1 < x < 1.5)$
3. أحسب كلا من التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.

حل التمرين الرابع:

1. التأكد من أن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية:

لتكون أي دالة رياضية دالة كثافة احتمالية لابد أن تحقق الشرطين الآتيين:

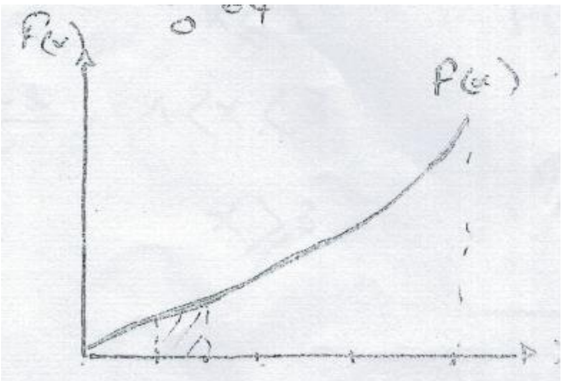
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\end{cases}$$

نلاحظ أن الشرط الأول **محقق**. نتأكد الآن من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{3}{64}x^2dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^2dx = \frac{3}{64}\times\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \left(\frac{3}{64}\times\frac{4^3}{3}\right) = \frac{3}{64}\times\frac{64}{3} = \mathbf{1}$$

ومنه الشرط الثاني ايضا **محقق**.

تمثيله البياني:



2. حساب الاحتمال $\boldsymbol{p(1 < x < 1.5)}$

$$p(1 < x < 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{3}{64}x^2dx = \frac{3}{64}\int_1^{1.5} x^2dx = \frac{3}{64}\times\frac{x^3}{3}\Big|_1^{1.5}$$

$$= \frac{3}{64}\left(\frac{1.5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{3}{64}\left(\frac{\frac{27}{8}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{64}\left(\frac{27}{8}\times\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{64}\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{27}{512} - \frac{3}{192} = 0.053 - 0.016 = \mathbf{0.037}$$

3. حساب كل من التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.

✓ التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^4 x\left(\frac{3}{64}x^2\right)dx = \frac{3}{64}\int_0^4 x^3dx = \frac{3}{64}\times\frac{x^4}{4}\Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{3}{64}\times\frac{4^4}{4}\right) = \frac{3}{64}\times 64 = \mathbf{3}$$

✓ التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^4 x^2\left(\frac{3}{64}x^2\right)dx - [E(X)]^2 = \frac{3}{64}\int_0^4 x^4dx - [E(X)]^2$$

$$= \frac{3}{64}\times\frac{x^5}{5}\Big|_0^4 - 3^2 = \left(\frac{3}{64}\times\frac{4^5}{5}\right) - 9 = \left(\frac{3072}{320} - 9\right) = (9.6 - 9) = \mathbf{0.6}$$

التمرين الخامس:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي: حيث a عدد حقيقي.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \dots\dots\dots 0 < x < 1 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. حدد قيمة a حتى تكون f تابع كثافة، ثم مثلها بيانيا.
2. أحسب: $p(x < 0.5)$ ، $p\left(x < {}^{3}/_{4}\right)$
3. أحسب $F(x)$ ومثله بيانيا.

حل التمرين الخامس:

1. تحديد قيمة a حتى تكون f تابع كثافة احتمالية:

لتكون الدالة f دالة كثافة احتمالية لابد أن تحقق الشرطين الآتيين:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \dots\dots\dots....(2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(\int_0^1 ax^2dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(a\int_0^1 x^2dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(a \times \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1\right)$$

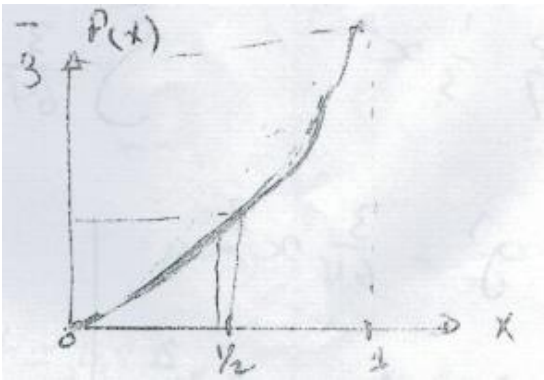
$$\Leftrightarrow \left(a \times \frac{1^3}{3} = 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3} = 1\right) \Rightarrow \boldsymbol{a = 3}$$

وإذا كان $a = 3$ فإن الدالة تحقق الشرط الثاني، وكذلك الشرط الأول، بأن تكون موجبة على امتداد مجال تعريفها.

ومنه تصبح الدالة f معرفة على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \dots\dots\dots 0 < x < 1 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

تمثيلها بيانيا:



2. حساب: $p(x < 0.5)$ ، $p\left(x < {}^{3}/_{4}\right)$

$$p(x < 0.5) = \int_0^{0.5} 3x^2 dx = 3\int_0^{0.5} x^2 dx = 3 \times \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{0.5} = 3 \times \frac{0.5^3}{3} = \mathbf{0.125}$$

$$p\left(x < {}^{3}/_{4}\right) = \int_0^{0.75} 3x^2 dx = 3\int_0^{0.75} x^2 dx = 3 \times \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{0.75} = 3 \times \frac{0.75^3}{3} = \frac{27}{64} = \mathbf{0.422}$$

3. حساب ***F(x)*** وتمثيله بيانيا:

نميز الحالات الثلاث الآتية:

$\boldsymbol{-\infty < x_k < 0}$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} 3x^2 dx = 0$$

$\boldsymbol{0 \le x_k < 1}$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{0} 3x^2 dx + \int_0^{x_k} 3x^2 dx$$

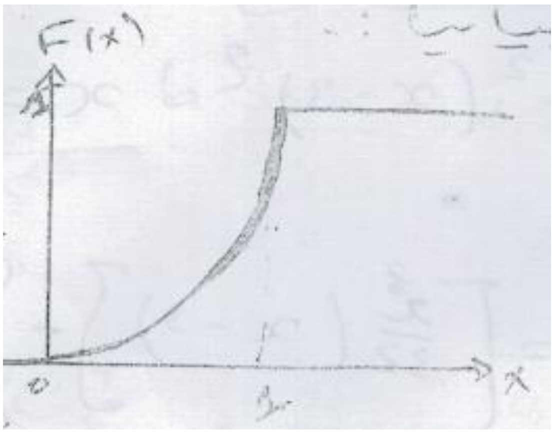
$$= 0 + 3\int_0^{x_k} x^2 dx = 3 \times \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{x_k} = 3 \times \frac{{x_k}^3}{3} = \boldsymbol{{x_k}^3}$$

$\boldsymbol{1 \le x_k < +\infty}$

$$F(x_k) = p(x \le x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} 3x^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 3x^2 dx + \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^{+\infty} 3x^2 dx$$

$$= 0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\infty < x_k < 0 \\ {x_k}^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .0 \le x_k < 1 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ..1 \le x_k < +\infty \end{cases}$$



التمرين السادس:

لتكن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$f(x) = \begin{cases} {}^{1}/_{2} \dots\dots\dots 1 < x < 3 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. تأكد أن هذه الدالة تابع كثافة احتمالية.
2. مثلها بيانيا.
3. أوجد الاحتمال $p(2 < x < 2.5)$
4. أوجد تابع التوزيع $F(x)$ ومثله بيانيا.

