

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المحور الثالث: القيم والمتجهات الذاتية

Eigenvalues and Eigenvectors

- If $Av = \lambda v$ (v is a vector, λ is a scalar)
- v is an eigenvector of A **excluding zero vector**
- λ is an eigenvalue of A that corresponds to v

A must be square

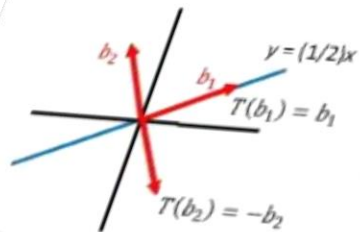
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eigen value

Eigen vector

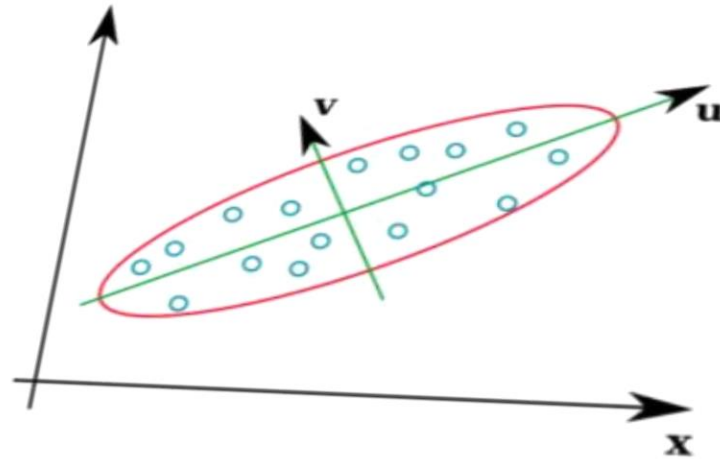
• Example: Reflection

reflection operator T about the line $y = (1/2)x$



b_1 is an eigenvector of T
its eigenvalue is 1.

b_2 is an eigenvector of T
its eigenvalue is -1.



Eigenvectors (blue arrows): These special arrows remain aligned with their original direction after the transformation. They only get stretched or squished by a factor, represented by the eigenvalue

Eigenvalues (numbers): These numbers indicate the amount of stretching or squishing. An eigenvalue of 1 means no change, greater than 1 indicates stretching, and less than 1 indicates squishing (including flipping if negative).

الهدف من المحور:



التعرف على المتجهات وفضاء المتجهات ✓

التعرف على الأساس والبعد ✓

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ✓

حساب القيم والمتجهات الذاتية ✓

1- المتجهات Vectors

✓ المتجه هو كمية رياضية لها مقدار (طول) و اتجاه.

