

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Position du problème. Equation du mouvement du corps pour un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Equation de la chaînette

Supposons que la fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. Examinant ce phénomène, il est souvent impossible d'établir directement le caractère de la dépendance entre y et x , mais l'on peut établir une dépendance entre les quantités x , y et les dérivées de y par rapport à x : y' , y'' , ..., $y^{(n)}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire une équation différentielle.

On demande de déduire de la relation entre x , y et les dérivées la relation directe entre y et x , c'est-à-dire de trouver $y = f(x)$, ce qu'on appelle encore intégrer une équation différentielle.

Considérons deux exemples.

Exemple 1. On laisse tomber un corps de masse m d'une certaine hauteur. On demande d'établir la loi de variation de la vitesse de chute v si le corps éprouve une résistance de freinage de la part de l'air proportionnelle à la vitesse (le coefficient de proportionnalité étant k), c'est-à-dire de trouver $v = f(t)$.

Solution. En vertu de la seconde loi de Newton

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps en mouvement (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) et F la force agissant sur le corps dans le sens du mouvement. Cette force est constituée de deux forces: de la force de pesanteur mg et de la résistance de l'air $-kv$ (on prend le signe moins car cette force est opposée à la vitesse). Ainsi

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

Nous avons une relation entre la fonction inconnue v et sa dérivée $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire une équation différentielle portant sur la fonction inconnue v . (C'est l'équation du mouvement de certains types de parachutes.) Résoudre cette équation différentielle, c'est chercher une fonction $v = f(t)$ la vérifiant identiquement. Il existe une infinité de telles solutions. Le lecteur vérifiera facilement que toute fonction de la forme

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

vérifie l'équation (1) quelle que soit la constante C . Mais laquelle de ces fonctions donne la relation cherchée entre v et t ? Pour la trouver, imposons une condition

supplémentaire: une vitesse initiale v_0 (qui, notamment, peut être nulle) a été communiquée au corps au départ; nous supposons que cette vitesse initiale est connue. Mais alors la fonction cherchée $v = f(t)$ doit être telle que l'on ait pour $t = 0$ (au début du mouvement) $v = v_0$. Substituant $t = 0$, $v = v_0$ dans la formule (2), on trouve:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k},$$

d'où

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Ainsi, la constante C est déterminée. La dépendance entre v et t s'exprime donc:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \quad (2')$$

Il découle de cette formule que pour t suffisamment grands la vitesse v dépend peu de v_0 .

Notons que si $k = 0$ (c'est-à-dire si la résistance de l'air est nulle ou négligeable), on retrouve un résultat connu en physique *):

$$v = v_0 + gt. \quad (2'')$$

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle (1) et à la condition initiale: $v = v_0$ pour $t = 0$.

Exemple 2. Un fil flexible homogène est suspendu par ses deux extrémités. Trouver l'équation de la courbe d'équilibre du fil soumis à son propre poids (telle est la position que prennent les fils, les chaînes, les câbles suspendus).

Solution. Soient $M_0(0, b)$ le point le plus bas sur le fil, M un point arbitraire sur ce fil (fig. 249). Considérons la portion de fil M_0M . Cette portion est en équilibre sous l'action de trois forces:

- 1) la tension T , agissant tangentiellement au point M et formant avec l'axe Ox l'angle φ ;
 - 2) la tension H au point M_0 , agissant horizontalement;
 - 3) le poids γs dirigé verticalement vers le bas, où s est la longueur de l'arc M_0M , γ le poids spécifique du fil.
- Décomposant la tension T en ses composantes horizontale et verticale, on obtient les équations d'équilibre:

$$T \cos \varphi = H,$$

$$T \sin \varphi = \gamma s.$$

*) On peut déduire la formule (2'') à partir de (2') par le passage à la limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

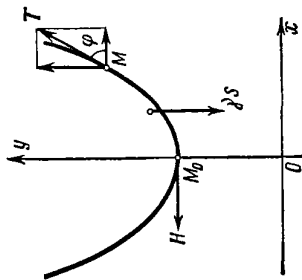


Fig. 249

On obtient en divisant membre à membre ces deux égalités

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \quad (3)$$

Supposons maintenant que l'on puisse écrire l'équation de la courbe cherchée sous la forme $y = f(x)$. Ici, $f(x)$ est une fonction inconnue qu'il faut chercher. Remarquons que

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \quad (4)$$

où l'on a posé $\frac{H}{\gamma} = a$.

Dérivons les deux membres de l'égalité (4) par rapport à x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (5)$$

Mais on sait que (voir § 1, ch. VI)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Substituant cette expression dans l'équation (5), on obtient l'équation différentielle de la courbe cherchée sous la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

Elle relie les dérivées première et seconde de la fonction inconnue y .

Sans nous arrêter sur les méthodes de résolution des équations, indiquons que toute fonction de la forme

$$y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) + C_2 \quad (7)$$

satisfait à l'équation (6) quelles que soient les constantes C_1 et C_2 . Il est facile de s'en convaincre en substituant les dérivées première et seconde de la fonction mentionnée dans l'équation (6). Indiquons encore sans le démontrer qu'on a là toutes les solutions (pour divers C_1 et C_2) de l'équation (6). Cela sera démontré au § 18.

Les graphiques des fonctions ainsi obtenues sont appelés des *chaînettes*. Voyons maintenant comment il convient de choisir les constantes C_1 et C_2 pour obtenir précisément la chaînette dont le point inférieur a pour coordonnées (0, b). Etant donné que pour $x = 0$ on a le point le plus bas de la chaînette, la tangente est horizontale en ce point, c.-à-d. $\frac{dy}{dx} = 0$. En outre, par hypothèse, l'ordonnée est égale à b en ce point, c.-à-d. $y = b$. On déduit de l'équation (7)

$$y' = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} + C_1 \right).$$

Substituant dans cette dernière $x = 0$, on obtient $0 = \operatorname{sh} C_1$. Donc $C_1 = 0$. Si b est l'ordonnée de M_0 , on a alors $y = b$ pour $x = 0$. On déduit de

l'équation (7) en posant $x = 0$ et $C_1 = 0$, $b = \frac{a}{2}(1 + 1) + C_2$, d'où $C_2 = b - a$. On trouve en définitive:

$$y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right) + b - a.$$

L'équation (7) se simplifie beaucoup si l'on prend l'ordonnée du point M_0 égale à a. L'équation de la chaînette devient alors:

$$y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right).$$

§ 2. Définitions

Définition 1. On appelle *équation différentielle* une équation établissant une relation entre la variable indépendante x , la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suit:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ou

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Si $y = f(x)$ est fonction d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle est dite *ordinaire*. Nous nous bornerons à l'étude des équations différentielles ordinaires *).

Définition 2. On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Ainsi,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

est une équation du premier ordre.

*) En même temps que les équations différentielles ordinaires, on étudie également en analyse mathématique des équations aux dérivées partielles. On appelle *équation aux dérivées partielles* une relation entre la fonction inconnue z , dépendant de deux ou de plusieurs variables $x, y, \dots$, ces variables elles-mêmes et les dérivées partielles de z : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc.