حل التمرين السادس:

1. التحقق من أن هذه الدالة تابع كثافة احتمالية:

لتكون أي دالة رياضية دالة كثافة احتمالية لابد أن تحقق الشرطين الآتيين:

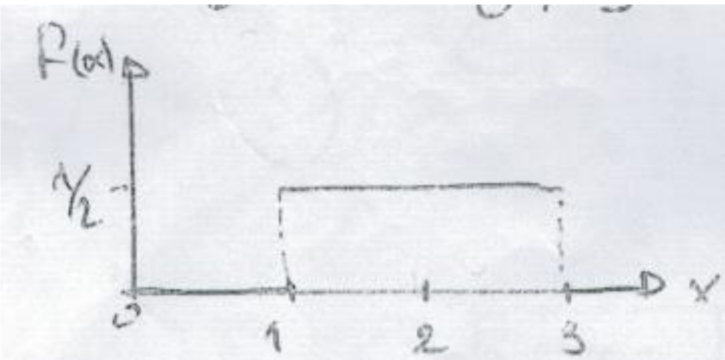
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق. نتأكد الآن من الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} x^0 dx = \frac{x}{2}\Big|\begin{matrix}3\\1\end{matrix} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

ومنه الشرط الثاني أيضا محقق. (يسمى هذا النوع من التوزيعات الاحتمالية بالتوزيع المنتظم).

2. تمثيلها بيانيا:



3. حساب الاحتمال $p(2 < x < 2.5)$

$$p(2 < x < 2.5) = \int_{2}^{2.5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{2.5} x^0 dx = \frac{x}{2}\Big|\begin{matrix}2.5\\2\end{matrix} = \left(\frac{2.5}{2} - \frac{2}{2}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0.25}$$

4. إيجاد تابع التوزيع $F(x)$ وتمثيله بيانيا:

5. نميز الحالات الثلاث الآتية:

$-\infty < x_k < 1$

$$F(x_k) = p(x \leq x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \frac{1}{2} dx = 0$$

$1 \leq x_k < 3$

$$F(x_k) = p(x \leq x_k) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{x_k} \frac{1}{2} dx$$

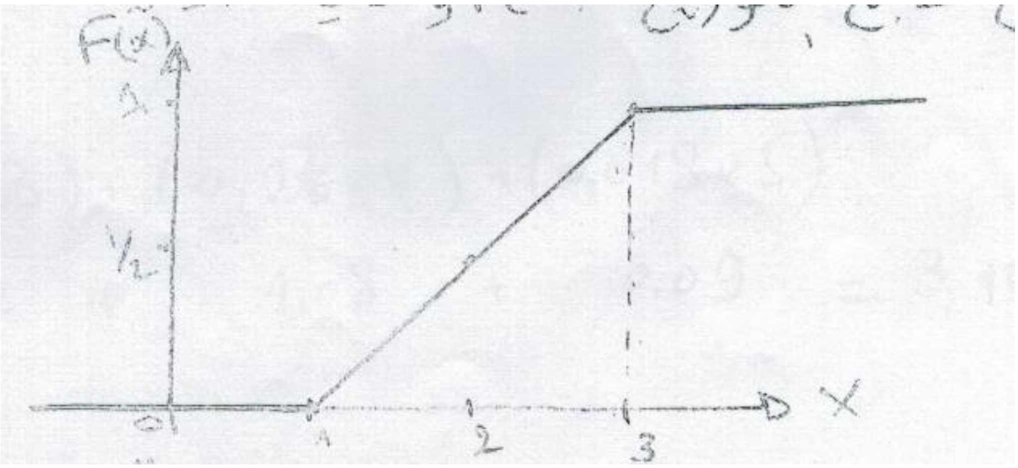
$$= 0 + \frac{1}{2}\int_{1}^{x_k} x^0 dx = \frac{x}{2}\Big|_{1}^{x_k} = \frac{x_k}{2} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{x_k - 1}{2}}$$

$3 \leq x_k < +\infty$

$$F(x_k) = p(x \leq x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} \frac{1}{2} dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_{1}^{3} \frac{1}{2} dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{2} dx$$
$$= 0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots & -\infty < x_k < 1 \\ \dfrac{x_k - 1}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . & 1 \leq x_k < 3 \\ 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad .. \; .. & 3 \leq x_k < +\infty \end{cases}$$

تمثيله البياني:



أســــــــــرة المقياس.

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنة الأولى

سلسلة التمـارين رقم 04 في الإحصـاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة: الثنائي، بواسون.

التمرين الأول:

باعت إحدى وكالات السيارات في يوم ما 6 سيارات من الطراز نفسه. فإذا علمت أن هذا الطراز من السيارات يصبح غير صالح للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل باحتمال قدره 0.25 .

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن يكون نصف السيارات التي بيعت على الأقل لازالت صالحة للاستخدام بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل.
2. أحسب العدد المتوقع من السيارات غير الصالحة للاستخدام بعد سنتين في هذا المحل.
3. إذا كان عدد محلات بيع هذا الطراز من السيارات 4096 محلا على كامل التراب الوطني، وأن في كل محل 6 سيارات. ولنفرض أن جميع هذه المحلات باعت كل سياراتها الست في يوم واحد. بعد انقضاء سنتين من تاريخ البيع، ما هو العدد المحتمل من المحلات التي سُجلت بها 2 شكاوى بأن السيارة لم تعد صالحة؟

التمرين الثاني:

لدينا 2000 عائلة، لكل منها 4 أطفال. إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد الأطفال الذكور في العائلة، وأن احتمال ميلاد طفل ذكر يعادل احتمال ميلاد طفل أنثى.

المطلوب:

I. سحبنا عائلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون فيها:
   1- ولد على الأقل.
   2- بنتان اثنتان.
   3- ولد أو بنتان.
   4- ولا بنت.
   5- على الأكثر بنت واحدة.
   6- أحسب العدد المحتمل من العائلات الموافق لكل احتمال من الاحتمالات السابقة من مجموع العائلات.

II. أحسب عدد الذكور المتوقع في كل عائلة.

التمرين الثالث:

إذا عُلِم أن المتغير العشوائي X -الذي يمثل عدد الوحدات التي تستهلكها أسرة ما من سلعة معينة خلال الشهر- يخضع لتوزيع "بواسون"، بمتوسط 3 وحدات شهريا.

المطلوب:

1- ماهو نوع المتغير العشوائي X ؟

2- أكتب قانونه الاحتمالي.

3- أحسب الاحتمالات الآتية:

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال الشهر.
- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر.
- احتمال أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر.

4- حدد معلمة هذا التوزيع، واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

<u>التمرين الرابع:</u>

يتكون تقرير كتابي من 100 صفحة، بها 110 خطأً طِباعيا موزعة على عشوائيا على صفحاته. لنفتح التقرير عشوائيا على إحدى صفحاته.