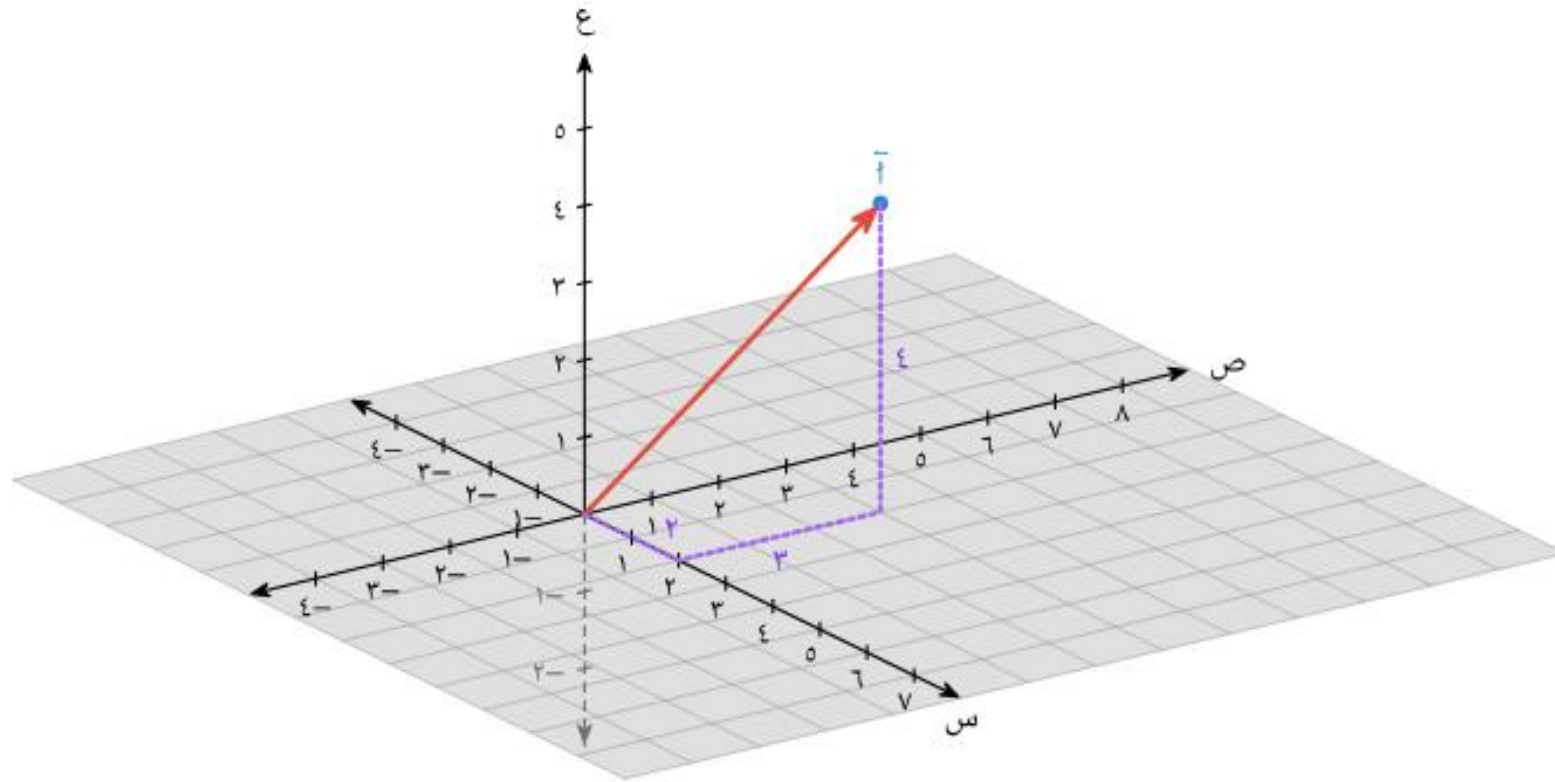
يُعبّر عن المتجه في فضاء المتجهات بالإحداثيات (تسمى بمركبات المتجه)

مثلا: متجه \vec{v} في فضاء ثنائي البعد R^2 : $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

مثلا: متجه \vec{u} في فضاء ثلاثي الأبعاد R^3 : $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

مثلا: متجه \vec{u} في فضاء ذو n بعد R^n : $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;*

1- المتجهات Vectors



2- فضاء المتجهات Vectors

➤ فضاء المتجهات هو مجموعة من الكيانات الرياضية (المتجهات) التي يمكن جمعها وكذلك ضربها بعدد ثابت (عدد حقيقي) وتستوفي خصائص معينة.
يُرمز لفضاء المتجهات عادةً بـ V

➤ مكونات فضاء المتجهات:

- ✓ المتجهات: عناصر تنتمي إلى الفضاء V
- ✓ الأعداد الثابتة تُسمى أيضًا الأعداد القياسية (Scalars)
- ✓ العمليات الأساسية:
- جمع المتجهات: $\text{If } u, v \in V \text{ then } u+v \in V$
- ضرب المتجه بعدد ثابت: $\text{If } u \in V \text{ and } c \in \mathbb{R} \text{ then } cxu \in V$

3- الأساس (Basis) والبُعد (Dimension)