On a comme exemple d'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue $z(x, y)$ l'équation

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $z = x^2 y^2$ (ainsi que quantité d'autres fonctions) vérifie cette équation.

Dans ce cours les équations aux dérivées partielles sont étudiées dans le chapitre XVIII (t. II).

L'équation

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

est une équation du second ordre, etc.

L'équation considérée dans l'exemple 1 du paragraphe précédent est une équation du premier ordre et celle de l'exemple 2 du second ordre.

D é f i n i t i o n 3. On appelle *solution* ou *intégrale* d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

E x e m p l e 1. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Les fonctions $y = \sin x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \sin x - \cos x$ et, plus généralement, toute fonction de la forme $y = C_1 \sin x$, $y = C_2 \cos x$ ou

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

sont des solutions de l'équation donnée quelles que soient les constantes C_1 et C_2 ; il est facile de s'en assurer en substituant ces fonctions dans l'équation.

E x e m p l e 2. Considérons l'équation

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Ses solutions sont des fonctions de la forme

$$y = x^2 + Cx,$$

où C est une constante arbitraire. En effet, on trouve en dérivant la fonction $y = x^2 + Cx$:

$$y' = 2x + C.$$

Substituant les expressions de y et y' dans l'équation donnée, on obtient l'identité

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Chacune des équations traitées dans les exemples 1 et 2 possède une infinité de solutions.

§ 3. Equations différentielles du premier ordre (notions générales)

1. Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Lorsque cette équation est résoluble en y' , on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y). \quad (1')$$

On dit alors que l'équation différentielle est résoluble par rapport à la dérivée. On a pour une telle équation le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution.

2*

T h é o r è m e. Si dans l'équation

$$y' = f(x, y)$$

la fonction $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à y sont continues dans un certain domaine D du plan Oxy et si (x_0, y_0) est un point de ce domaine, il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ satisfaisant à la condition $y = y_0$ lorsque $x = x_0$.

Ce théorème sera démontré au § 27, chapitre XVI. Géométriquement, le théorème signifie qu'il existe une fonction $y = \varphi(x)$ et une seule dont la courbe représentative passe par le point (x_0, y_0) .

Il résulte de ce théorème que l'équation (1') possède une infinité de solutions différentes [par exemple, la solution passant par le point (x_0, y_0) ; la solution passant par le point (x_0, y_1) ; celle passant par le point (x_0, y_2) , etc., pourvu que ces points se trouvent dans le domaine D].

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$ s'appelle la *condition initiale*. Souvent on l'écrit sous la forme

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

D é f i n i t i o n 1. On appelle *solution générale* d'une équation du premier ordre une fonction

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

dépendant d'une constante arbitraire C et satisfaisant aux conditions suivantes:

a) elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante C ;

b) quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$, c.-à-d. $(y)|_{x=x_0} = y_0$, on peut trouver une valeur $C = C_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, C_0)$ vérifie la condition initiale donnée. On suppose alors que les valeurs x_0 et y_0 appartiennent au domaine de variation des variables x et y dans lequel sont observées les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.

2. Cherchant la solution générale d'une équation différentielle, nous sommes souvent conduits à une relation de la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (2')$$

non résolue en y . On obtient la solution générale en résolvant cette relation par rapport à y . Toutefois, il n'est pas toujours possible d'exprimer y à partir de (2') au moyen de fonctions élémentaires; on conserve alors la solution générale sous forme implicite. Une égalité de la forme $\Phi(x, y, C) = 0$, donnant implicitement la solution générale, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle.

D é f i n i t i o n 2. On appelle *solution particulière* toute fonction $y = \varphi(x, C_0)$ déduite de la solution générale $y = \varphi(x, C)$, en posant dans cette dernière $C = C_0$. La relation $\Phi(x, y, C_0) = 0$ est dite alors une *intégrale particulière* de l'équation.

E x e m p l e 1. L'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

a pour solution générale une famille de fonctions $y = \frac{C}{x}$; on peut le vérifier par une simple substitution dans l'équation.

Cherchons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales:

$y_0 = 1$ lorsque $x_0 = 2$. Substituant ces valeurs dans la formule $y = \frac{C}{x}$, on

obtient $1 = \frac{C}{2}$ ou $C = 2$. La solution particulière cherchée est donc la fonction

$$y = \frac{2}{x}.$$

Du point de vue géométrique, l'intégrale générale représente une famille de courbes planes dépendant d'un paramètre C . Ces courbes sont appelées les courbes intégrales de l'équation différentielle donnée. Une intégrale particulière est représentée par une courbe de cette famille passant par un point donné du plan.

Ainsi, dans l'exemple considéré, l'intégrale générale est représentée géométriquement par la famille d'hyperboles $y = \frac{C}{x}$ et l'intégrale particulière, définie par la condition initiale donnée, par l'hyperbole passant par le point $M_0(2, 1)$. On a représenté sur la figure 250 les courbes de la famille correspondant aux diverses valeurs: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Pour faciliter les raisonnements, nous appellerons par la suite solution de l'équation non seulement la fonction $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaisant à l'équation proposée, mais encore la courbe intégrale correspondante. Ceci étant, on parlera, par exemple, de la solution passant par le point (x_0, y_0) .

R e m a r q u e. L'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ n'admet pas de solution passant par un point de l'axe Oy (fig. 250). Ceci est dû à ce que le second membre de l'équation est indéterminé pour $x = 0$ et, par conséquent, n'est pas continu.

R é s o u d r e ou **i n t é g r e r** une équation différentielle consiste à:

a) chercher sa solution générale ou son intégrale générale (si les conditions initiales ne sont pas données) ou

b) chercher la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).

3. Donnons l'interprétation géométrique des équations différentielles du premier ordre.

Soit donnée une équation différentielle résolue par rapport à la dérivée:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1')$$

et soit $y = \varphi(x, C)$ sa solution générale. Cette solution générale définit la famille de courbes intégrales dans le plan Oxy .

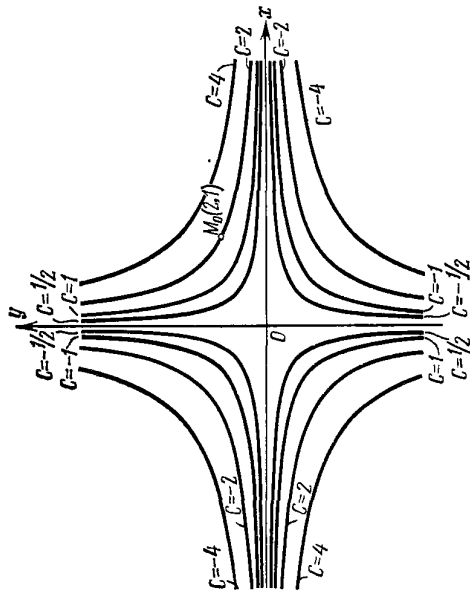


Fig. 250

L'équation (1') détermine pour tout point M , de coordonnées x et y , une valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, c.-à-d. le coefficient angulaire de la tangente à la courbe intégrale passant par ce point. Par conséquent, l'équation différentielle (1') définit un ensemble de directions ou, comme on dit, un *champ de directions* dans le plan Oxy .