1- كم تتوقع عدد الأخطاء فيها؟

2- ما هو احتمال أن تكون خالية من الأخطاء؟

<u>التمرين الخامس:</u>

تنتج إحدى الورشات أحذية مطاطية على آلة معينة، نسبة إنتاجها الرديء 10% . في يوم ما سحب مدير الإنتاج 100 حذاء للمعاينة.

<u>المطلوب</u>: أحسب احتمال أن يجد المدير أكثر من 3 أحذية رديئة في العينة المسحوبة، وذلك باستخدام:

1- التوزيع الثنائي.

2- التوزيع البواسوني.

3- التوزيع الطبيعي.

تمارين مقترحة

<u>التمرين الأول:</u> تنافس أحمد مع منافس له. لنفرض أن لكلا المتنافسين القوة نفسها.

<u>المطلوب:</u> أيهما أكبر احتمالا:

1- أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8 مباريات؟

2- أن يفوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات على الأقل من أصل 8 مباريات؟

<u>التمرين الثاني:</u> ليكن X متغيرا عشوائيا خاضعا للتوزيع الثنائي. حدد معلمتا هذا التوزيع، واكتب قانونه الاحتمالي إذا علمت أن توقعه الرياضي يساوي 2 ، وتباينه يساوي $4/3$.

أسرة المقياس.

حلول سلسلة التمـــارين رقم 04 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة: الثنائي، بواسون.

التمرين الأول:

1. حساب احتمال أن يكون نصف السيارات التي بيعت على الأقل لازال صالحا للاستخدام بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل: (أي أن عدد السيارات التالفة على الأكثر 3)

إن السيارات الست كل منها حدث مستقل عن الآخر، واحتمال الحصول على سيارة غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل هو 0.25 ، كما أن X الذي يمثل عدد السيارات غير الصالحة هو متغير عشوائي خاضع للتوزيع الثنائي، ذي المعلمتين $N=6$ و $p=0.25$. ونكتب: $X\sim B(N=6,\ p=0,25)$

وعليه فإن المطلوب هو:

$$p(X\le 3)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)$$

$$p(X=0)=C_6^0(0.25)^0(0.75)^6=\cdots..$$
$$p(X=1)=C_6^1(0.25)^1(0.75)^5=\cdots...$$
$$p(X=2)=C_6^2(0.25)^2(0.75)^4=\cdots...$$
$$p(X=3)=C_6^3(0.25)^3(0.75)^3=\cdots....$$

$$p(X\le 3)=\cdots......$$

أكملوا الحساب...

2. العدد المتوقع من السيارات غير الصالحة للاستخدام بعد سنتين في هذا المحل:

$$E(X)=N\times p=6\times 0.25=1.5$$

أي أن العدد المتوقع من السيارات غير الصالحة للاستخدام بعد سنتين في هذا المحل حوالي سيارتين اثنتين.

3. العدد المحتمل من المحلات التي سُجلت بها 2 شكاوى بأن السيارة لم تعد صالحة؟

أولا نحسب احتمال تسجيل 2 شكاوى بعد سنتين من بيع السيارات الست:

$$p(X=2)=C_6^2(0.25)^2(0.75)^4=\cdots......$$
$$4096\times[p(X=2)]=\cdots....$$

ومنه العدد المحتمل من المحلات يساوي ..... **محلا**.

أكملوا الحساب...

التمرين الثاني: لدينا X يمثل عدد الذكور وهو متغير عشوائي خاضع للتوزيع الثنائي، ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$.

$$X\sim B(N=4,\ p=0.5)$$

I. سحبنا عائلة عشوائيا. أحسب احتمال أن يكون فيها:

1. ولد على الأقل.

$$\begin{aligned}p(X\ge 1)&=p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)\\&=1-p(X<1)\ =1-p(X=0)\\&=1-C_4^0(0.5)^0(0.5)^4=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=0,9375\end{aligned}$$

2. بنتان اثنتان. أي ولدان اثنان:

$$p(X=2)=C_4^2(0.5)^2(0.5)^2=\frac{6}{16}$$

3. ولد أو بنتان. أي ولد أو ولدان:

$$p(X=1)+p(X=2)=C_4^1(0.5)^1(0.5)^3+C_4^2(0.5)^2(0.5)^2=\frac{4}{16}=\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$$

4. ولا بنت. أي 4 أولاد:

$$p(X=4)=C_4^4(0.5)^4(0.5)^0={}^1\!/_{16}$$

5. على الأكثر بنت واحدة. أي 3 أولاد أو 4 أولاد:

$$p(X=3)+p(X=4)=C_4^3(0.5)^3(0.5)^1+C_4^4(0.5)^4(0.5)^0=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

6. حساب العدد المحتمل من العائلات الموافق لكل احتمال من الاحتمالات السابقة من مجموع العائلات.

- العدد المحتمل من العائلات التي فيها ولد على الأقل هو:

مجموع العائلات × الاحتمال = $2000 \times 0.9375 = 1875$ عائلة.

ولا طريقة نفسها نحسب الأعداد المحتملة لبقية الأسر.

II. أحسب عدد الذكور المتوقع في كل عائلة. أي حساب التوقع الرياضي:

$$\mu=N\times p=4\times 0.5=2$$

التمرين الثالث:

نعلم أن $X\sim P(\lambda=3)$

1. نوع المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي متقطع.
2. كتابة قانونه الاحتمالي:

$$p(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-3}\times 3^k}{k!}$$

3. أحسب الاحتمالات الآتية:

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدتين خلال الشهر.

$$p(X=2)=\frac{e^{-3}\times 3^2}{2!}=0.22$$

- احتمال أن تستهلك الأسرة وحدة واحدة على الأقل خلال الشهر.

$$p(X\geq 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\frac{e^{-3}\times 3^0}{0!}1-0.049=0.95$$

- احتمال أن تستهلك الأسرة 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر.

$$p(X\leq 3)=p(X=3)+p(X=2)+p(X=1)+p(X=0)=0.64$$

4. تحديد معلمة هذا التوزيع، واحسب الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

من المعطيات، معلمة هذا التوزيع هي التوقع الرياضي وتساوي 3.

الانحراف المعياري: نعلم أن : $\mu=\lambda=\sigma^2=3$ ومنه:

$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.73$

التمرين الرابع:

1. عدد الأخطاء المتوقع في الصفحة المختارة.

لدينا 100 صفحة، بها 110 خطأً طِباعيا، وعليه فالصفحة الواحدة يُتوقع أنّ بها $1.1 = \frac{110}{100}$

أي حوالي خطأ واحد في كل صفحة.

2. احتمال أن تكون الصفحة المختارة خالية من الأخطاء.

ليكن X متحولا عشوائيا يمثل عدد الأخطاء الطباعية في كل صفحة:

نلاحظ أن X خاضع لتوزيع بواسون لأن:

$$\begin{cases} N = 100 \geq 50 \\ Np = \lambda = 1.1 < 5 \end{cases} \Rightarrow X \sim P(\lambda = 1.1)$$

$$p(X = 0) = \frac{e^{-1.1} \times 1.1^0}{0!} = e^{-1.1} = 0.33$$

التمرين الخامس:

X متحول عشوائي يمثل عدد الأحذية الرديئة في العينة المسحوبة.

