

III- Théorèmes Fondamentaux en Plasticité

3.1- Théorème des travaux virtuels

Si une structure, en équilibre statique sous l'effet d'un système de charges extérieures, est soumise à une variation virtuelle de déformation « compatible avec les conditions aux limites », le travail des charges extérieures pendant cette variation de déformation est égale au travail des efforts internes. Ce théorème est valable quel que soit le comportement de la structure (élastique, élastique parfaitement plastique, fragile, ...). Il faut noter que la déformation virtuelle peut être choisie arbitrairement. Il suffit qu'elle satisfasse aux conditions imposées par les appuis et les liaisons du problème.

3.2- Théorème statique

Pour les structures aux comportements parfaitement plastiques, la ruine se produit sous les charges $\lambda u P$ quand la structure est soumise à un chargement donné P . Le coefficient de sécurité λu est égale à la valeur maximale du facteur λ tel que sous les charges λP on peut trouver une distribution d'efforts internes :

- En équilibre avec les charges λP .
- Respectant le critère de plasticité des éléments de la structure.

3.3- Théorème cinématique

Pour les structures aux comportements parfaitement plastiques, la ruine se produit sous les charges $\lambda u P$ quand la structure est soumise à un chargement donné P . Le coefficient de sécurité λu est égal à la valeur minimale des facteurs λ_i calculés par :

$\lambda_i W_{ext}^i = W_{déf.max}^i$, lorsqu'on envisage tous les champs de déformation compatible i où :

W_{ext}^i : est le travail des charges P pour les déplacements associés aux champs de déformation compatible i .

$W_{déf.max}^i$: est l'énergie maximale de déformation pour les champs de déformation compatible.

3.4- Théorème combiné

Pour les structures aux comportements parfaitement plastique, les charges P sont des charges de ruine si :

- dans une structure sous le système de charge P on peut trouver une distribution d'efforts internes :
 - Qui soit en équilibre avec les charges P .
 - Qui ne dépasse pas la capacité de résistance des éléments.
 - Qui soit tel qu'il y ait suffisamment de plastification pour former un mécanisme.

3.5-Notions sur l'énergie maximale de déformation

3.5-1 Déformation virtuelle définie par un seul paramètre

- Déformation virtuelle : variation de longueur Δl d'une barre.
- Efforts normaux supportés par la barre

$$-N_0 < N < +N_0$$

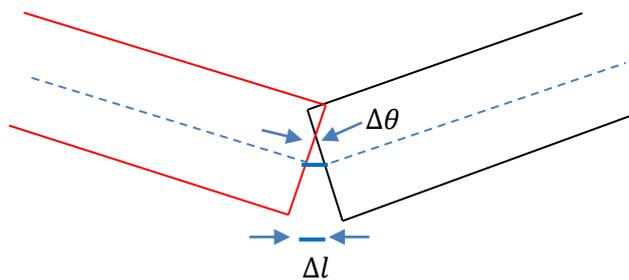
- Énergie maximale de déformation

$$W_{déf.max} = \max(N \cdot \Delta l) \text{ avec } -N_0 < N < +N_0$$

$$W_{déf.max} = N_0 \Delta l \text{ si } \Delta l > 0$$

$$W_{déf.max} = -N_0 \Delta l \text{ si } \Delta l < 0$$

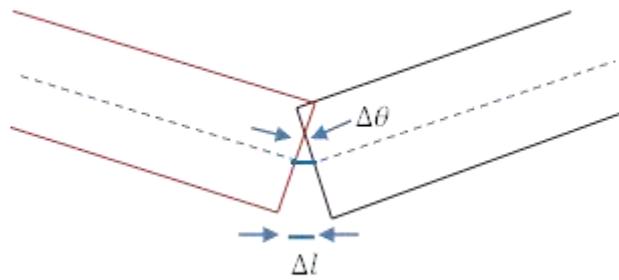
3.5-2 Déformation virtuelle définie par deux paramètres



- Déformation virtuelle dans une barre :

$\Delta\theta$: Rotation entre deux sections de la barre

Δl : Variation de distance entre les centres de gravité des sections



Critère de résistance de la barre : $f(m, n) = 0$

- Énergie maximale de déformation

$$W_{\text{déf. max}} = \vec{E}^* \cdot \overrightarrow{AD}$$

E^* : Vecteur ayant M^* et N^* pour composante

$\vec{E}^* \cdot \overrightarrow{AD} = M^* \Delta\theta + N^* \Delta l$ Soit maximum.

