2.4- Puissances électriques en régime alternatif sinusoïdal :

En régime alternatif sinusoïdal, on s'intéresse toujours à la puissance moyenne consommée par les récepteurs électriques. On parle, pour la nommer, de puissance active. Pourtant on distingue plusieurs autres types de puissance électriques, qui correspondent à des notions liées aux aspects technologiques de la distribution de l'énergie électrique.

Soit un dipôle passif, constitué par un ou plusieurs éléments simples. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$. Nous trouvons à ses bornes une tension sinusoïdale $u(t)$. Nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

2.4.1- Puissance instantanée :

La Figure 2.1 montre une source de tension sinusoïdale monophasée alimentant une charge.

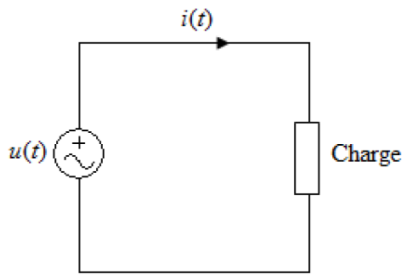


Figure 2.1 : Source sinusoïdale alimentant une charge.

La puissance instantanée reçue par un dipôle parcouru par un courant $i(t)$ et soumis à une différence de potentiel $u(t)$ est :

$$p(t) = u(t).i(t)$$

Elle s'exprime en Watt [W].

Nous distinguons deux cas selon le signe de $p(t)$:

- Si $p(t)$ est ***positif***, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un ***récepteur***.
- Si $p(t)$ est ***négatif***, le dipôle renvoie de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un ***générateur***.

On suppose que la tension et le courant instantanés sont de la forme suivante :

$$u(t) = U_{Max}\cos(\omega t + \varphi_u) \quad et \quad i(t) = I_{Max}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

La puissance instantanée fournie à la charge, est le produit de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$ et est donnée par la relation suivante :

$$p(t) = U_{Max}\cos(\omega t + \varphi_u).I_{Max}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

Soit en utilisant la relation trigonométrique classique suivante :

$$\cos(p).\cos(q) = \frac{1}{2}.[\cos(p-q) + \cos(p+q)]$$

Nous obtenons alors l'expression de la puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{U_{Max}.I_{Max}}{2}.\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right]$$

$$p(t) = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}}.\frac{I_{Max}}{\sqrt{2}}.\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right]$$

$$p(t) = U_{eff}.I_{eff}.\left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)\right]$$

$$p(t) = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi_u - \varphi_i) + U_{eff}.I_{eff}.\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

$$p(t) = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi) + U_{eff}.I_{eff}.\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i),\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

La puissance instantanée se décompose en deux termes :

- Un **terme constant** qui représente la **puissance active** :

$$P = \langle p(t) \rangle = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi)$$

- Et un **terme variable (Sinusoïdal)** qui représente la **puissance fluctuante** :

$$P_f(t) = U_{eff}.I_{eff}.\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

La pulsation de l'expression de la puissance instantanée est deux fois la pulsation du signal sinusoïdal (2ω au lieu de ω).

2.4.1.1- Puissance instantanée des dipôles élémentaires :

En régime sinusoïdal, le courant a alors l'expression suivante : $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}.\sin(\omega t)$.

- **Dans une résistance :**

Considérons un circuit qui comporte une résistance R alimentée par une tension :

$$u_R(t) = R.i(t) = R\,I_{eff}\sqrt{2}.\sin(\omega t)$$

La puissance instantanée qui lui est fournie s'écrit alors :

$$p(t) = u_R(t).i(t) = 2\,R.I_{eff}^2.\sin^2(\omega t)$$

$$p(t) = R\,I_{eff}^2.(1 - \cos(2\omega t))$$

Remarque : $[\sin(\theta)]^2 = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

Le graphe de la puissance instantanée pour un dipôle purement résistif ($\varphi = 0$) est représenté ci-dessous :

Nous constatons que cette puissance est toujours positive et que sa fréquence est double de celle du réseau. L'énergie reçue par la résistance est entièrement consommée et transformée en chaleur. **Une résistance n'emmagasine pas l'énergie : elle la dissipe en chaleur et ne la restitue donc pas à la source**.