حساب احتمال أن يجد المدير أكثر من 3 أحذية رديئة في العينة المسحوبة، وذلك باستخدام:

1. **التوزيع الثنائي**: $X \sim B(N = 100,\ p = 0.1)$

$$p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)]$$

$$= 1 - [C_{100}^{0}(0.1)^0(0.9)^{100} + C_{100}^{1}(0.1)^1(0.9)^{99} + C_{100}^{2}(0.1)^2(0.9)^{98} + C_{100}^{3}(0.1)^3(0.9)^{97}]$$

$$= 1 - 0{,}00783 = \mathbf{0{,}992}$$

2. **التوزيع البواسوني**: $X \sim P(\lambda = 10) \qquad (\lambda = Np = 100 \times 0.1 = 10)$

$$p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-10} \times 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} \times 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} \times 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} \times 10^3}{3!}\right]$$

$$= 1 - 0{,}0104 = \mathbf{0{,}989}$$

3. **التوزيع الطبيعي**: إذا افترضنا التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي، حيث يكون:

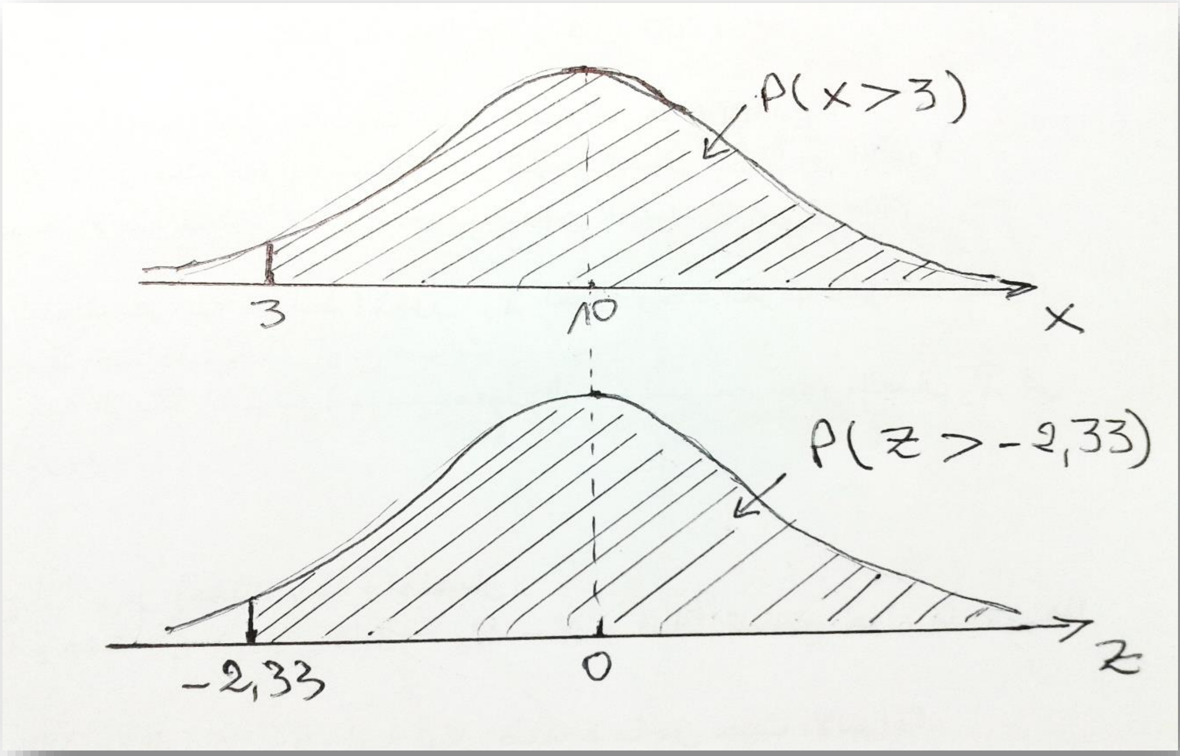
$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 10, \sigma = 3\ )$$

لأن: $\mu = Np = 100 \times 0{,}1 = 10$ و $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.9} = 3$

نتحول من المتغير الطبيعي X إلى المتغير الطبيعي المعياري Z حيث: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$p(X > 3) = p\left(Z > \frac{3 - 10}{3}\right) = p(Z > -2.33) = 0.5 + p(0 \leq Z \leq 2.33)$$

$$= 0.5 + 0.4901 = \mathbf{0.9901}$$



حلول التمارين المقترحة

التمرين الأول : لنفرض X متحولا عشوائيا يمثل عدد المباريات التي فاز فيها أحمد.

1. أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8 مباريات.

حساب الاحتمال الأكبر من بين هاتين الحالتين.

في الحالة الأولى: نحسب احتمال فوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$ أي $X \sim B(N=4,\ p=0.5)$ (لأن للمتنافسين القوة نفسها)

$p(X=3)=C_4^3(0.5)^3(0.5)^1=0.25$

في الحالة الثانية: نحسب احتمال فوز أحمد في 5 مباريات من أصل 8. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=8$ و $p=0.50$ أي $X \sim B(N=8,\ p=0.5)$

$p(X=5)=C_8^5(0.5)^5(0.5)^3=0.22$

وعليه فإن أن يفوز أحمد في 3 مباريات من أصل 4 مباريات أكبر من احتمال أن يفوز في 5 مباريات من أصل 8.

2. أن يفوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4 مباريات، أو أن يفوز في 5 مباريات على الأقل من أصل 8 مباريات.

حساب الاحتمال الأكبر من بين هاتين الحالتين.

في الحالة الأولى: نحسب احتمال فوز أحمد في 3 مباريات على الأقل من أصل 4. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=4$ و $p=0.50$ أي $X \sim B(N=4,\ p=0.5)$

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,31$$

في الحالة الثانية: نحسب احتمال فوز أحمد في 5 مباريات على الأقل من أصل 8. نلاحظ أن X خاضع للتوزيع الثنائي ذي المعلمتين $N=8$ و $p=0.50$ أي $X \sim B(N = 8,\ p = 0.5)$

$$p(X \geq 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) = 0,36$$

وعليه فإن احتمال أن يفوز أحمد على الأقل في 5 مباريات من أصل 8 أكبر من احتمال أن يفوز على الأقل في 3 مباريات من أصل 4.

التمرين الثاني:

تحديد معلمتي التوزيع الاحتمالي للمتغير X. أي تحديد كل من p و N. $X \sim B(N,\ p)$

$$E(X) = Np = 2$$
$$V(X) = Npq = {}^{4}/_{3} \Leftrightarrow 2q = {}^{4}/_{3} \Rightarrow q = {}^{2}/_{3} \Rightarrow p = {}^{1}/_{3}$$
$$E(X) = Np = N \times {}^{1}/_{3} = 2 \Rightarrow N = 6$$

ومنه: $X \sim B\left(N = 6,\ p = {}^{1}/_{3}\right)$

تحديد قانونه الاحتمالي:

$$p(X = k) = C_N^k p^k q^{N-k} = C_6^k \left({}^{1}/_{3}\right)^k \left({}^{2}/_{3}\right)^{6-k}$$

جامعة محمد خيضر بسكرة | مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية | والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
وعلوم التسييـــر | السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 05 في الإحصـــاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة: المنتظم، الطبيعي.