Du point de vue géométrique, l'intégration d'une équation différentielle consiste à trouver les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec la direction du champ en ce point.

On appelle *isocline* de l'équation différentielle (1) le lieu géométrique des points vérifiant la relation $\frac{dy}{dx} = C = \text{const.}$

A chaque valeur de C correspond une isocline. Il est évident que pour la valeur C l'isocline aura pour équation $f(x, y) = C$.

La famille des isoclines construite, nous pouvons représenter approximativement la famille des courbes intégrales. Les isoclines permettent donc de définir l'allure des courbes intégrales dans le plan.

La fig. 251 représente le champ de directions déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Les isoclines de cette équation sont

$$-\frac{y}{x} = C, \text{ ou } y = -Cx.$$

C'est le faisceau de droites que l'on voit sur la même figure.

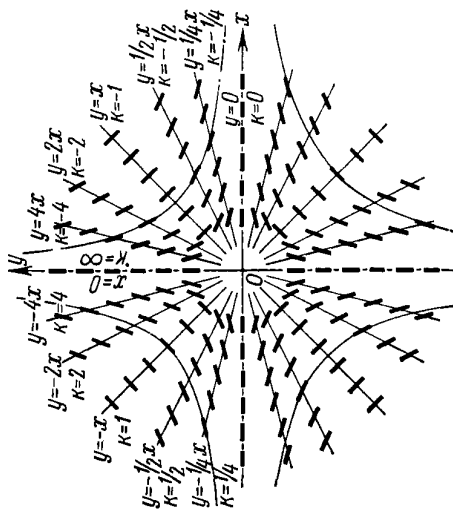


Fig. 251

4. Considérons ensuite le problème suivant.
Soit donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre C :

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

telle que par tout point du plan (ou d'un domaine dans le plan) il ne passe qu'une courbe de cette famille.

On demande quelle est l'équation différentielle admettant cette famille de fonctions pour intégrale générale.

On trouve en dérivant la relation (2) par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \quad (3)$$

Étant donné qu'il ne passe qu'une seule courbe de la famille par tout point du plan, chaque couple de valeurs x, y définit une seule valeur C dans l'équation (2). Substituant cette valeur C dans la relation (3), on trouve $\frac{dy}{dx}$ en tant que fonction de x et de y . On obtient ainsi une équation différentielle qui est vérifiée par toute fonction de la famille (2).

Il en résulte que pour établir le lien entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, c.-à-d. pour

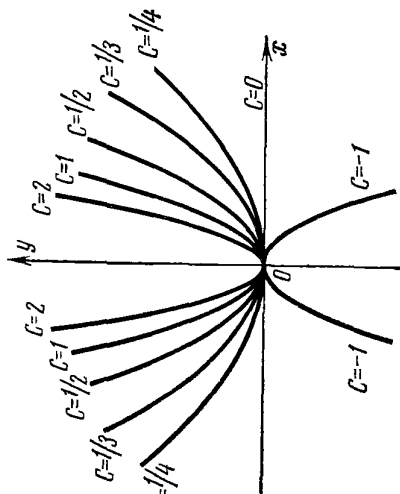


Fig. 252

écrire l'équation différentielle admettant pour intégrale générale la formule (2), il faut éliminer C des expressions (2) et (3).

Exemple 2. Trouver l'équation différentielle de la famille de paraboles $y = Cx^2$ (fig. 252).

On trouve en dérivant par rapport à x l'équation de la famille

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Substituant $C = \frac{y}{x^2}$ définie par l'équation de la famille, on obtient l'équation différentielle de la famille donnée:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Cette équation a un sens lorsque $x \neq 0$, c.-à-d. dans tout domaine ne contenant pas l'axe Oy .

§ 4. Equations à variables séparées et séparables.

Problème de la désintégration du radium

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad (1)$$

où le second membre est le produit d'une fonction dépendant seulement de x par une fonction dépendant seulement de y . Transformons-la comme suit (en supposant que $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \quad (1')$$

Supposant que la fonction y de x soit connue, on peut considérer (1') comme l'égalité de deux différentielles, et leurs primitives se distingueront par une constante. Intégrant le premier membre par rapport à y et le second par rapport à x , on obtient:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C. \quad (1'')$$

Nous avons obtenu une relation entre la solution y , la variable indépendante x et la constante arbitraire C , c.-à-d. qu'on a l'intégrale générale de l'équation (1).

1. L'équation différentielle (1')

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (2)$$

est appelée équation à variables séparées. Comme on vient de le démontrer, son intégrale générale est

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

Exemple 1. Soit l'équation à variables séparées

$$x dx + y dy = 0.$$

Son intégrale générale est

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Le premier membre n'étant pas négatif, il en est de même du second. Désignons $2C_1$ par C^2 , on aura:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

C'est l'équation d'une famille de cercles concentriques (fig. 253) centrés à l'origine des coordonnées et de rayon C .

2. Une équation de la forme

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0 \quad (3)$$

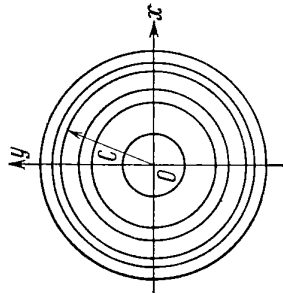


Fig. 253

est appelée une équation à variables séparables. Elle peut être ramenée *) à une équation à variables séparées en divisant les deux membres par l'expression $N_1(y) M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x) N_1(y)}{N_1(y) M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) N_2(y)}{N_1(y) M_2(x)} dy = 0$$

ou

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

qui est une équation de la forme (2).

Exemple 2. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Séparons les variables:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

donc

$$\text{Log } |y| = -\text{Log } |x| + \text{Log } |C| \text{ **} \text{ ou } \text{Log } |y| = \text{Log } \left| \frac{C}{x} \right|;$$

d'où l'en déduit la solution générale $y = \frac{C}{x}$.

Exemple 3. Soit l'équation

$$(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0.$$

Séparons les variables:

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0;$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0.$$

On obtient en intégrant:

$$\text{Log } |x| + x + \text{Log } |y| - y = C \text{ ou } \text{Log } |xy| + x - y = C$$

qui est l'intégrale générale de l'équation proposée.

Exemple 4. La vitesse de désintégration du radium est directement proportionnelle à sa masse à l'instant considéré. Déterminer la loi de variation de la masse du radium en fonction du temps, sachant qu'à l'instant $t = 0$ la masse était m_0 .

*) Ces transformations sont légitimes seulement dans un domaine où ni $N_1(y)$ ni $M_2(x)$ ne s'annulent.

**) Ayant en vue les transformations ultérieures, nous avons désigné la constante arbitraire par $\text{Log } |C|$, ce qui est légitime, car $\text{Log } |C|$ (lorsque $C \neq 0$) peut prendre n'importe quelle valeur de $-\infty$ à $+\infty$.