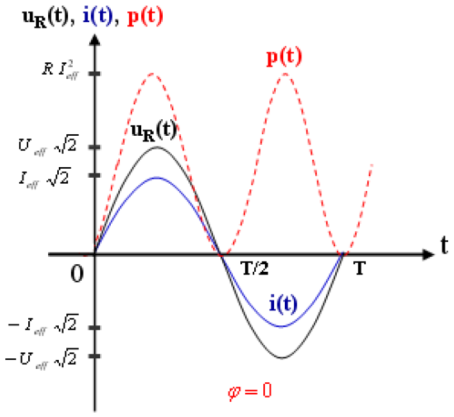


Figure 2.2 : Puissance instantanée pour un dipôle résistif.

- **Dans une bobine :**

Dans ce cas a une tension :

$$u_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} = L\omega.I_{eff}\sqrt{2}.\cos(\omega t)$$

La puissance instantanée qui fournit à une inductance s'écrit alors :

$$p(t) = u_L(t).i(t) = 2L\omega.I_{eff}^2.\cos(\omega t).\sin(\omega t)$$

$$p(t) = L\omega.I_{eff}^2.\sin(2\omega t)$$

Remarque : $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta).\cos(\theta)$.

L'allure de la puissance instantanée pour un dipôle purement inductif $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ est représentée ci-dessous :

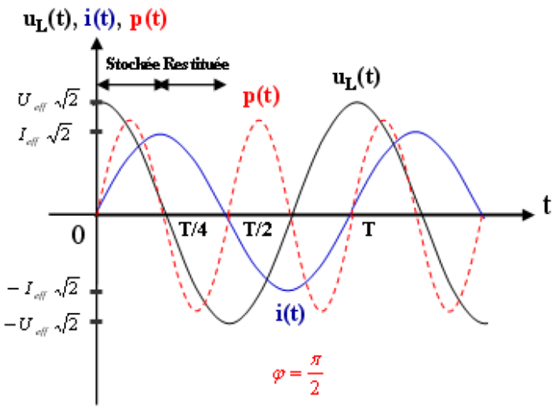


Figure 2.3 : Puissance instantanée pour un dipôle inductif.

Entre 0 et T/4, l'aire soutendue par $p(t)$ est positive; la bobine stocke de l'énergie. Elle se comporte en **récepteur**. Entre T/4 et T/2, l'aire soutendue par $p(t)$ est négative; la bobine restitue de l'énergie. Elle se comporte en **générateur**.

Pendant la durée [0, T/2], l'énergie dépensée par la bobine est nulle. On dit que le dipôle est purement réactif.

Pendant le premier quart de période [0, T/4], la bobine **emmagasine (stockée) une énergie magnétique**. Cette énergie est entièrement **restituée** au réseau au cours du quart de période suivant [T/4, T/2].

- **Dans un condensateur :**

Dans ce cas a une tension :

$$u_C(t) = \frac{1}{C}.\int i(t).dt = \frac{\sqrt{2}}{C}.\int I_{eff}.\sin(\omega t).dt = -\frac{I_{eff}\sqrt{2}}{C\omega}.\cos(\omega t)$$

La puissance instantanée emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$p(t) = u_C(t).i(t) = -\frac{2I_{eff}^2}{C\omega}.\cos(\omega t).\sin(\omega t)$$

$$p(t) = -\frac{I_{eff}^2}{C\omega}.\sin(2\omega t)$$

L'allure de la puissance instantanée pour un dipôle purement capacitif $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$ est représentée ci-dessous :