التمرين الأول:

إذا كان X متغيرا عشوائيا خاضعا للتوزيع الاحتمالي المنتظم في المجال $[-3 ، 5]$

المطلوب:

1. حدد دالة الكثافة (تابع الكثافة) الاحتمالية لهذا المتغير، ومثلها بيانيا.
2. أحسب الاحتمال $p(-1 < X < 2)$

التمرين الثاني:

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري المحصورة بين:

1. Z= 0 et Z=1,20
2. Z= (- 0,68) et Z=0
3. Z= (- 0,46) et Z=2,21
4. Z= 0,81 et Z=0,94
5. إلى يمين Z=(- 1,28)

التمرين الثالث:

حدد قيمة العدد b في كل من الحالات الآتية:

1. $p(0 < Z < b) = 0,19$
2. $p(Z < b) = 0,95$
3. $p(Z < b) = 0,05$

التمرين الرابع:

في صف معين في كلية الاقتصاد، يحصل 10 % من الطلبة الأفضل على تقدير "جيد" في مقياس الإحصاء الرياضي. فإذا وُجد أن نقاط الطلبة في أحد امتحانات هذا المقياس تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 10.5 درجات، وانحراف معياري 1.5 درجة.

المطلوب:

1. أوجد أدنى علامة تستحق التقدير "جيد".
2. أحسب احتمال أن تتراوح نقطة طالب معين ما بين:

أ. 9 و 12.

ب. 7.5 و 13.5

ج. 6 و 15

د. أقل من 6.

ه. أكبر من 15.

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول:

قام مركز أمن الطرقات التابع لوزارة الداخلية بتحديد السرعة في شوارع معينة في مدينة بسكرة، وذلك عن طريق دراسة حركة السيارات وتحديد السرعة القصوى التي يجب ألا يتجاوزَها 80% من السائقين. مع العلم أن سرعة السائق تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 36.25 كلم / سا ، وتباين 6.25 $(كلم / سا)^2$.

المطلوب: ما هو حد السرعة الأقصى قانونيا للسائقين؟ **(الجواب: ....)**

التمرين الثاني:

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من 500 موظف في أحد اختبارات الترقية تتوزع طبيعيا، بمعدل قدره 70 درجة، وانحراف معياري قدره 5 درجات.

المطلوب حساب ما يأتي:

1. عدد الموظفين الحاصلين على درجات بين 66 درجة و 76 درجة. **(الجواب: ....)**
2. عدد الموظفين الحاصلين على درجات أكبر من 80 درجة. **(الجواب: ....)**
3. عدد الموظفين الحاصلين على درجات أقل من 60 درجة. **(الجواب: ....)**

أســـرة المقياس.

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنة الأولى

"حلول تمارين السلسلة الخامسة"

التمرين الأول:

X: متغير عشوائي خاضع للتوزيع المنتظم في المجال $[-3,5]$

1- تحديد دالة الكثافة الإحتمالية لـ X:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-(-3)} = \frac{1}{8} & Si\ X \in [-3,5] \\ 0 & Si\ non \end{cases}$$

- التمثيل البياني:

2- حساب الاحتمال:

$$\mathrm{P}(-1 < X < 2) = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(-1) = \frac{2-(-3)}{5-(-3)} - \frac{(-1)-(-3)}{5-(-3)} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

- أو حساب التكامل مباشرة:

$$\mathrm{P}(-1 < X < 2) = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \left[\frac{1}{8}\mathrm{x}\right]_{-1}^{2} = \frac{2}{8} - \frac{-1}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

التمرين الثاني:

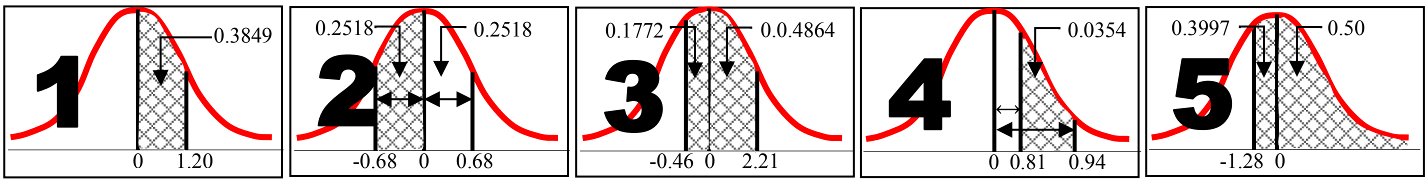
إيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري: (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الملحق 2)

1- $\mathrm{P}(0 < Z < 1.20) = \boxed{0.3849}$
2- $\mathrm{P}(-0.68 < Z < 0) = \mathrm{P}(0 < Z < 0.68) = \boxed{0.2518}$
3- $\mathrm{P}(-0.46 < Z < 2.21) = \mathrm{P}(0 < Z < 0.46) + \mathrm{P}(0 < Z < 2.21) = 0.1772 + 0.4864 = \boxed{0.6636}$
4- $\mathrm{P}(0.81 < Z < 0.94) = \mathrm{P}(0 < Z < 0.94) - \mathrm{P}(0 < Z < 0.81) = 0.3264 - 0.2910 = \boxed{0.0354}$

5- إلى يمين $(z = -1.28)$:

$$P(z > -1.28) = \mathrm{P}(0 < Z < 1.28) + \mathrm{P}(\mathrm{Z} > 0) = 0.3997 + 0.5 = \boxed{0.8997}$$

-رسم توضيحي:



التمرين الثالث:

تحديد قيمة b في كل حالة:

1- $P(0<Z<b)=0.19 \Rightarrow b=\boxed{0.495}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.19 محصورة بين المساحتين 0.1915 و 0.1879 أي أن b محصورة بين 0.50 و 0.49 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 0.495 $(\frac{0.50+0.49}{2}=0.495)$

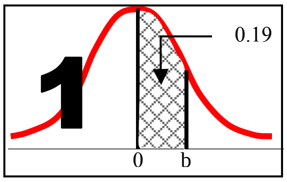
2- $P(Z<b)=0.95 \Rightarrow P(0<Z<b)=0.45 \Rightarrow b=\boxed{1.645}$

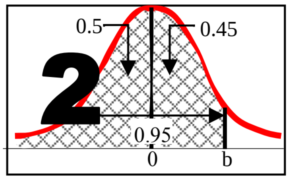
من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.45 محصورة بين المساحتين 0.4495 و0.4505 أي أن b محصورة بين 1.64 و 1.65 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.645 $(\frac{1.64+1.65}{2}=1.645)$

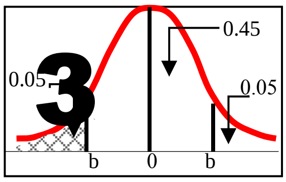
3- $P(Z<b)=0.05 \Rightarrow P(0<Z<b)=0.45 \Rightarrow b=\boxed{1.645}$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.45 محصورة بين المساحتين 0.4495 و0.4505 أي أن b محصورة بين 1.64 و 1.65 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.645 $(\frac{1.64+1.65}{2}=1.645)$