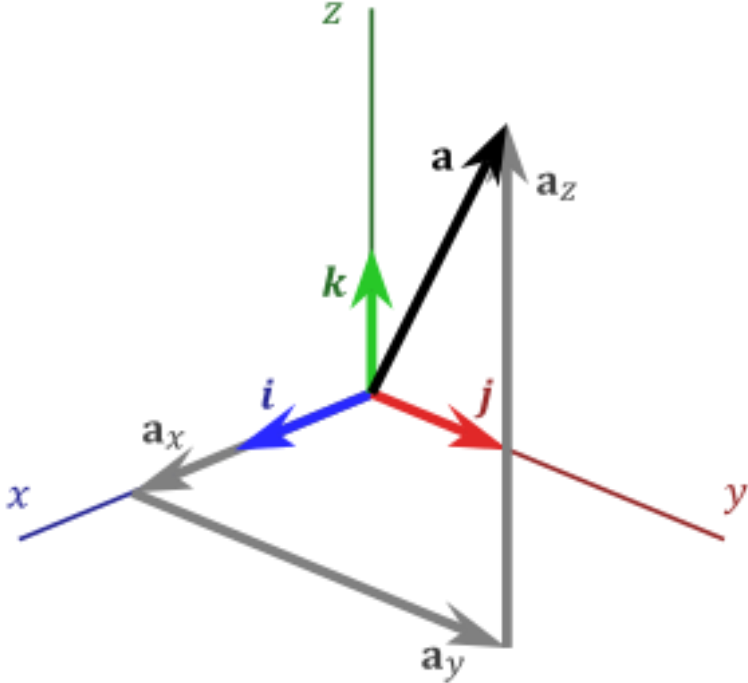
➤ **الأساس:** مجموعة من المتجهات المستقلة خطيًا التي يمكن من خلالها توليد كل متجه في الفضاء.

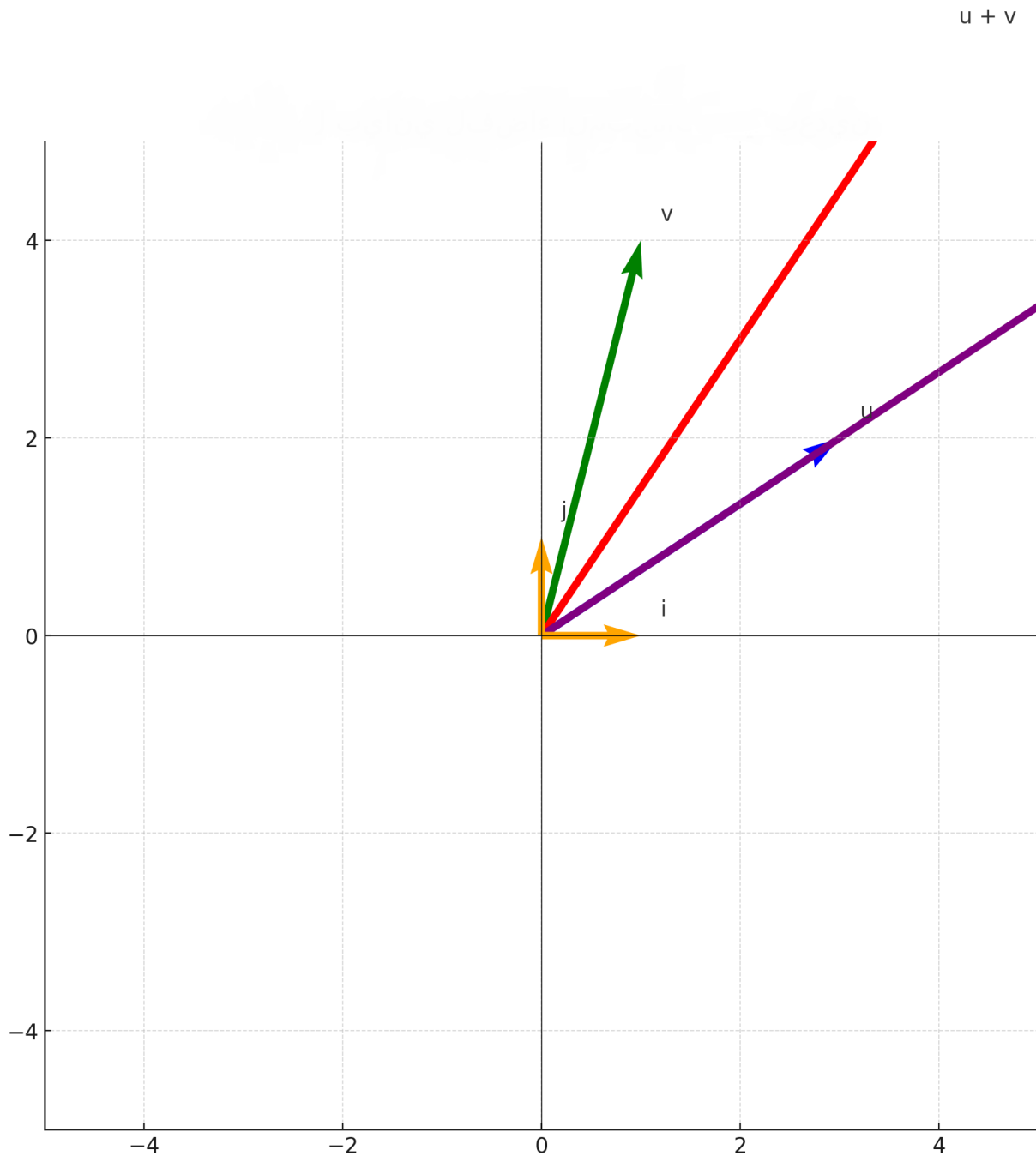
➤ **البُعد:** عدد المتجهات في الأساس.