On détermine la vitesse de désintégration comme suit. Soient m la masse à l'instant t et $m + \Delta m$ la masse à l'instant $t + \Delta t$. La masse désintégrée dans le temps Δt est Δm . Le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne de la désintégration. La limite de ce rapport lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

est la *vitesse de désintégration* à l'instant t .
D'après les conditions du problème

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (4)$$

où k est un coefficient de proportionnalité ($k > 0$). Nous avons introduit le signe moins, étant donné que la masse décroît quand le temps croît et que, par conséquent, $\frac{dm}{dt} < 0$.



Fig. 254

L'équation (4) est une équation à variables séparables. Séparons les variables:

$$\frac{dm}{m} = -k dt.$$

On obtient en intégrant :

$$\text{Log } m = -kt + \text{Log } C,$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Log } \frac{m}{C} &= -kt, \\ m &= Ce^{-kt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Étant donné que la masse du radium était m_0 à l'instant $t = 0$, C doit satisfaire à la relation

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Substituant la valeur de C dans l'égalité (5), on obtient l'expression cherchée voir fig. 254) de la masse en fonction du temps:

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (6)$$

On déduit le coefficient k des observations comme suit. Soit $\alpha\%$ la fraction de la masse initiale désintégrée dans le temps t_0 . On a donc la relation

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

d'où

$$-kt_0 = \text{Log} \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)$$

ou

$$k = -\frac{1}{t_0} \text{Log} \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right).$$

On a établi de cette manière que pour le radium $k = 0,000436$ (l'unité de temps étant l'année).

Substituant cette valeur de k dans la formule (6), on obtient

$$m = m_0 e^{-0,000436t}.$$

Trouvons la période de désintégration du radium, c.-à-d. le laps de temps pendant lequel se désintègre la moitié de la masse initiale du radium. Substi-

tuant dans cette dernière formule $\frac{m_0}{2}$ au lieu de m , on obtient l'équation définissant la période T cherchée :

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,000436T},$$

d'où

$$-0,000436T = -\text{Log } 2$$

ou

$$T = \frac{\text{Log } 2}{0,000436} = 1590 \text{ années.}$$

Remarquons que d'autres problèmes de la physique et de la chimie conduisent également à l'équation de la forme (4).

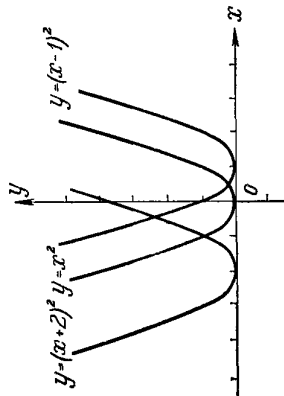


Fig. 255

Remarque 1. Supposons que la fonction $f_2(y)$ de l'équation (4) admette pour racine $y = b$, c'est-à-dire que $f_2(b) = 0$. Il est alors évident que la fonction $y = b$ est une solution de l'équation (4), ce qu'on vérifie aisément par une substitution directe dans cette équation. La solution $y = b$ n'est pas toujours donnée par la formule (4').

Sans aborder l'analyse de ce cas, notons tout simplement que sur la droite $y = b$ la condition d'unicité peut être violée.

Voyons cela sur un exemple : l'équation $y' = 2\sqrt{y}$ admet pour solution générale $y = (x + c)^2$. La solution $y = 0$, elle, ne découle pas de la solution générale. Sur la droite $y = 0$ la condition d'unicité est violée (fig. 255).

Remarque 2. L'équation différentielle à variables séparables la plus simple est

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ou} \quad dy = f(x) dx.$$

Son intégrale générale s'écrit

$$y = \int f(x) dx + C.$$

Nous nous sommes occupés de la résolution d'équations de ce type au chapitre X.

§ 5. Equations homogènes du premier ordre

Définition 1. On dit que la fonction $f(x, y)$ est une *fonction homogène de degré n* par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout λ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 1. La fonction $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ est homogène et de degré 1, car

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

Exemple 2. $f(x, y) = xy - y^2$ est une fonction homogène du second degré, car $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2(xy - y^2)$.

Exemple 3. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ est une fonction homogène de degré zéro, car $\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$, c.-à-d. que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ ou $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$.

Définition 2. L'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

est dite *homogène* par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y .

Résolution de l'équation homogène. On a par hypothèse $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Posant dans cette identité $\lambda = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

c.-à-d. qu'une fonction homogène de degré zéro dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$.

L'équation (1) s'écrit alors sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \quad (1')$$

Faisons la substitution :

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{c.-à-d.} \quad y = ux.$$

On a alors :

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Substituant cette expression de la dérivée dans l'équation (1'), on obtient

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u).$$

C'est une équation à variables séparables :

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{ou} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Substituant après intégration $\frac{y}{x}$ à u , on obtient l'intégrale de l'équation (1').

Exemple 4. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

On a dans le second membre une fonction homogène de degré zéro, donc l'équation proposée est homogène. Faisons le changement de variables $\frac{y}{x} = u$; alors

$$y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx};$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

Séparons les variables, on a :

$$\frac{(1 - u^2) du}{u^3} = \frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{dx}{x},$$

et par intégration :

$$-\frac{1}{2u^2} - \text{Log} |u| = \text{Log} |x| + \text{Log} |C| \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2u^2} = \text{Log} |uxC|.$$

Substituant $u = \frac{y}{x}$, on obtient l'intégrale générale de l'équation initiale :

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \text{Log} |Cy|.$$

Il est impossible d'exprimer ici y en fonction de x au moyen des fonctions élémentaires. Mais l'on exprime facilement x en fonction de y :

$$x = y \sqrt{-2 \text{Log} |Cy|}.$$

Remarque. L'équation

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

ne sera homogène que si $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions homogènes du même degré. Ceci résulte du fait que le rapport de deux

fonctions homogènes d'un seul et même degré est une fonction homogène de degré zéro.

Ex e m p l e 5. Les équations

$$\begin{aligned}(2x + 3y) dx + (x - 2y) dy &= 0, \\ (x^2 + y^2) dx - 2xy dy &= 0\end{aligned}$$

sont homogènes.

§ 6. Equations se ramenant aux équations homogènes

Se ramènent aux équations homogènes les équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}. \quad (1)$$

Si $c_1 = c = 0$, l'équation (1) est évidemment homogène. Supposons maintenant que c et c_1 (ou l'un d'eux) ne soient pas nuls. Faisons le changement de variables:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k.$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \quad (2)$$

Substituant dans l'équation (2) les expressions des quantités x , y , $\frac{dy}{dx}$, on obtient:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \quad (3)$$

Choisissons h et k de manière qu'ils vérifient les équations

$$\left. \begin{aligned}ah + bk + c &= 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0,\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

c.-à-d. définissons h et k en tant que solutions du système d'équations (4). L'équation (3) devient alors homogène:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Résolvant cette équation et revenant aux anciennes variables x et y d'après les formules (2), on obtient la solution de l'équation (1). Le système (4) n'a pas de solution lorsque

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

c.-à-d. que $ab_1 = a_1b$. Mais alors $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ ou $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, et l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \quad (5)$$

La substitution

$$z = ax + by \quad (6)$$

ramène alors l'équation donnée à une équation à variables séparables.