-رسم توضيحي:





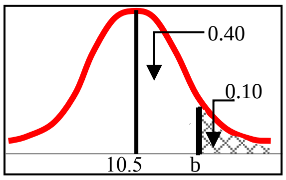


التمرين الرابع:

$$X \sim \mathbb{N}(\mu=10.5\,,\delta=1.5)$$

1- أدنى علامة تستحق التقدير "جيد": نرمز لها بـ b

$$P(X\geq b)=0.10 \Rightarrow P\left(Z\geq \frac{b-\mu}{\delta}\right)=0.10 \Rightarrow P\left(Z\geq \frac{b-10.5}{1.5}\right)=0.10$$
$$\Rightarrow P\left(0<Z<\frac{b-10.5}{1.5}\right)=0.5-0.10=0.40$$



من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.40 محصورة بين المساحتين 0.3997 و0.4015 أي أن $\left(\frac{b-10.5}{1.5}\right)$ محصورة بين 1.28 و 1.29 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 1.285 $(\frac{1.28+1.29}{2}=1.285)$

و بذلك:

$$\frac{b-10.5}{1.5}=1.285 \Rightarrow b=(1.5*1.285)+10.5=\boxed{12.43}$$

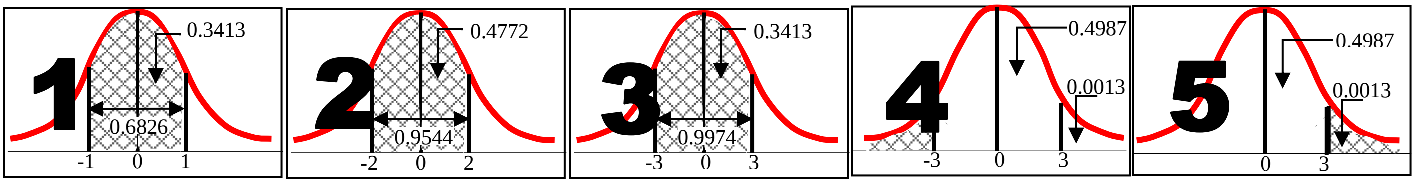
وعليه أدنى علامة تستحق التقدير جيد هي: 12.5

2- حساب الاحتمالات التالية:

- $P(9<X<12)=P\left(\frac{9-10.5}{1.5}<Z<\frac{12-10.5}{1.5}\right)=P(-1<Z<1)=2P(0<Z<1)=2(0.3413)=\boxed{0.6826}$

- $P(7.5 < X < 13.5) = P\left(\frac{7.5-10.5}{1.5} < Z < \frac{13.5-10.5}{1.5}\right) = P(-2 < Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) = 2(0.4772) = \boxed{0.9544}$
- $P(6 < X < 15) = P\left(\frac{6-10.5}{1.5} < Z < \frac{15-10.5}{1.5}\right) = P(-3 < Z < 3) = 2P(0 < Z < 3) = 2(0.4987) = \boxed{0.9974}$
- $P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-10.5}{1.5}\right) = P(Z < -3) = P(Z > 3) = 0.5 - P(0 < Z < 3) = 0.5 - 0.4987 = \boxed{0.0013}$
- $P(X > 15) = P\left(Z > \frac{15-10.5}{1.5}\right) = P(Z > 3) = 0.5 - P(0 < Z < 3) = 0.5 - 0.4987 = \boxed{0.0013}$

-رسم توضيحي:

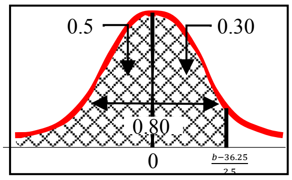


حلول التمارين المقترحة:

التمرين الأول:

$$X \sim N(\mu = 36.25\,, \delta = \sqrt{6.25} = 2.5)$$

السرعة القصوى للسائقين:



$$P(X \le b) = 0.80 \ \Rightarrow P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\delta}\right) = 0.80 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{b-36.25}{2.5}\right) = 0.80$$

$$\Rightarrow P\left(0 \le Z \le \frac{b-36.25}{2.5}\right) = 0.80 - 0.5 = 0.30$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن المساحة 0.30 محصورة بين المساحتين 0.3023 و 0.2996 أي أن $\frac{b-36.25}{2.5}$ محصورة بين 0.85 و 0.84 و بذلك نأخذ القيمة الوسطية 0.845 $\left(\frac{0.84+0.85}{2} = 0.845\right)$

$$\mathrm{P}\left(0 < Z < \frac{b-36.25}{2.5}\right) = 0.845 \ \Longrightarrow \frac{b-36.25}{2.5} = 0.845 \Longrightarrow b = 2.5(0.845) + 36.25 = \boxed{38.35}$$

السرعة القصوى التي يجب أن لا يتجاوزها 80٪ من السائقين هي 38.35 كلم/سا

التمرين الثاني:

$$X \sim N(\mu = 70\,, \delta = 5)$$

1- عدد الموظفين الحاصلين على درجات بين 66 درجة و 76 درجة:

← نسبة الموظفين الحاصلين على درجات بين 66 درجة و 76 درجة:

$$P(66 < X < 76) = P\left(\frac{66-70}{5} < Z < \frac{76-70}{5}\right)$$
$$= P(-0.8 < Z < 1.2)$$
$$= P(0 < Z < 0.8) + P(0 < Z < 1.2) = 0.2881 + 0.3849 = \boxed{0.673}$$

و بذلك عدد الموظفين= 500×0.673= 336.5 أي 336 موظف

2- عدد الموظفين الحاصلين على درجات أكبر من 80 درجة:

←نسبة الموظفين الحاصلين على درجات أكبر من 80 درجة:

$$P(X>80)=P\left(Z>\frac{80-70}{5}\right)=P(Z>2)=0.5-\ P(0<Z<2)=0.5-0.4772=\boxed{0.0228}$$

و بذلك عدد الموظفين =500 ×0.0228=11.4 أي 11 موظف

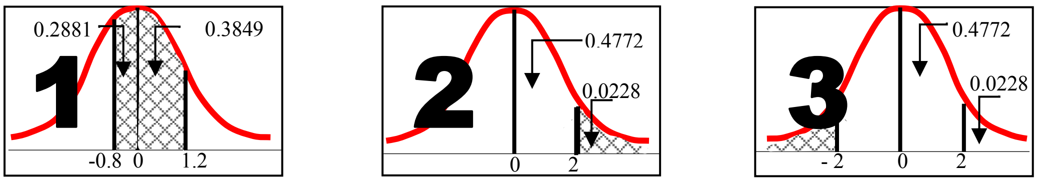
3- عدد الموظفين الحاصلين على درجات أقل من 60 درجة:

←نسبة الموظفين الحاصلين على درجات أقل من 60 درجة:

$$P(X<60)=P\left(Z<\frac{60-70}{5}\right)=P(Z<-2)=P(Z>2)=0.5-\ P(0<Z<2)=0.5-0.4772$$
$$=\boxed{0.0228}$$

و بذلك عدد الموظفين =500 ×0.0228=11.4 أي 11 موظف

-رسم توضيحي:



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسيير

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية LMD-SEGC
السنة الأولى

سلسلة التمارين رقم 06 في الإحصاء الرياضي

التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة: الأسي، كاي مربع، ستودنت، فيشر.