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وفق هذا الاصطلاح، يكتب أي متجه في الفضاء الاتجاهي ثلاثي الأبعاد

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ai + bj + ck$$





مثال:

اللون الأخضر $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

اللون الأزرق $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

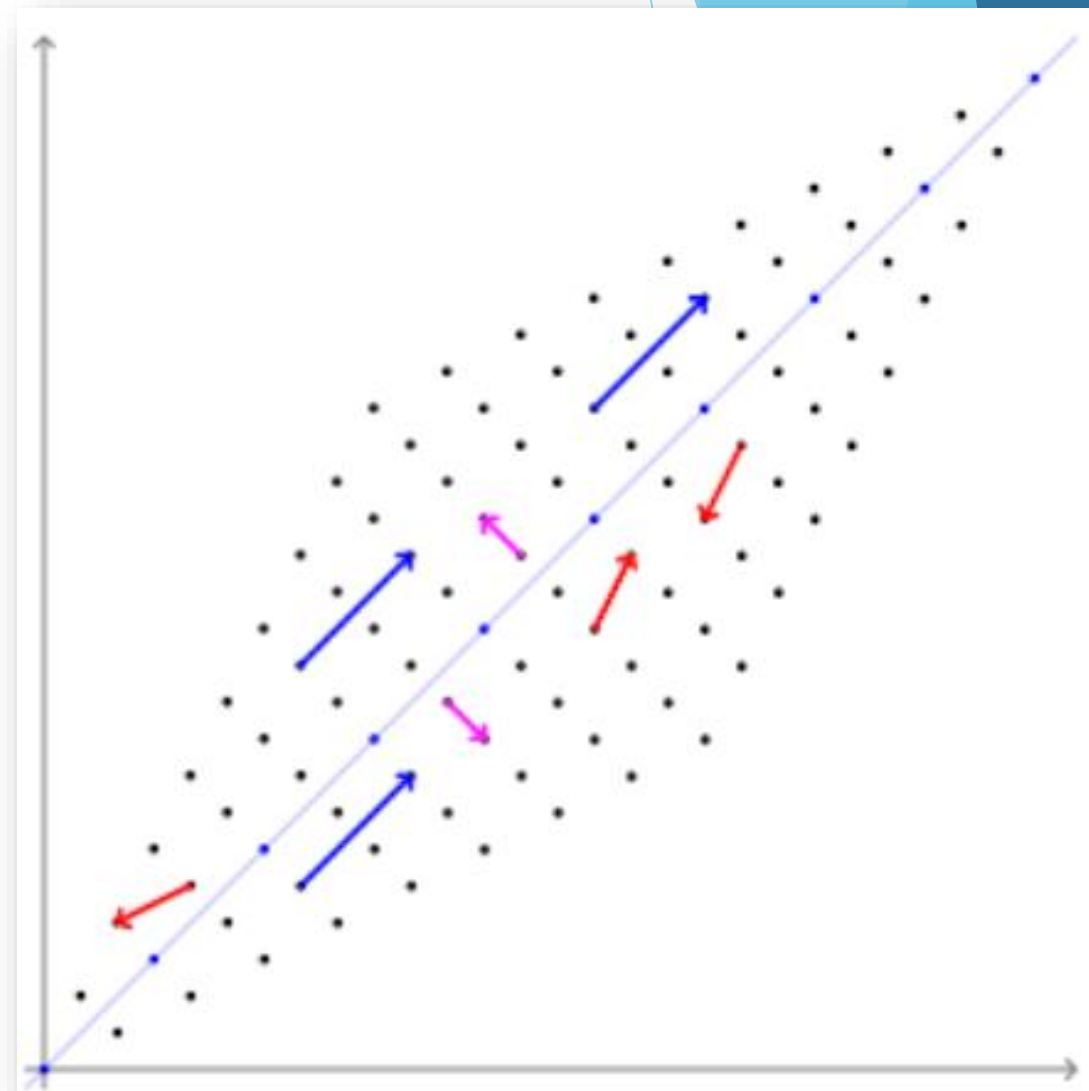
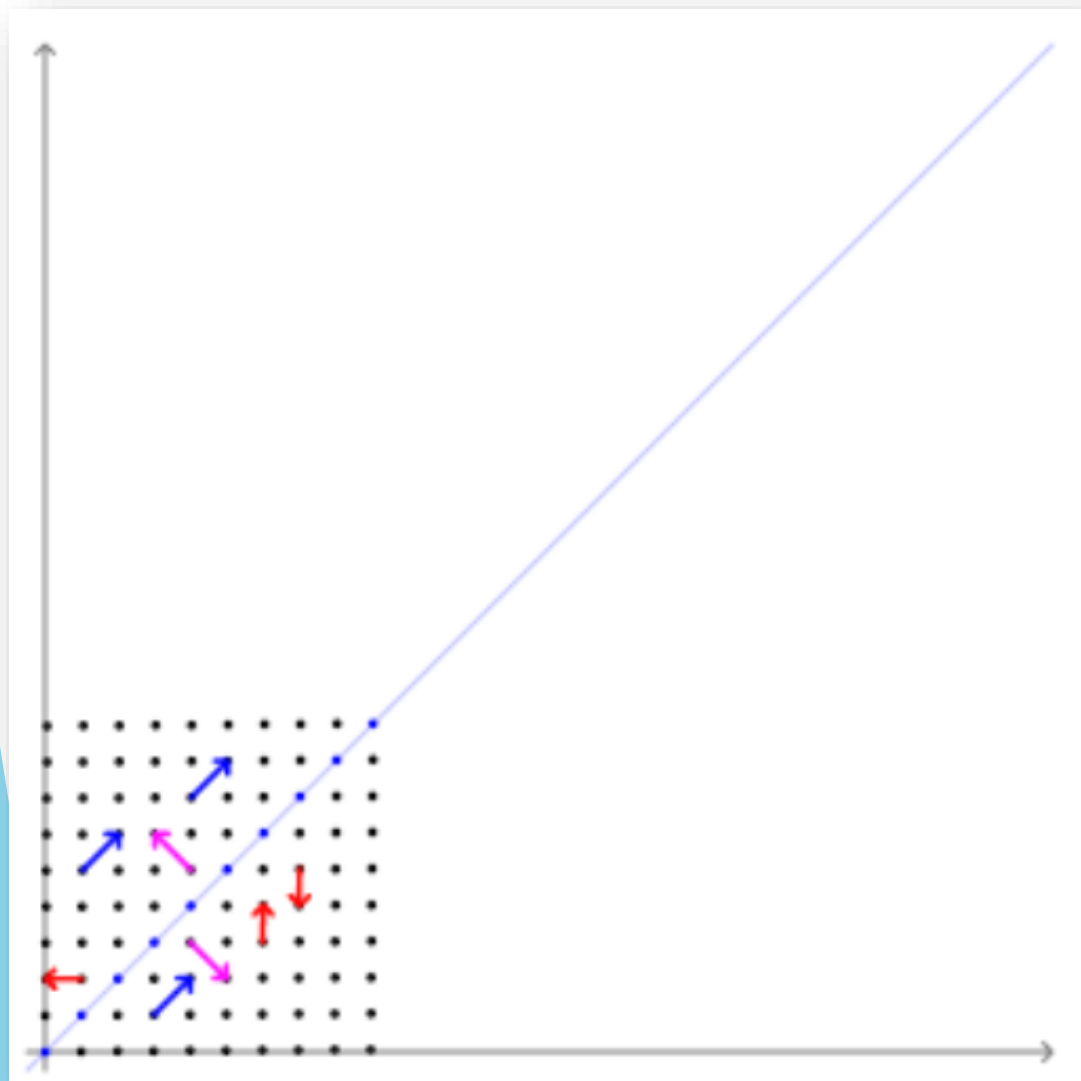
اللون الأحمر $v + u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