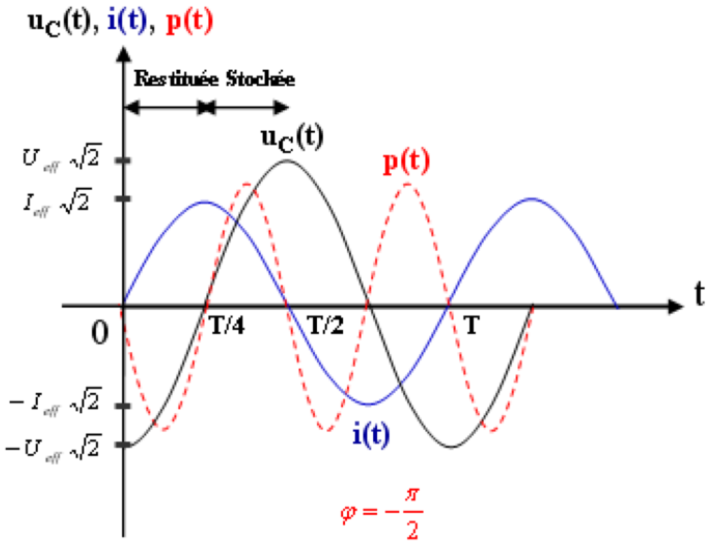


Figure 2.4 : Puissance instantanée pour un dipôle capacitif.

Entre 0 et T/4, l'aire soutendue par $p(t)$ est négative; le condensateur restitue de l'énergie. Il se comporte en **générateur**. Entre T/4 et T/2, l'aire soutendue par $p(t)$ est positive; le condensateur stocke de l'énergie. Il se comporte en **récepteur**.

Pendant la durée [0, T/2], l'énergie dépensée par le condensateur est nulle. Comme la bobine, le condensateur est un dipôle purement réactif. Pendant le premier quart de période [0, T/4], le condensateur **restitué** une énergie. Cette énergie est entièrement **stockée (Sous forme électrique)** pendant le quart de période suivant [T/4, T/2].

2.4.2- Puissance active (ou Moyenne) :

On appelle puissance active ou puissance moyenne P la valeur moyenne de la puissance instantanée $p(t)$ sur une période T. C'est la puissance qui correspond à un travail physique effectif, son unité est le Watt [W]. Elle s'exprime en régime sinusoïdal monophasé selon la relation :

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} p(t).dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} u(t).i(t).dt$$

La puissance moyenne dissipée sur une période de la sinusoide est :

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} U_{eff}.I_{eff}.[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]dt$$

$$P = \frac{U_{eff}.I_{eff}}{T}.\int_{t_0}^{T+t_0} \cos(\varphi_u - \varphi_i).\,dt + \frac{U_{eff}.I_{eff}}{T}.\int_{t_0}^{T+t_0} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i).\,dt$$

Le deuxième terme de l'équation précédente est nul puisque la valeur moyenne d'un $\cos(\theta)$ est nulle. Il ne reste alors que les termes indépendants du temps d'où :

$$P = \frac{U_{eff}.I_{eff}}{T}.\int_{t_0}^{T+t_0} \cos(\varphi_u - \varphi_i).\,dt = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi_u - \varphi_i) = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\Delta\varphi) = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi)$$

Où $\varphi = \Delta\varphi$ représente le déphasage entre le courant circulant dans le dipôle considéré et la tension à ses bornes.

La puissance moyenne est toujours positive ou nulle, à $U_{eff}.I_{eff}$ donnés.

- **Pour une résistance :**

En régime alternatif sinusoïdal, $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase ($\varphi = 0$). La puissance active dissipée dans une résistance est donnée par :

$$P_R = U_{eff}.I_{eff}.\cos(0) \Rightarrow P_R = U_{eff}.I_{eff} = R.I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

La puissance active $P_R > 0$: ***la résistance consomme de la puissance active***.

- **Pour une bobine :**

La tension est en avance sur le courant de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$P_L = U_{eff}.I_{eff}.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La puissance active dans une inductance est nulle ($P_L = 0$). ***La bobine ne consomme pas de la puissance active***.

- **Pour un condensateur :**

La tension est en retard sur le courant de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ donc :

$$P_C = U_{eff}.I_{eff}.\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La puissance active dans un condensateur est nulle ($P_C = 0$). ***Le condensateur ne consomme pas de la puissance active***.

2.4.3- Puissance réactive :

La puissance réactive est la puissance mise en jeu dans les dipôles réactifs. C'est la puissance sans effet physique en terme de travail. Elle est due à la réactance et s'exprime en volt-ampère-réactif [var] en minuscules. Elle n'est définie qu'en régime sinusoïdal et s'écrit :

$$Q = U_{eff}.I_{eff}.\sin(\varphi)$$

Pour un dipôle inductif : $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ *et* $Q_L > 0$.