التمرين الأول:

من خلال دراسة إحصائية، وُجد أن مدة العملية الجراحية في أحد المستشفيات تتبع توزيعا أُسِّيا بمتوسط 3 ساعات. أُدخل أحد المرضى إلى غرفة العمليات.

المطلوب: أحسب احتمال أن تبقى العملية

1. ثلاث ساعات أو أقل.
2. أكثر من هذه المدة.

التمرين الثاني:

بينت دراسة إحصائية في أحد مراكز الهاتف أن متوسط مدة المكالمة الهاتفية هو 4 دقائق، وأن مدة المكالمة تتبع التوزيع الأسي. فإذا كان عدد المكالمات التي مرت على هذا المركز هو 500 مكالمة خلال يوم ما. فالمطلوب:

1. قدر نسبة وعدد المكالمات التي تتعدى مدتها المعدل العام.
2. قدر نسبة وعدد المكالمات التي تقل مدتها عن دقيقة واحدة.
3. إذا كان سعر المكالمة 15 دج للدقيقة، قدر دخل المركز في هذا اليوم المذكور.
4. إذا كان سعر المكالمة يُحتسب بالثانية لكن بعد انقضاء الدقيقة الأولى، أحسب نسبة وعدد المكالمات التي تستفيد فعلا من هذه الميزة.

التمرين الثالث:

لوحظ أن مدة خدمة بطارية من إنتاج مصنع $ENELEC$ بسطيف تتبع التوزيع الأسي، بمتوسط قدره 3 سنوات.

المطلوب حساب:

1. احتمال أن تخدم هذه البطارية مدة سنتين على الأقل.
2. احتمال أن تخدم هذه البطارية مدة 5 سنوات على الأقل إذا عُلم أنها قد خدمت فعلا 3 سنوات على الأقل.

التمرين الرابع:

أُجريت دراسة إحصائية على مدة انتظار المريض في إحدى العيادات حتى دخوله على الطبيب، فوُجد أن مدة الانتظار هذه (بالساعة) تخضع لتابع التوزيع الآتي:

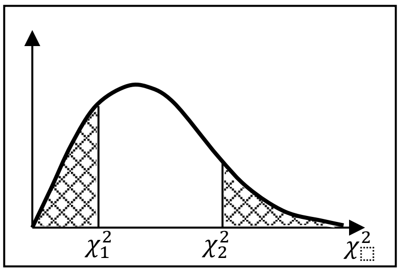
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{6x} \dots\dots\dots x > 0 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots sinon \end{cases}$$

1. أحسب احتمال انتظار المريض لأكثر من ساعة.
2. أحسب احتمال انتظار المريض من 20 دقيقة إلى 40 دقيقة.
3. أكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X. واستنتج توقعه الرياضي وتباينه.

التمرين الخامس

يبين الشكل الآتي الرسم البياني لتوزيع "χ^2" بخمس درجات حرية. أوجد قيمة كل من χ_1^2 و χ_2^2 في الحالات الآتية:

1. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.05
2. المساحة المضللة الكلية تساوي 0.05
3. المساحة المضللة إلى اليسار تساوي 0.10
4. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.01



ملاحظة: نفرض أن المساحتين المضللتين متساويتان.

التمرين السادس:

أوجد قيم χ^2 التي تكون من أجلها مساحة الجانب الأيمن من توزيع χ^2 مساوية لـــ 0.05 ، إذا كان عدد درجات الحرية مساويا لـــ: أ. 15 درجة. ب. 21 درجة. ج. 50 درجة.

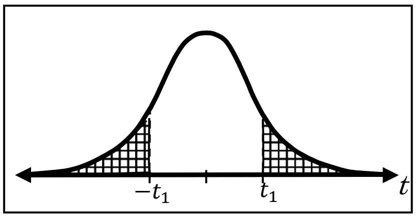
التمرين الثامن:

أوجد $\chi_{0.95}^2$ من أجل درجات الحرية : أ. 50 درجة. ب. 100 درجة.

التمرين السابع:

يبين الشكل الآتي الرسم البياني لتوزيع "ستودنت" بتسع درجات حرية. أوجد قيمة t_1 التي من أجلها:

1. المساحة المضللة إلى اليمين تساوي 0.05
2. المساحة المضللة الكلية تساوي 0.05
3. المساحة الكلية غير المضللة تساوي 0.99
4. المساحة المضللة إلى اليسار تساوي 0.01
5. المساحة إلى يسار t_1 تساوي 0.90



التمرين الثامن:

1. أوجد قيم t التي تكون من أجلها مساحة الجانب الأيمن لتوزيع t تساوي 0.05 إذا كانت درجات الحرية تساوي: 16 درجة. ب. 27 درجة. ج. 200 درجة.
2. أحسب في كل حالة قيمة كلٍّ من التوقع الرياضي والتباين.

التمرين التاسع:

1. باستخدام جدول توزيع "فيشر" أوجد قيم F في الحالات الآتية:

أ. $F_{0.95}^{10,15}$ ب. $F_{0.99}^{15,9}$ ج. $F_{0.05}^{8,30}$ د. $F_{0.01}^{15,9}$

2. أحسب في كل حالة قيمة كلٍّ من التوقع الرياضي والتباين.

أسرة المقياس

"حل السلسلة السادسة"

التمرين الأول:

1- حساب احتمال أن تبقى العملية الجراحية 3 ساعات أو أقل:

$\mu = 3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow F(X) = 1 - e^{\frac{-1}{3}x}$

$P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{\frac{-3}{3}} = 1 - 0.368 = 0.632$

2- حساب احتمال أن تبقى العملية الجراحية أكثر من هذه المدة:

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.632 = 0.368$

التمرين الثاني:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

1- تقدير نسبة و عدد المكالمات التي تتعدى مدتها المعدل العام:

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - \left[1 - e^{\frac{-4}{4}}\right] = e^{-1} = 0.3678$

500 ×(0.3678)=184 مكالمة.

2- تقدير نسبة وعدد المكالمات التي تقل مدتها عن دقيقة:

$P(X < 1) = F(1) = 1 - e^{\frac{-1}{4}(1)} = 1 - 0.779 = 0.221$

500 ×(0.221)=111 مكالمة.

3- تقدير دخل المركز في اليوم المعين:

$Q = \mu(15)500 = 4(15)500 = 30000\ DA$

4- حساب نسبة و عدد المكالمات التي تستفيد من الميزة:

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.221 = 0.7788$

500 ×(0.7788)=389 مكالمة مجانية.

التمرين الثالث:

$$\mu = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

1- إيجاد احتمال أن يخدم هذه البطارية مدة سنتين على الأقل:

لدينا:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{\frac{-1}{3}x} & X \geq 0 \\ 0 & Si\ non \end{cases}$$

2- إيجاد احتمال أن تخدم هذه البطارية مدة 5 سنوات على الأقل إذا علم أنها قد خدمت فعلا 3 سنوات على الأقل:

$$P\left({X \geq 5}/{X \geq 3}\right) = \frac{X \geq 5}{X \geq 3} = \frac{1 - \left(1 - e^{\frac{-5}{3}}\right)}{1 - \left(1 - e^{\frac{-3}{3}}\right)} = e^{\frac{-2}{3}} = 0.5134$$

و هذه خاصية من خصائص التوزيع الأسي و هي ما تسمى بخاصية الافتقار إلى الذاكرة Lack of Memory في هذا التوزيع، حيث أن العمر المستقبلي للبطارية (مثلا) مستقل عن عمرها الحالي.