En effet,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (7)$$

Substituant les expressions (6) et (7) dans l'équation (5), on obtient

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}$$

qui est une équation à variables séparables.

Le procédé utilisé pour intégrer l'équation (4) s'applique également à l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

où f est une fonction arbitraire continue.

Ex e m p l e 1. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Pour la ramener à une équation homogène, faisons la substitution $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$. Alors

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Résolvant le système de deux équations

$$h + k - 3 = 0; \quad h - k - 1 = 0,$$

on trouve:

$$h = 2, \quad k = 1.$$

On obtient ainsi l'équation homogène

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

qu'on résout en faisant la substitution

$$\frac{y_1}{x_1} = u;$$

on a :

$$y_1 = ux_1; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1};$$

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

et on obtient une équation à variables séparables :

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Séparons les variables :

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

On trouve en intégrant :

$$\arctg u - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1+u^2) = \operatorname{Log}|x_1| + \operatorname{Log}|C|,$$

$$\arctg u = \operatorname{Log}|Cx_1 \sqrt{1+u^2}|$$

ou

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\arctg u}.$$

Substituant dans cette dernière égalité $\frac{y_1}{x_1}$ au lieu de u , on obtient :

$$C \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\arctg \frac{y_1}{x_1}}.$$

Enfin, passant aux variables x, y , on obtient en définitive :

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\arctg \frac{y-1}{x-2}}.$$

Exemple 2. On ne peut faire la substitution $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ dans l'équation

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5},$$

car le système d'équations servant à définir h et k est incompatible (le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ des coefficients des variables étant nul).

On peut ramener cette équation à une équation à variables séparables en faisant la substitution :

$$2x + y = z.$$

On a alors $y' = z' - 2$, et l'équation devient

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

ou

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

On en déduit

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \operatorname{Log}|5x+9| = x + C.$$

Comme $z = 2x + y$, on trouve finalement la solution de l'équation donnée sous la forme

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25} \operatorname{Log}|10x+5y+9| = x + C$$

ou

$$10y - 5x + 7 \operatorname{Log}|10x+5y+9| = C_1,$$

c'est-à-d. sous forme implicite.

§ 7. Equations linéaires du premier ordre

Définition. On appelle *équation linéaire du premier ordre* une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle s'écrit

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x données (ou des constantes).

Résolution de l'équation linéaire (1). Nous allons chercher la solution de l'équation (1) sous forme de produit de deux fonctions de x :

$$y = u(x)v(x). \quad (2)$$

On pourra prendre arbitrairement l'une de ces fonctions, l'autre sera définie alors par (1).

Dérivons les deux membres de l'égalité (2), on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Substituant l'expression de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ obtenue dans l'équation (1), on aura

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Puv = Q$$

ou

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q. \quad (3)$$

Choisissons la fonction v de sorte que l'on ait

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \quad (4)$$

Séparant les variables dans cette équation différentielle en v , on trouve :

$$\frac{dv}{v} = -Pdx.$$

On obtient en intégrant

$$-\text{Log} |C_1| + \text{Log} |v| = - \int P dx$$

ou

$$v = C_1 e^{-\int P dx}.$$

Comme il nous suffit d'avoir une solution quelconque non nulle de l'équation (4), nous prendrons pour fonction $v(x)$:

$$v(x) = e^{\int P dx}, \quad (5)$$

où $\int P dx$ est une primitive quelconque. Il est évident que $v(x) \neq 0$.

Substituant la valeur trouvée de $v(x)$ dans l'équation (3), on obtient (ayant en vue que $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$):

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x)$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

d'où

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Substituant dans la formule (2), on obtient finalement:

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]$$

ou

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x). \quad (6)$$

Remarque. Il est évident que l'expression (6) ne change pas si l'on prend au lieu de la fonction $v(x)$ définie par (5) une fonction quelconque $v_1(x) = \bar{C}v(x)$. En effet, on obtient en substituant $v_1(x)$ au lieu de $v(x)$:

$$y = \bar{C}v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)} dx + C\bar{C}v(x).$$

$\bar{C}$ disparaît du premier terme du second membre; le produit $\bar{C}\bar{C}$ du second terme est une constante arbitraire que l'on peut désigner simplement par C , et nous retrouvons l'expression (6). Si l'on pose $\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$, l'équation (6) prend la forme

$$y = v(x) \varphi(x) + Cv(x). \quad (6')$$

Il est évident qu'on a là l'intégrale générale, car on peut choisir C de manière que soit satisfaite la condition initiale:

$$y = y_0 \text{ lorsque } x = x_0.$$

C est déterminé par l'équation

$$y_0 = v(x_0) \varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

Exemple. Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Solution. Posons

$$y = uv;$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Substituant l'expression $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, on obtient:

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{2}{x+1} uv &= (x+1)^3, \\ u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + v \frac{du}{dx} &= (x+1)^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Pour la détermination de v , on obtient l'équation

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0,$$

c.-à-d.

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

d'où

$$\text{Log} |v| = 2 \text{Log} |x+1|$$

ou

$$v = (x+1)^2.$$

Substituant l'expression de la fonction v dans l'équation (7), on obtient pour la détermination de u l'équation

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

ou

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

d'où

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation donnée s'écrit

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

La famille obtenue est la solution générale. Quelle que soit la condition initiale (x_0, y_0) où $x_0 \neq -1$, on peut toujours choisir C de sorte que la solution particulière correspondante satisfasse à la condition initiale donnée. Ainsi, la solution particulière satisfaisant à la condition $y_0 = 3$ pour $x_0 = 0$ est définie comme suit:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2; \quad C = \frac{5}{2}.$$

Par conséquent, la solution particulière cherchée est

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Toutefois, si l'on prend la condition initiale (x_0, y_0) de sorte que $x_0 = -1$, on ne peut en déduire une solution particulière satisfaisant à cette condition. Ceci provient de ce que la fonction $P(x) = -\frac{x+1}{2}$ est discontinue au point $x_0 = -1$ et les conditions du théorème d'existence de la solution ne sont pas observées.

Remarque. On rencontre souvent, dans les applications, les équations différentielles à coefficients constants

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \quad (8)$$

où a et b sont des constantes.

On peut résoudre cette équation à l'aide de la substitution (2) ou par une séparation des variables:

$$dy = (-ay + b) dx, \quad \frac{dy}{-ay + b} = dx, \quad -\frac{1}{a} \log |-ay + b| = x + C_1,$$

$$\log |-ay + b| = -(ax + C^*), \quad \text{où } C^* = aC_1, \\ -ay + b = e^{-(ax+C^*)}, \quad y = -\frac{1}{a} e^{-(ax+C^*)} + \frac{b}{a}$$

et finalement

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Cette expression dans laquelle $C = -\frac{1}{a} e^{-C^*}$ est la solution générale de l'équation (8).

§ 8. Equation de Bernoulli

Considérons une équation de la forme *)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (4)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes) et $n \neq 0, n \neq 1$ (sinon on aurait une équation linéaire).