Pour un dipôle capacitif : $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ *et* $Q_C < 0$.

- **Pour une résistance :**

La puissance réactive dissipée dans une résistance est :

$$Q_R = U_{eff}.I_{eff}.\sin(0) = 0$$

La puissance réactive dans une résistance est nulle $(Q_R = 0)$. ***La résistance ne consomme pas de la puissance réactive***.

- **Pour une bobine :**

La puissance réactive dans le cas d'une inductance s'écrit alors :

$$Q_L = U_{eff}.I_{eff}.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Q_L = U_{eff}.I_{eff} = L\omega.I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$$

La puissance réactive $Q_L > 0$: la bobine **consomme** la puissance réactive.

- **Pour un condensateur :**

La puissance réactive dans le cas d'un condensateur s'écrit alors :

$$Q_C = U_{eff}.I_{eff}.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Q_C = -U_{eff}.I_{eff} = -C\omega.U_{eff}^2 = -\frac{I_{eff}^2}{C\omega}$$

La puissance réactive $Q_C < 0$: le condensateur ***consomme*** une ***puissance négative***, on dit qu'il ***produit de la puissance réactive***.

2.4.4- Puissance apparente :

La puissance apparente est la puissance qui caractérise le générateur source de tension et de courant alternatif. Le produit des valeurs efficaces est appelé puissance apparente. Cette puissance est souvent appelée ***«Puissance de dimensionnement»***, elle est la grandeur caractéristique de l'isolation et de la section des conducteurs, c'est-à-dire des dimensions des appareillages. Son unité est le Volt-Ampère [VA]. La puissance apparente ne représentant en aucun cas un travail physique effectif. Elle est donnée par la relation suivante :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{eff} . I_{eff}$$

Les puissances active, réactive et apparente sont reliées entre elles par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} P = U_{eff} . I_{eff} . \cos(\varphi) = S . \cos(\varphi) \\ Q = U_{eff} . I_{eff} . \sin(\varphi) = S . \sin(\varphi) \\ S = U_{eff} . I_{eff} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^2 = P^2 + Q^2 \\ \cos(\varphi) = \dfrac{P}{S} \end{cases}$$

- **Pour une résistance :** $S_R = \sqrt{P_R^2 + Q_R^2} = R . I_{eff}^2 = \dfrac{U_{eff}^2}{R}$.
- **Pour une bobine :** $S_L = \sqrt{P_L^2 + Q_L^2} = L\omega . I_{eff}^2 = \dfrac{U_{eff}^2}{L\omega}$.
- **Pour un condensateur :** $S_C = \sqrt{P_C^2 + Q_C^2} = C\omega . U_{eff}^2 = \dfrac{I_{eff}^2}{C\omega}$.

Pour éviter la confusion :

- On utilise le Watt [W] pour la puissance instantanée et la puissance active,
- le Volt-Ampère [VA] pour la puissance apparente,
- et le Volt-ampère réactif [var] pour la puissance réactive

2.4.5- Facteur de puissance :

Nous venons voir que :

$$\begin{cases} P = U_{eff} . I_{eff} . \cos(\varphi) \\ S = U_{eff} . I_{eff} \end{cases} \Rightarrow P = S . \cos(\varphi)$$

Donc :

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{P}{U_{eff} . I_{eff}}$$

Le rapport de la puissance active P sur la puissance apparente S est appelée ***le facteur de puissance*** où $\cos(\varphi)$ et n'a pas unité. Sa valeur est comprise entre 0 et 1.

2.4.6- Triangle des puissances :

Voici une façon simple de représenter les relations entre P, Q et S en régime alternatif sinusoïdal. Exemple d'un ***récepteur inductif***.

