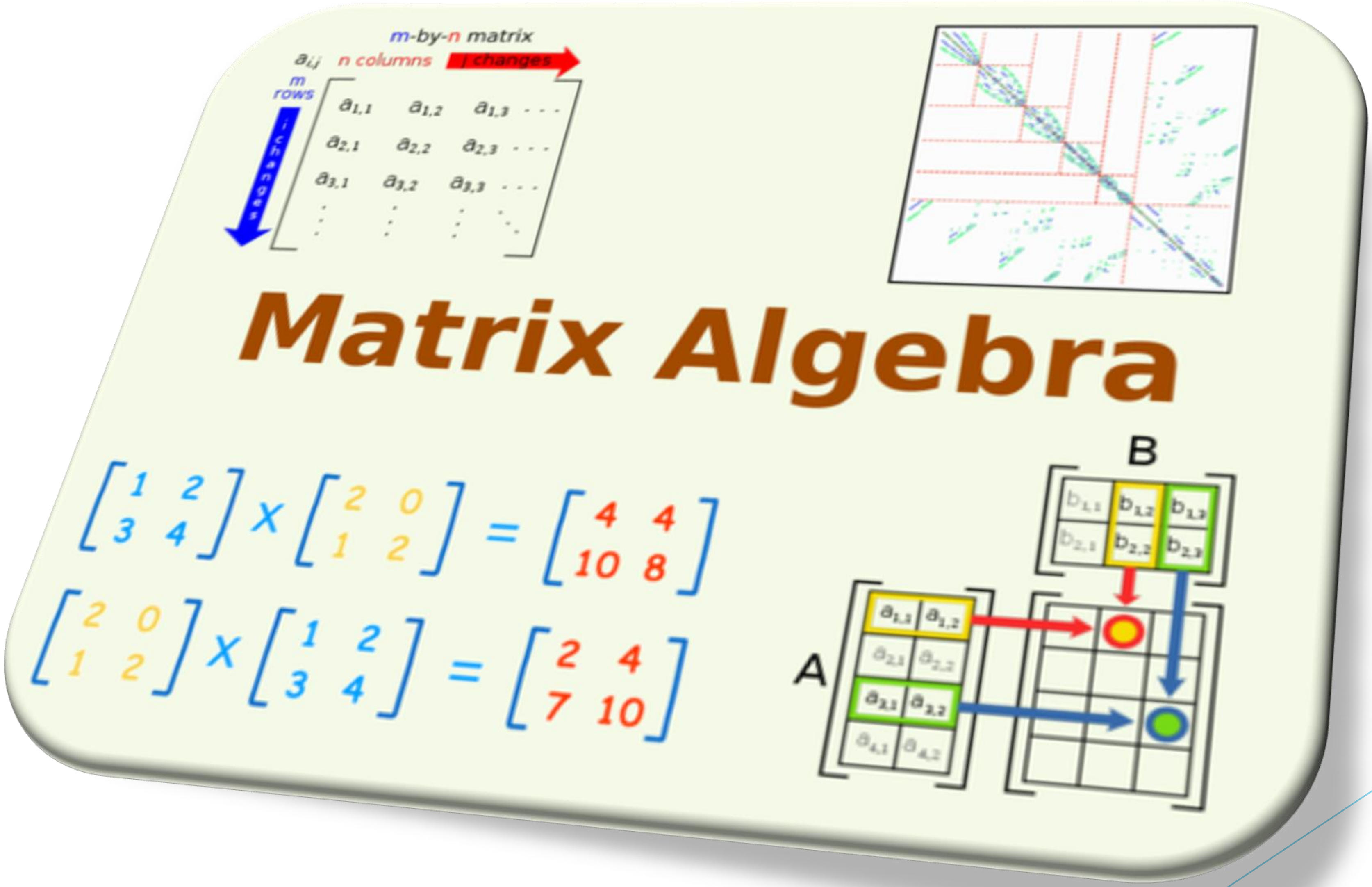

بسم الله الرحمن الرحيم

المحور الثاني: جبر المصفوفات



الهدف من المحور:

- ✓ التعرف على المصفوفات
- ✓ التعرف على أنواع المصفوفات
- ✓ العمليات الحسابية على المصفوفات وخصائصها
- ✓ التعرف على منقول، محدد، أثر ومقلوب (معكوس) مصفوفة

1- تعريف المصفوفة

- ✓ المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد المنظمة في صفوف وأعمدة تحتوي عناصر أو معاملات تكتب داخل قوسين. وتعرف بابعادها التي تمثل عدد الصفوف والأعمدة

- ✓ يرمز لها بالرمز Amxn

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2- أنواع المصفوفات

1) المصفوفة المربعة:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2) المصفوفة السطرية:

$$A_{1X3} = (5 \quad 3 \quad 7)$$

6) المصفوفة العمودية:

$$A_{3\times 1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2- أنواع المصفوفات

1) المصفوفة القطرية:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) مصفوفة الوحدة:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) المصفوفة الصفرية (المعدومة):

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2- أنواع المصفوفات

1) المصفوفة المثلثية العلوية:

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2) المصفوفة المثلثية السفلية:

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ 9 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

6) المصفوفة المتناظرة (متماثلة):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

3- العمليات الحسابية على المصفوفات

1) جمع المصفوفات:

مثال:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 17 & -9 \end{pmatrix}$$

خصائص:

$A+B = B+A$

$A+(B+C) = (A+B)+C$

$A+O = A$

3- العمليات الحسابية على المصفوفات

2) طرح المصفوفات:

مثال: إذا كانت لدينا:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; B_{3\times3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = ?$$