*) A cette équation conduit le problème sur le mouvement du corps si la résistance du milieu F dépend de la vitesse: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. L'équation du mouvement sera alors $m \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$ ou $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n$.

Cette équation, qui est appelée *équation de Bernoulli*, se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante.

Divisant tous les termes de l'équation par y^n , on obtient:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{-n+1} = Q. \quad (2)$$

Faisons ensuite la substitution:

$$z = y^{-n+1}.$$

Alors

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1) y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

On obtient en substituant dans l'équation (2):

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1) Pz = (-n+1) Q.$$

C'est une équation linéaire.

Calculant son intégrale générale et substituant à z son expression y^{-n+1} , on obtient l'intégrale générale de l'équation de Bernoulli.

Exemple. Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3. \quad (3)$$

Solution. Divisant tous les termes par y^3 , on obtient:

$$y^{-3} y' + xy^{-2} = x^2. \quad (4)$$

Introduisons la nouvelle fonction

$$z = y^{-2};$$

on a alors

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}.$$

On obtient en substituant dans l'équation (4):

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3. \quad (5)$$

C'est une équation linéaire.

Trouvons son intégrale générale:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Substituons dans l'équation (5) les expressions de z et de $\frac{dz}{dx}$:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3$$

ou

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Annulons l'expression entre parenthèses:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2x dx;$$

$$\operatorname{Log} |v| = x^2; \quad v = e^{x^2}.$$

On obtient pour définir u l'équation

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Séparons les variables :

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C.$$

On trouve en intégrant par parties

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C; \quad z = uv = x^2 + 1 + C e^{x^2}.$$

On a donc l'intégrale générale de l'équation donnée :

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{x^2} \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1 + C e^{x^2}}}.$$

Remarque. Tout comme pour les équations linéaires, on démontre qu'on peut chercher la solution de l'équation de Bernoulli sous forme de produit de deux fonctions :

$$y = u(x) v(x),$$

où $v(x)$ est une fonction arbitraire non nulle satisfaisant à l'équation $v' + P v = 0$.

§ 9. Equations aux différentielles totales

Définition. L'équation

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

est appelée *équation aux différentielles totales* si $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions continues dérivables telles que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (2)$$

les dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ étant continues dans un certain domaine.

Intégration des équations aux différentielles totales. Montrons que si le premier membre de l'équation (1) est une différentielle totale, la condition (2) est observée, et inversement, si la condition (2) est observée, le premier membre de l'équation (1) est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c.-à-d. que l'équation (1) est de la forme

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

dont l'intégrale générale est $u(x, y) = C$.

Supposons d'abord que le premier membre de l'équation (1) soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$, c.-à-d.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

alors

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Dérivant la première relation par rapport à y et la seconde par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Supposant que les dérivées secondes sont continues, on a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

c.-à-d. que l'égalité (2) est une condition nécessaire pour que le premier membre de l'équation (1) soit la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$. Montrons que cette condition est aussi suffisante, c.-à-d. que si les égalités (2) ont lieu, le premier membre de l'équation (1) est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$.

De la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

on déduit :

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y),$$

où x_0 est l'abscisse d'un point arbitraire dans le domaine d'existence de la solution.

Intégrant par rapport à x , nous supposons y constant, et, par conséquent, la constante d'intégration est remplacée ici par une fonction arbitraire de y . Choisissons la fonction $\varphi(y)$ de telle sorte que soit observée la seconde relation (4). A cet effet, dérivons *)

*) L'intégrale $\int_{x_0}^x M(x, y) dx$ dépend de y . Pour trouver la dérivée de cette intégrale par rapport à y , il faut dériver par rapport à y la fonction sous le signe somme : $\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx$. Ceci résulte du théorème de Leibniz sur la dérivation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre (voir § 40, ch. XI).

les deux membres de la dernière égalité par rapport à y et égalons le résultat à $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Mais comme $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, on peut écrire:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N, \text{ c.-à-d. } N(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ou

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Par conséquent,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

ou

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Par conséquent, la fonction $u(x, y)$ sera de la forme

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

$P(x_0, y_0)$ représente ici un point au voisinage duquel existe la solution de l'équation différentielle (1).

Egalant cette expression à une constante arbitraire C , on obtient l'intégrale générale de l'équation (1):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (5)$$

Exemple. Soit l'équation

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

Assurons-nous que c'est une différentielle totale.

Désignons

$$M = \frac{2x}{y^3}; \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

La condition (2) est observée pour $y \neq 0$. Le premier membre de l'équation donnée est donc la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x, y)$. Trouvons cette fonction.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$, on a

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction de y qu'il faut déterminer.

Dérivons cette relation par rapport à y et prenons en considération que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

On trouve

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

par conséquent,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}; \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

§ 10. Facteur intégrant

Supposons que le premier membre de l'équation

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

ne soit pas une différentielle totale. Il est parfois possible de choisir une fonction $\mu(x, y)$ telle que si l'on multiplie le premier membre de l'équation proposée par cette fonction, ce premier membre devient une différentielle totale. La solution générale de l'équation ainsi obtenue coïncide avec la solution générale de l'équation proposée; la fonction $\mu(x, y)$ est dite un *facteur intégrant* de l'équation (1).

Pour trouver un facteur intégrant μ , on procède comme suit: multiplions les deux membres de l'équation donnée par le facteur intégrant, encore inconnu, μ :

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Pour que cette dernière équation soit une équation aux différentielles totales, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

c.-à-d.

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

ou encore

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

On obtient en faisant le quotient des deux membres de cette dernière équation par μ :

$$M \frac{\partial \log \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2)$$

Il est évident que toute fonction $\mu(x, y)$ satisfaisant à cette dernière équation est un facteur intégrant de l'équation (1). L'équation (2) est une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue μ dépendant de deux variables x et y . On démontre que, dans des conditions déterminées, elle possède une infinité de solutions et il en résulte que l'équation (1) a un facteur intégrant. Mais dans le cas général, il est plus difficile de déterminer $\mu(x, y)$ dans (2) que d'intégrer l'équation proposée (1). C'est seulement dans des cas particuliers que l'on arrive à déterminer la fonction $\mu(x, y)$.

Supposons, par exemple, que l'équation (1) admette un facteur intégrant dépendant seulement de y . Alors

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = 0$$

et on obtient pour μ une équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d \log \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

d'où l'on détermine (par une quadrature) $\log \mu$ et donc μ . Il est évident que l'on ne peut procéder ainsi que si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ne dépend pas de x .

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$$

D'une manière analogue, si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ ne dépend pas de y mais dépend seulement de x , on trouve facilement le facteur intégrant qui dépend seulement de x .