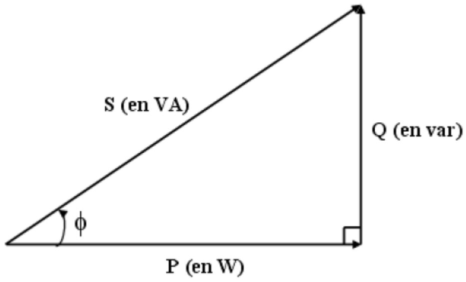


Figure 2.5 : Triangle des puissances (Inductif).

$$P = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi) \quad Q = U_{eff}.I_{eff}.\sin(\varphi) \quad S = U_{eff}.I_{eff}$$

Si on applique le théorème de Pythagore dans le triangle, on peut déterminer :

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad \sin(\varphi) = \frac{Q}{S} \quad \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{Q}{P} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

La puissance complexe est la somme complexe des puissances moyennes et réactives :

$$\underline{S} = P + jQ = U_{eff}.I_{eff}.(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = U_{eff}.I_{eff}.e^{j\varphi} \;\; Avec : |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \;\; et \;\; \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

2.5- Théorème de Boucherot :

2.5.1- Théorème :

- **La puissance active totale P_T** consommée par une installation (ou un circuit) est égale à la somme des puissances actives consommées par chaque appareil (ou par chaque dipôle du circuit).

$$P_T = \sum_{k=1}^{n} P_k = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

- **La puissance réactive totale Q_T** consommée par une installation (ou un circuit) est égale à la somme des puissances réactives consommées par chaque appareil (ou par chaque dipôle du circuit).

$$Q_T = \sum_{k=1}^{n} Q_k = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$

- Par contre, **la puissance apparente totale S_T** vaut alors :

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = U_{eff}.I_{eff}$$

Avec P_T, Q_T et S_T les puissances actives, réactives et apparentes de l'ensemble et P_k, Q_k et S_k celles associées à chacun des dipôles.

Les puissances apparentes ne se conservant pas $S_T \neq \sum_{k=1}^{n} S_k$.

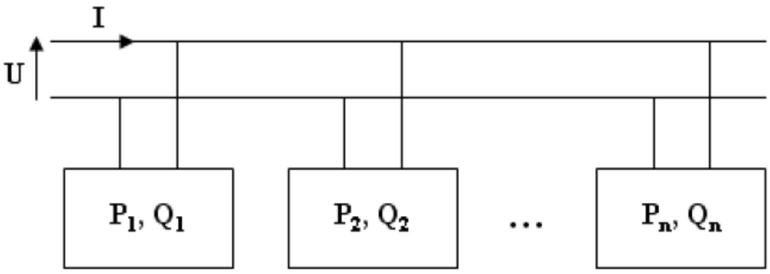


Figure 2.6 : Théorème de Boucherot.

Remarque :

- Le théorème de Boucherot n'est pas valable pour la puissance apparente.
- Le théorème de Boucherot, s'applique à tout type de groupements, série ou parallèle.

Donc :

La méthode de Boucherot traduit ***la conservation des puissances actives et réactives***. Ce théorème est utilisé en électrotechnique pour déterminer ***le courant absorbé*** par une installation (ou un circuit). La méthode est la suivante :

1- On calcul la puissance active totale P_T.

2- On calcul les puissances réactives connaissant le facteur de puissance $\cos(\varphi)$: $Q = P.\tan(\varphi)$.

3- On en déduit $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = U_{eff}.I_{eff}$ puis $I_{eff} = \dfrac{S_T}{U_{eff}}$.

Mesure des puissances électriques :

En courant alternatif monophasé, si la charge (Récepteur) est purement résistive la puissance est encore donnée par le produit $U_{eff}.I_{eff}$. Si le circuit comporte une charge ayant une partie réactive le courant n'est plus
en phase avec la tension et on détermine les trois puissances suivantes :

- Puissance active : $P = U_{eff}\, I_{eff} \cos(\varphi)$ [W]. Wattmètre
- Puissance apparente : $S = sqrt(P^2 + Q^2) = U_{eff}\, I_{eff}$ [VA]. Ampèremètre, Voltmètre
- Puissance réactive : $Q = U_{eff}\, I_{eff} \sin(\varphi)$ [var]. $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$

