التطبيقات الخطية

تعريـــف التطبيق الخطي:

ليكن E و F فضاءين شعاعين على $\mathbb{R}$ ، نقول أن التطبيق f معرف من E نحو F خطي إذا تحقق ما يلي :

$$1\ /\ \forall(x,y)\,\epsilon\, E^2, f(x+y) = f\ (x) + \ f(y)$$

$$2\ /\ \forall(\lambda, x)\epsilon\, \mathbb{R}\ \times E, f(\lambda. x) =\ \lambda. f(x)$$

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية المعرفة من E نحو F بـ : $\mathcal{L}\,(\,E\,,f)$

مثـــــال :

ليكن :

$$f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto\ f(x_1, x_2, x_3) =\ (x_1 - x_2, 2x_3)$$

لنثبت أن: f تطبيق خطي

$$\forall\ x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2\,, y_3)\,\epsilon\,\mathbb{R}^3, \forall\lambda\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$f(x+y) = \big((x_1+y_1) - (x_2+y_2), 2(x_3+y_3)\big)$$

$$= \big((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2), 2x_3\ +\ 2y_3\big)$$

$$= (x_1 - x_2, 2x_3) + (y_1 - y_2 , 2y_3)$$

$$= f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda\, x) = (\lambda x_1 - \lambda x_2, 2\lambda x_3)$$

$$= \big(\lambda(x_1 - x_2), \lambda\,(2x_3)\big) = \lambda\, f(x)$$

إذن f هو عبارة عن تطبيق خطـي :

ملاحظـــة1

إذا كان $f\epsilon\mathcal{L}(E,F)$ اذن $f(0_E) = 0_F$

مثـــــال :

ليكن:

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x\,,y) \longmapsto f(x\,,y) = (4x+1, 5\,y)$$

لدينا: $f((0,0)) = (1\,,0) \neq (0\,,0)$

إذن f ليس تطبيقا خطيا .

ملاحظـــة 2

ليكن : $f\epsilon\ \mathcal{L}(E\,,F)$ و $n\ \epsilon\ \mathbb{N}^*$

$$\forall\ (\lambda_1,\lambda_2\ ,\dots,\lambda_n)\ \epsilon\ \mathbb{R}^n\ ,\forall\ (x_1,x_2,\dots\dots\dots.,x_n)\ \ \epsilon\ E^n$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ f(x_i)$$

أو بطريقة ثانية نعرف التطبيق الخطي كما يلي :

تعريـــف

ليكن $f \epsilon \mathcal{L}(E, F)$ ، نقول عن f انه تطبيق خطي إذا تحقق مايلي:

$$\forall \ (\lambda, \mu) \ \epsilon \ , \mathbb{R}^2 \ , \forall \ (x \ , y) \ \epsilon \ E^2 \ : f(\lambda x + \ \mu y) = \ \lambda \, . f(x) + \ \mu f \ (y)$$

2 _ صورة التطبيق الخطي الغامر

تذكير:

نقول عن f تطبيق معرف من E نحو F انه غامر ذا تحقق ما يلي :

$$f \text{ غامر } \Leftrightarrow \forall \ y \ \epsilon \ F \ : \ \exists \ x \ \epsilon \ E \ : y = f \ (x)$$

تعريـــف :

ليكن $f \ \epsilon \ \mathcal{L}(E \ , F)$, تعرف صورة f ويرمز لها بالرمز $Im \ (f)$ مجموعة صور كل الأشعة x في E .

$$Im(f) = \{f(x), x \ \epsilon \ E\}$$

$$= \{\forall \ y \ \epsilon \ \ F, \exists x \ \epsilon \ E \ : y = f \ (x)\}$$

ملاحظة1:

إذا كان $f \ \epsilon \ \mathcal{L}(E \ , F)$ *إذن* $Im \ (f)$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من f

ملاحظة 2 :

ليكن $f\epsilon\,\mathcal{L}\,(E,F)$, نقول أن f غامر اذا و فقط اذا تحقق ما يلي: $Im(f) = F$