3- العمليات الحسابية على المصفوفات

3) جداء (ضرب) المصفوفات:

مثال: لدينا المصفوفتين A وB:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+3\cdot3 & 2\cdot4+1\cdot6+3\cdot8 \\ 4\cdot1+6\cdot2+5\cdot3 & 4\cdot4+6\cdot6+5\cdot8 \\ 7\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 7\cdot4+2\cdot6+3\cdot8 \\ 1\cdot1+3\cdot2+2\cdot3 & 1\cdot4+3\cdot6+2\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 38 \\ 31 & 92 \\ 20 & 64 \\ 13 & 38 \end{pmatrix}.$$

3- العمليات الحسابية على المصفوفات

1) جداء (ضرب) مصفوفة بعدد:

ليكن لدينا المصفوفة A والعدد λ :

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ضرب العدد λ في جميع عناصر المصفوفة:

$$\lambda \times A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

4- منقول مصفوفة Transposition

- ✓ نتحصل عليها بقلب الصفوف إلى أعمدة والعكس بالعكس
- ✓ نرمزلها بالرمز A^t
- ✓ مثال (1):

$$A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t_{2\times2}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

- ✓ مثال (2):

$$A_{3\times2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow A^t_{3\times2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

5- أثر مصفوفة Trace of matrix

- ✓ هو مجموع عناصرها الواقعة على القطر الرئيسي

$$trace\ (A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- ✓ مثال:

$$A_{4\times4} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 1 & 8 & \boxed{2} & 0 \\ 2 & 6 & 7 & \boxed{4} \end{pmatrix} \Rightarrow trace(A) = 1+3+2+4 = 10$$

6- المحددات Determinant

- ✓ لكل مصفوفة مربعة A يوجد رقم (ثابت) معروف باسم محدد المصفوفة
- ✓ يرمز له بـ det A أو يرمز له بالرمز $|A|$
- ✓ عملية ايجاد قيمة المحدد تعرف باسم حساب أو فك المحدد

6-1 حساب قيمة محدد مصفوفة ذات أبعاد 2X2 :

جداء عناصر القطر الرئيسي مع طرحها من جداء عناصر القطر الآخر للمصفوفة

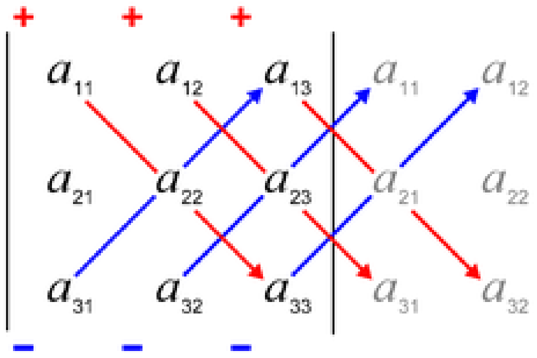
- ✓ مثال:

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |A_{2\times2}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 1\times4 - 2\times3 = -2$$

6- المحددات Determinant

2-6حساب قيمة محدد مصفوفة ذات أبعاد 3X3 :

الطريقة الشعاعية (طريقة ساروس Sarrus Method):



✓ مثال: لتكن لدينا

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} \\ \color{red}{4} & \color{red}{5} \\ \color{red}{7} & \color{red}{8} \end{matrix} = (1*5*9) + (2*6*7) + (3*4*8) - (7*5*3) - (8*6*1) - (9*4*2) = 0$$

6- المحددات Determinant

6-2حساب قيمة محدد مصفوفة

طريقة لابلاس (توسيع المحدد):

إذا كانت Aمصفوفة من الرتبة nxn، فإن محددها عند التوسع حسب الصف يُحسب كالتالي:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} . \det(M_{ij})$$

✓ مثال: لتكن لدينا $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ باستخدام قاعدة لابلاس عند التوسع حسب الصف الأول:

$$\det(A) = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1.(-3) - 2.(-6) + 3.(-3) = 0$$

7- المصفوفة المرافقة Adjugate Matrix

إذا كانت Aمصفوفة مربعة من الرتبة n×n، فإن المصفوفة المرافقة "Adj (A) " هي منقول مصفوفة العوامل المساعدة (Cofactor Matrix) **"Cof (A)"** (مصفوفة المرافقات الجبرية). أي:

$$Adj(A) = (Cof(A))^T$$

نحسب المرافق الجبري لكل عنصر aij باستخدام الصيغة: $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow cof(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Adjugate Matrix المصفوفة المرافقة -7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow cof(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = (Cof(A))^T \rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8- المصفوفة العكسية Inverse Matrix

هي مصفوفة إذا ضُربت في المصفوفة الأصلية تعطي مصفوفة الوحدة (Identity Matrix).
فإذا كانت A مصفوفة فإن معكوسها يرمز له بالرمز A^{-1}وتحقق العلاقة التالية:

$$A.A^{(-1)} = A^{(-1)}.A = I$$

يتم حساب معكوس المصفوفة باستخدام الصيغة التالية:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

8- المصفوفة العكسية Inverse Matrix

مثال: لنحسب المصفوفة العكسية للمصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&0&2\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}3&1&1\\0&0&2\\1&2&2\end{vmatrix}=-10$$

$$Cof\,(A)=\begin{pmatrix}-4&2&0\\0&5&-5\\2&-6&0\end{pmatrix}\to(Cof\,(A))^{T}=Adj(A)=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&5&-6\\0&-6&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix}-4&0&2\\2&5&-6\\0&-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4&0&-0.2\\-0.2&-0.5&0.6\\0&0.5&0\end{pmatrix}$$