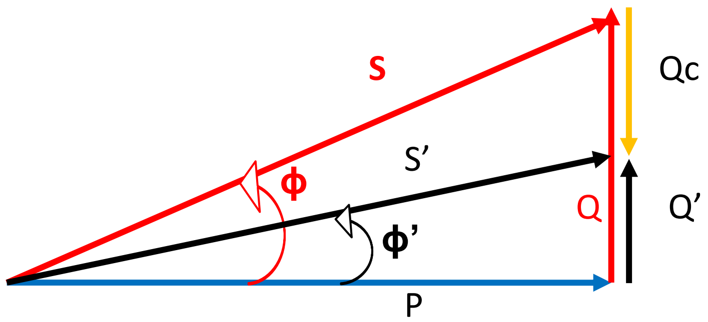
Mesure de facteur de puissance :

Le facteur de puissance se trouve par le calcul :

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

Importance du facteur de puissance :

- Le facteur de puissance est un élément qui rend compte de l'efficacité d'un dipôle pour consommer correctement la puissance lorsqu'il est traversé par un courant.
- Les **distributeurs d'énergie électrique** facturent en général la **puissance apparente** (en **kVA**) consommée sur la base de la mesure réalisée à l'aide du **compteur d'énergie**.
- Si le **facteur de puissance** d'une installation est **faible**, l'**intensité** consommée sera **grande** d'où une **facture électrique** plus élevée.
- C'est pour cette raison que les **distributeurs d'énergie électrique** facturent l'**énergie réactive** pour les gros consommateurs, la **facturation** tiendra compte de toutes les **puissances** : **Active**, **réactive** et **apparente** consommées.
- **Améliorer** le **facteur de puissance** permet donc de **réduire** le courant absorbé total et ainsi diminuer la **puissance apparente souscrite (kVA)**.
- Les avantages de l'amélioration du facteur de puissance : **Réduction des factures d'électricité**. Le facteur de puissance est indiqué sur la facture d'électricité. **Lorsque le facteur de puissance est faible, cela signifie que l'entreprise n'utilise pas complètement l'électricité pour laquelle elle paie, ce qui se traduit par des pénalités importantes sur la facture d'électricité, par une surcharge du système de distribution électrique et par une augmentation du bilan carbone de l'entreprise**. L'amélioration du facteur de puissance permet d'éliminer les pénalités sur la facture d'électricité.
- Pour **améliorer** le **facteur de puissance (Corriger)** d'une installation ou d'un récepteur, il suffit de diminuer la **puissance réactive**. On **ajoute** un **condensateur** (ou **une batterie de condensateurs**) aux bornes du récepteur ou de l'installation à compenser.



Récapitulation.

Symbole	Nom	Unité	Formule	Mesure
P	Puissance active ou moyenne	Watt [W]	$P = U_{eff}.I_{eff}.\cos(\varphi)$ $P = S.\cos(\varphi)$	Wattmètre
Q	Puissance réactive	volt-ampère-réactif [var]	$Q = U_{eff}.I_{eff}.\sin(\varphi)$ $Q = S.\sin(\varphi)$	Par le calcul
S	Puissance apparente	Volt-Ampère [VA]	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $S = U_{eff}.I_{eff}$	Voltmètre x Ampèremètre

- Les puissances consommées par chacun des éléments de base sont rassemblées ci-dessous :

Dipôle	$\underline{Z}$	$\varphi_u - \varphi_i$	P	Q	S
Résistance	R	0	$P_R = R.I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$	0	$R.I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$
Bobine	$jL\omega$	$\frac{\pi}{2}$	0	$Q_L = L\omega.I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$	$L\omega.I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$
Condensateur	$-j\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$Q_C = -C\omega.U_{eff}^2 = -\frac{I_{eff}^2}{C\omega}$	$C\omega.U_{eff}^2 = \frac{I_{eff}^2}{C\omega}$

- Etude d'une installation électrique monophasée :

Puissance active totale [W]	$P_T = \sum_{k=1}^{n} P_k$
Puissance réactive totale [var]	$Q_T = \sum_{k=1}^{n} Q_k$
Puissance apparente totale [VA]	$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$
Courant total de ligne [A]	$I_T = \frac{S_T}{U_{eff}}$
Facteur de puissance totale	$\cos(\varphi_T) = \frac{P_T}{S_T}$