التمرين الرابع:

1- إيجاد احتمال انتظار المريض لأكثر من ساعة :

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-F(1)=1-\left(1-e^{-6(1)}\right)=e^{-6}=0.0025$$

2- إيجاد احتمال أن ينتظر المريض بين 20 و 40 دقيقة:

20 دقيقة يعادل 2/6 ساعة، 40 دقيقة تعادل 4/6 ساعة:

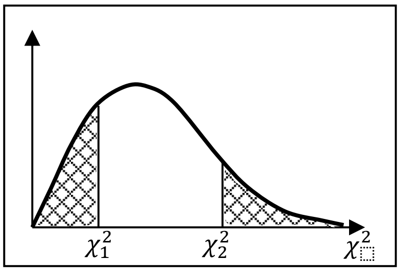
$$P\left(\frac{4}{6}\geq X\geq\frac{2}{6}\right)=P\left(X\leq\frac{4}{6}\right)-P\left(X\leq\frac{2}{6}\right)=F\left(\frac{4}{6}\right)-F\left(\frac{2}{6}\right)$$
$$=\left(1-e^{-6\left(\frac{4}{6}\right)}\right)-\left(1-e^{-6\left(\frac{2}{6}\right)}\right)=0.117=0.12$$

3- كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لـ (X):

$$f(X)=F(X)̀\implies f(\mathrm{X})=\begin{cases}(1-e^{-6x})̀=6e^{-6x} & Si\ X>0\\ 0 & Si\ X\leq 0\end{cases}$$

- التوقع الرياضي: $E(X)=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{6}$
- التباين: $Var(x)=\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{36}$

التمرين الخامس:



1- مساحة المنطقة المظللة إلى اليمين =0.05:

إذا كانت المساحة إلى يمين $\chi^2_2=0.05$ فالمساحة على يسارها = 0.95 و تمثل χ^2_2 المئينة الـ 95 $(\chi^2_{0.95})$، بالرجوع إلى الملحق E نجد قيمة $\chi^2_{0.95}$ التي تقابل $V=5$ هي 11.1

بما ان المساحتين المضللتين متساويتان، فإن المساحة المضللة على يسارχ^2_1= 0.05

بالرجوع إلى الملحق E نجد قيمة $\chi^2_{0.05}$ التي تقابل $V=5$ هي 1.15

2- المساحة المظللة الكلية =0.05:

المساحة إلى يمين $\chi^2_2=0.025$ ، و تكون بذلك على يسارها =0.975 أي أن χ^2_2 تمثل المئينة الـ 97.5 $(\chi^2_{0.975}=12.8)$ من الجدول، و χ^2_1 تمثل المئينة الـ 2.5 نجد $(\chi^2_{0.025}=0831)$ من الجدول أيضا.

3- المساحة المظللة إلى يسار 0.1: χ^2_1 تمثل المئينة العاشرة $(\chi^2_{0.1}=1.61)$.

4- المساحة المظللة إلى يمين0.01: المساحة إلى يسار χ^2_2 هي 0.99 $(\chi^2_{0.99}=15.1)$.

التمرين السادس:

إذا كانت مساحة الجانب الأيمن =0.05 يعني أن الجانب الأيسر مساحته =1-0.05 =0.95 أي نبحث عن $\chi^2_{0.95}$ من أجل:

$V=15\implies\ \chi^2_{0.95}=25$
$V=21\implies\ \chi^2_{0.95}=32.7$
$V=56\implies\ \chi^2_{0.95}=67.5$

التمرين الثامن:

إيجاد $\chi^2_{0.95}$ من أجل درجات الحرية:

- $V = 50$: من أجل V أكبر من 30 يمكن أن نستخدم حقيقة أن χ هو قريب جدا من التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 و تباين 1 و عليه إذا كان Z_P هو المئينة الـ $(100)_P$ للتوزيع الطبيعي المعياري يمكن أن نكتب بدرجة كبيرة من التقريب:

$$\sqrt{2\chi^2_P} = Z_P + \sqrt{2V-1} \quad \text{أو} \quad \sqrt{2\chi^2_P} - \sqrt{2V-1} = Z_P$$

و منه:

$$\chi^2_P = \frac{1}{2}\left(Z_P + \sqrt{2V-1}\right)^2$$
$$\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}\left(Z_{0.95} + \sqrt{2(50)-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1.64 + \sqrt{99}\right)^2 = 67.16$$

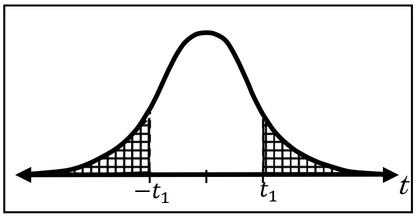
و هي قيمة قريبة من القيمة الجدولية (ملحق E) 67.5

- $V = 100$:

$$\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}\left(Z_{0.95} + \sqrt{2(100)-1}\right)^2 = 124$$

القيمة الفعلية من الملحق 124.3

التمرين السابع:



إيجاد قيم t_1 عند درجة حرية 9:

1- المساحة المظللة إلى اليمين تساوي0.05:

المساحة إلى اليسار =0.95 و منه t_1 تمثل المئينة الـ 95، $t_{0.95} = 1.83$ ، من الملحق.

2- المساحة المظللة الكلية تساوي 0.05

بالتناظر المساحة إلى يمين $t_{0.95} = 0.025$ و على يساره =0.975 و نجد من الملحق:$t_{0.975} = 2.26$

3- المساحة الكلية غير المظللة تساوي 0.99: المظللة =0.01 أي $t_{0.995} = 3.25$

4- المساحة المظللة إلى اليسار تساوي 0.01: $t_{0.99} = 2.82$

5- المساحة إلى يسارt_1 تساوي 0.90 أي $t_{0.9} = 1.38$

التمرين التاسع:

مساحة الجانب الأيمن 0.05 أي الأيسر 0.95 و عليه نجد $t_{0.95}$ من أجل:

$V = 20 \Rightarrow t_{0.95} = 1.645$ ، $V = 27 \Rightarrow t_{0.95} = 1.70$ ، $V = 16 \Rightarrow t_{0.95} = 1.75$

التمرين العاشر:

من جدول فيشر نجد القيم:

$$V_1 = 10 \Rightarrow F_{0.95,10,15} = 2.54$$
$$V_1 = 15 \Rightarrow F_{0.99,15,9} = 4.96$$
$$V_1 = 8 \Rightarrow F_{0.05,8,30} = \frac{1}{F_{0.95,8,30}} = \frac{1}{3.08} = 0.325$$
$$V_1 = 15 \Rightarrow F_{0.01,15,9} = \frac{1}{F_{0.99,15,9}} = \frac{1}{3.89} = 0.257$$