مثـــال 1

ليكن

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1,x_2\,,x_3) \longmapsto f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, 2x_3)$$

f هو عبارة عن تطبيق خطي معرف من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^2$ لنحسب $Im(f)$

$$Im(f) = \{(y_1,y_2)\,\epsilon\mathbb{R}^2\ /\ \exists(x_1,x_2,x_3)\,\epsilon\,\mathbb{R}^3: (y_1,y_2) = f(x_1,x_2,x_3)\}$$

$$(y_1,y_2) = f\left(y_1, 0, \frac{1}{2}y_2\right)$$

اذن: $(y_1,y_2)\epsilon\, Im\, f$

ومنه $Im(f) = \mathbb{R}^2$

مثـــال 2 :

ليكن :

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x - 4y, -x + 2y)$$

f هو عبارة عن تطبيق خطي .

ولدينا : $Im(f) = [\{(-2,1)\}]$

و بالتالي $Im(f) \neq \mathbb{R}^2$ اذن f ليس غامرا

3 – نواة تطبيق خطي ، التطبيق الخطي المتباين:

تذكيــــر:

ليكن f تطبيقا معرفا من E نحو F ،نقول ان f متباين اذا تحقق ما يلي :

$$f \text{ متباين } \Leftrightarrow [\forall\ (x,y) \in E^2 : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)]$$

أو

$$f \text{ متباين } \Leftrightarrow [\forall (x,y) \in E^2 : f(x) = f(y) \implies x = y]$$

تعريــــف:

ليكن f تطبيقا خطيا معرفا من E نحو F نعرف نواة f ، و نرمز لها بالرمز $ker(f)$ ، مجموعة العناصر من E التي صورها معدومة أي :

$$ker(f) = \{x \in E\ ,\ \ f(x) = 0_F\}$$

ملاحظة 1 :

إذا كان f تطبيقا خطيا معرفا من E نحو F إذن $ker(f)$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من E

ملاحظة 2 :

نقول عن f تطبيق خطي معرف من E نحو F ، انه متباين اذا و فقط إذا كان:

$$ker(f) = \{0_E\}$$

مثـــــال 1 :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_3)$$

برهنا سابقا بأن f هو عبارة عن تطبيق خطي غامر

هل f تطبيق خطي متباين؟

لدينا إذن :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0\,,0) \Leftrightarrow x_1 = x_2, x_3 = 0$$

إذن :

$$ker(f) = [\{(1\,,1\,,0)\}]$$

ومنه f ليس متباين

4- تركيب تطبيقين خطيين

تذكيـــر

ليكن G و E, F فضاءات شعاعية بحيث $g(F, G)$ و $f \in \mathcal{L}\,(E\,,F)$

التطبيق gof معرف كما يلي :

إذا كان تطبيق f تطبيق خطي معرف من Eنحو F و $Im(f)$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من F مولدة بصورة اساس من E، تلاحظ ان $Im(f)$ تملك جملة مولدة منتهية إذن هي عبارة عن فضاء شعاعي منتهي البعد .

تعريف :

ليكن fتطبيق معرف من E نحو F، تعرف رتبة التطبيق f ونرمز لها بالرمز $rang(f)$

هي بعد الفضاء $Im(f)$ أي $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{dimIm}\ (f)$

ملاحظة : (تمييز التطبيقات الخطية المتباينة والغامرة)

ليكن F و E فضائين شعاعين منتهيي البعد ، لنفرض ان $(dim\ E\ =\ n)$ و $(dimF = p)$

وليكن f تطبيق معرف من E نحو Fلدينا :

1/ fمتباين $\Leftrightarrow$ $rang\ (f)\ =\ n$

2/ f غامر $\Leftrightarrow$ $rang\ (f)\ = p$

نظرية البعد

نظرية

ليكن: $f \in \mathcal{L}\ (E,F)$ اين E فضاء ذو بعد منتهي ، يساوي $n > 0$ لدينا إذن :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f))$$

مثال :