Exemple. Résoudre l'équation

$$(y + xy^2) dx - x dy = 0.$$

Solution. Ici $M = y + xy^2$; $N = -x$;

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - 1 + 2xy}{\frac{\partial N}{\partial x}} = -1; \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial N}{\partial y}} \neq \frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial N}{\partial y}}.$$

Il en résulte que le premier membre de l'équation n'est pas une différentielle totale. Voyons si cette équation admet un facteur intégrant dépendant seulement de y . Remarquons que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y},$$

on conclut qu'il en est bien ainsi. Trouvons-le:

$$\frac{d \log \mu}{dy} = -\frac{2}{y},$$

d'où

$$\log \mu = -2 \log y, \quad \text{soit } \mu = \frac{1}{y^2}.$$

On obtient, après multiplication de tous les termes de l'équation proposée par le facteur intégrant μ , l'équation

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

aux différentielles totales $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \right)$. Résolvant cette équation, on trouve son intégrale générale:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$$

ou

$$y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

§ 11. Enveloppe d'une famille de courbes

Soit une équation de la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

où x et y sont les coordonnées cartésiennes variables et C un paramètre susceptible de prendre diverses valeurs fixes.

Pour chaque valeur donnée du paramètre C , l'équation (1) définit une certaine courbe dans le plan Oxy . Donnant à C toutes les valeurs possibles, nous obtenons une famille de courbes dépendant d'un paramètre. Par conséquent, l'équation (1) est l'équation d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre (elle contient un seul paramètre arbitraire).

Définition. On appelle *enveloppe* L d'une famille de courbes à un paramètre une courbe tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille (fig. 256).

Exemple 1. Considérons la famille de courbes

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2,$$

où R est une constante et C un paramètre.

C'est l'équation d'une famille de cercles de rayon R centrés sur l'axe Ox . Il est évident que cette famille admet pour enveloppe les droites $y = R$, $y = -R$ (fig. 257).

Equation de l'enveloppe d'une famille de courbes. Soit la famille de courbes

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (1)$$

dépendant d'un paramètre C .

Supposons que cette famille ait une enveloppe dont l'équation puisse être mise sous la forme $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction

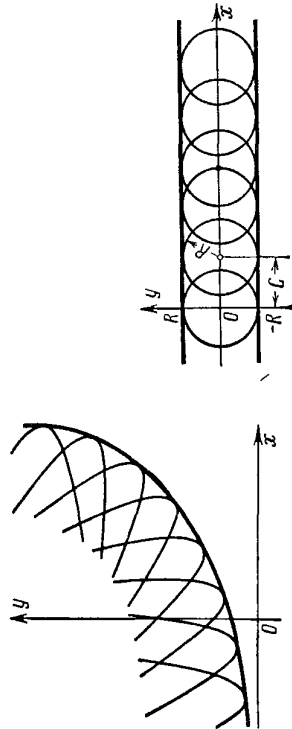


Fig. 256

continue dérivable. Considérons un point $M(x, y)$ de l'enveloppe. Ce point appartient aussi à une certaine courbe de la famille (1). Il correspond à cette courbe une valeur déterminée du paramètre C qui, pour (x, y) donnés, est définie par l'équation (1): $C = C(x, y)$. Par conséquent, on a pour tous les points de l'enveloppe l'égalité

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \quad (2)$$

Supposons que $C(x, y)$ soit une fonction dérivable non constante dans aucun intervalle des valeurs de x , y considérées. Trouvons à partir de l'équation (2) de l'enveloppe le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe au point $M(x, y)$. Dérivons l'égalité (2) par rapport à x , en considérant y comme fonction de x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} \right) y' &= 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

ou

On déduit ensuite le coefficient angulaire de la tangente au point $M(x, y)$ à la courbe de la famille (1) de l'égalité

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \quad (4)$$

(C est constant sur la courbe donnée).

Nous supposons $\Phi'_y \neq 0$, sinon nous prendrions x comme fonction et y comme variable. Etant donné que le coefficient angulaire k de l'enveloppe est égal à celui de la courbe de la famille, on déduit de (3) et (4):

$$\Phi'_C \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0$$

Mais comme pour l'enveloppe $C(x, y) \neq \text{const.}$,

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

et on a donc pour les points de cette dernière

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0. \quad (5)$$

Par conséquent, on détermine l'enveloppe par les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Inversement, si, éliminant C de ces équations, on obtient $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est une fonction dérivable, et $C \neq \text{const.}$ sur cette courbe, alors $y = \varphi(x)$ est l'équation de l'enveloppe.

Remarque 1. Si une certaine fonction $y = \varphi(x)$ représente le lieu géométrique des points singuliers de la famille (1), c.-à-d. de points tels que $\Phi'_x = 0$ et $\Phi'_y = 0$, les coordonnées de ces points vérifient également les équations (6).

En effet, on peut exprimer les coordonnées des points singuliers en fonction du paramètre C qui entre dans l'équation (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \quad (7)$$

Si l'on substitue ces expressions dans l'équation (1), on obtient une identité en C :

$$\Phi[\lambda(C), \mu(C), C] = 0.$$

Dérivons cette identité par rapport à C , on obtient:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0;$$

comme on a, quel que soit le point singulier, les égalités $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, il en résulte qu'on a aussi pour ces points $\Phi'_C = 0$.

Nous venons donc de démontrer que les coordonnées des points singuliers vérifient les équations (6).

Ainsi, les équations (6) définissent soit l'enveloppe, soit le lieu géométrique des points singuliers des courbes de la famille (1), soit une combinaison de l'une et de l'autre. Par conséquent, ayant obtenu une courbe satisfaisant aux équations (6), il importe de faire une étude spéciale pour déterminer si la courbe obtenue est l'enveloppe ou bien un lieu de points singuliers.

Exemple 2. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles dépendant d'un paramètre C

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Solution. On obtient en dérivant l'équation de la famille par rapport à C :

$$2(x - C) = 0.$$

Éliminons C de ces deux équations, on obtient:

$$y^2 - R^2 = 0 \text{ ou } y = \pm R.$$

Il résulte des considérations géométriques que le couple de droites obtenues est bien l'enveloppe (et non pas un lieu de points singuliers, étant donné que les cercles de la famille n'ont pas de points singuliers).

Exemple 3. Trouver l'enveloppe de la famille de droites:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (a)$$

où α est le paramètre.

Solution. On trouve en dérivant par rapport à α l'équation de la famille

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \quad (b)$$

Pour éliminer le paramètre α des équations (a) et (b), multiplions la première par $\cos \alpha$, la seconde par $\sin \alpha$ et retranchons la seconde de la première; on obtient:

$$x = p \cos \alpha.$$

On trouve en substituant cette expression dans l'égalité (b):

$$y = p \sin \alpha.$$

Élevons les deux membres des équations précédentes au carré et ajoutons-les; on a:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

C'est l'équation d'un cercle. Ce cercle est l'enveloppe de la famille de droites (et non pas un lieu de points singuliers, car les droites n'ont pas de singularité) (fig. 258).

Exemple 4. Trouver l'enveloppe des trajectoires des projectiles lancés par un canon à la vitesse v_0 sous différents angles. On suppose que les projectiles sont lancés de l'origine des coordonnées et que leurs trajectoires se trouvent dans le plan Oxy (on néglige la résistance de l'air).