اللون البنفسجي $2u = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

4- القيم الذاتية (Eigenvalues) والمتجهات الذاتية (Eigenvectors)

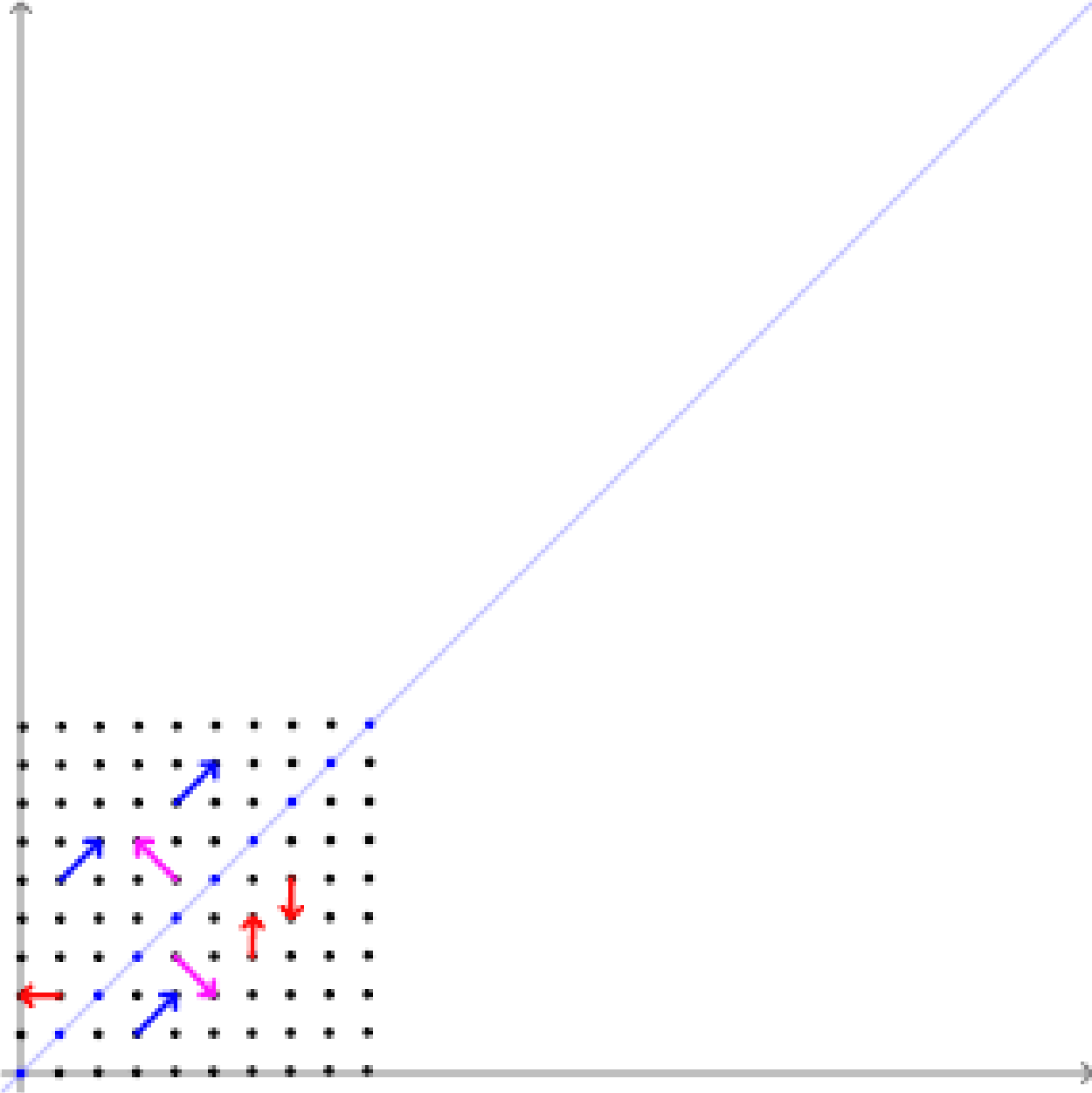
- ✓ يهتم الجبر الخطي بدراسة التحويلات الخطية، والتي تمثلها مصفوفات مؤثرة على متجهات
- ✓ تعد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية خواص المصفوفة
- ✓ تؤثر مصفوفة على متجه بتغيير كلاً من قيمته واتجاهه. لكن يمكن أن تؤثر المصفوفة على بعض المتجهات بتغيير قيمها مع الإبقاء على اتجاهاتها دون تغيير
- ✓ تمثل هذه المتجهات متجهات ذاتية للمصفوفة
- ✓ تؤثر مصفوفة على متجه ذاتي بضرب قيمته بعامل معين، يمثل هذا العامل القيمة الذاتية المصاحبة لذلك المتجه الذاتي

4- القيم الذاتية (Eigenvalues) والمتجهات الذاتية (Eigenvectors)



المتجه الذاتي: هو متجه لا يتغير اتجاهه عند تطبيق مصفوفة خطية عليه، بل يتغير حجمه فقط.

القيمة الذاتية: هي العدد λ الذي يُشير إلى مقدار التمدد أو الانكماش الذي يحدث للمتجه الذاتي عند تطبيق المصفوفة عليه.



5- حساب القيم الذاتية (Eigenvalues)

القيم الذاتية: إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$. فإن المتجه الغير صفري U يكون متجها ذاتيا لـ A إذا وجد عدد λ حيث:

$$AU = \lambda U$$

حيث:

• U الشعاع الذاتي

• λ القيمة الذاتية للمصفوفة A والمرتبطة بالشعاع U

لإيجاد القيمة الذاتية للمصفوفة A نستخدم العلاقة التالية: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$|A - \lambda I| = 0$$

5- حساب القيم الذاتية (Eigenvalues)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

مثال ✓

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(1)(2) = 1$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2(1)} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2(1)} = 2$$

6- حساب المتجهات الذاتية (Eigenvectors)

المتجهات (الأشعة) الذاتية: إن الأشعة الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيم الذاتية هي الأشعة الذاتية التي تحقق:

$$(A - \lambda I)U = 0$$

بالاستعانة بالمثل السابق ولايجاد الأشعة الذاتية نأخذ كل قيمة ذاتية على حدة

• عندما نأخذ $\lambda = 2$

$$(A - \lambda I)U = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6- حساب المتجهات الذاتية (Eigenvectors)

$$(A - \lambda I)U = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ -1 & 0-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

6- حساب المتجهات الذاتية (Eigenvectors)

وهما عبارة عن معادلة واحدة نأخذ أحدهما نجد:

$$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

وبإعطاء x_2 أية قيمة كيفية . يمكننا أن نحصل من المعادلة الأخيرة على ما لانهاية من الحلول المقبولة (الشعة الذاتية) ويكون لها نفس الاتجاه

$$U = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in R^*$$

وحتى نحدد أحد الحلول الخاصة نضع كيفيا $x_2 = 1$ فنحصل على:

$$U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$