Solution. Trouvons d'abord l'équation de la trajectoire d'un projectile lancé sous l'angle α dans le sens positif de l'axe Ox . Le mouvement du projectile est la superposition de deux mouvements: d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 dans la direction du lancement et d'un mouvement de chute sous

l'action de la pesanteur. La position du projectile M sera donc définie à chaque instant t par les égalités (fig. 259):

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Ce sont les équations paramétriques de la trajectoire (le paramètre est le temps). Éliminant t , on trouve l'équation de la trajectoire sous la forme:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

enfin, introduisant les notations $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, on obtient:

$$y = kx - ax^2 (1 + k^2). \quad (8)$$

C'est l'équation de paraboles passant par l'origine, d'axes verticaux et de branches tournées vers le bas. On obtient différentes trajectoires en faisant varier k .

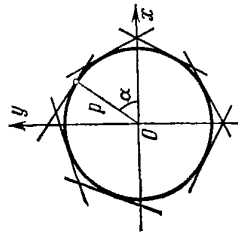


Fig. 258

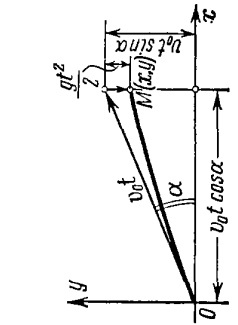


Fig. 259

L'équation (8) est donc l'équation d'une famille de paraboles à un paramètre, qui sont les trajectoires des projectiles lancés sous différents angles α et avec une vitesse initiale donnée v_0 (fig. 260).

Cherchons l'enveloppe de cette famille de paraboles.

Dérivons les deux membres de l'équation (8) par rapport à k , on obtient:

$$x - 2akx^2 = 0. \quad (9)$$

Éliminons k des équations (8) et (9), on obtient:

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

C'est l'équation d'une parabole de sommet au point $(0, \frac{1}{4a})$ et dont l'axe est Oy . Elle n'est pas un lieu de points singuliers (les paraboles (8) n'ont pas de points singuliers). Ainsi, la parabole

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

est l'enveloppe de la famille de trajectoires. On l'appelle la parabole sûre, car la région se trouvant en dehors de cette parabole est hors de portée des projectiles lancés avec la vitesse initiale v_0 .

Exemple 5. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles semi-cubiques

$$y^3 - (x - C)^2 = 0.$$

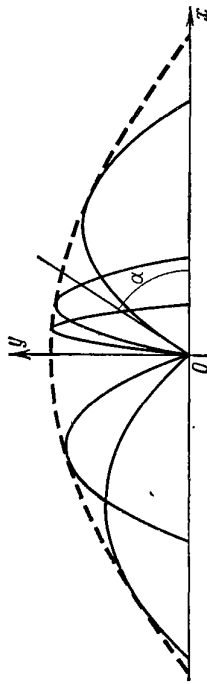


Fig. 260

Solution. Dérivons l'équation donnée par rapport au paramètre C :

$$2(x - C) = 0.$$

On obtient en éliminant le paramètre C des deux équations

$$y = 0.$$

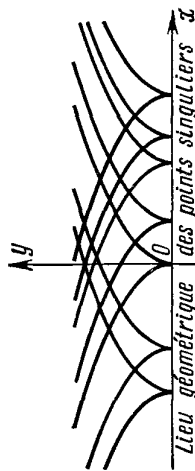


Fig. 261

L'axe Ox est un lieu géométrique des points singuliers (des points de rebroussement de première espèce) (fig. 261). En effet cherchons les points singuliers de la courbe

$$y^3 - (x - C)^2 = 0,$$

C étant fixé. On trouve en dérivant par rapport à x et y :

$$F'_x = -2(x - C) = 0;$$

$$F'_y = 3y^2 = 0.$$

Résolvant les trois dernières équations on trouve les coordonnées du point singulier: $x = C$, $y = 0$; par conséquent chaque courbe de la famille a un point singulier sur l'axe Ox .

Les points singuliers décrivent l'axe Ox tout entier lorsque le paramètre C varie d'une manière continue.

Exemple 6. Trouver l'enveloppe et le lieu géométrique des points singuliers de la famille

$$(y - C)^2 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0. \quad (10)$$

Solution. Dérivant par rapport à C les deux membres de l'équation (10), on trouve:

$$-2(y - C) + \frac{2}{3}3(x - C)^2 = 0$$

ou

$$y - C - (x - C)^2 = 0. \quad (11)$$

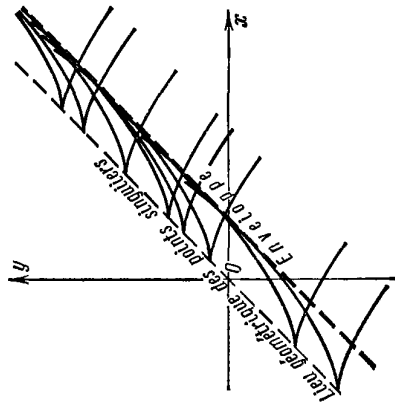


Fig. 262

Éliminons maintenant le paramètre C de l'égalité obtenue (11) et de l'équation (10) de la famille. Substituons l'expression

$$y - C = (x - C)^2$$

dans l'équation de la famille, on obtient:

$$(x - C)^4 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0$$

ou

$$(x - C)^3 \left[(x - C) - \frac{2}{3} \right] = 0;$$

on obtient ainsi deux valeurs de C , auxquelles correspondent deux solutions du problème proposé.

Première solution:

$$C = x;$$

on déduit donc de l'égalité (11):

$$y - x - (x - x)^2 = 0$$

ou

$$y = x.$$

Deuxième solution:

$$C = x - \frac{2}{3};$$

on déduit donc de l'égalité (11)

$$y - x + \frac{2}{3} - \left[x - x + \frac{2}{3} \right]^2 = 0$$

ou

$$y = x - \frac{2}{9}.$$

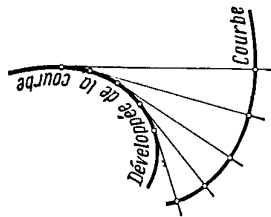


Fig. 263

Nous avons obtenu deux droites: $y = x$ et $y = x - \frac{2}{9}$. La première droite est le lieu des points singuliers et la seconde l'enveloppe (fig. 262).

Remarque 2. Nous avons démontré au § 7, ch. VI que les normales à une courbe étaient en même temps les tangentes à la développée de cette courbe. Par conséquent, la famille des normales à une courbe donnée est en même temps la famille des tangentes à sa développée. On voit donc que la développée d'une courbe est l'enveloppe de la famille des normales à cette courbe (fig. 263).

Cette remarque permet d'indiquer encore une méthode pour la recherche de la développée: on trouve l'équation de la développée d'une courbe en définissant préalablement la famille des normales à cette courbe, puis en cherchant l'enveloppe de cette famille.

§ 12. Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre

Supposons que l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

ait pour intégrale générale

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (2)$$

Supposons que la famille de courbes intégrales de l'équation (2) ait une enveloppe. Montrons que cette enveloppe est également une courbe intégrale de l'équation différentielle (1).

En effet, l'enveloppe est tangente en chacun de ses points à une certaine courbe de la famille, c'est-à-dire qu'elle a en ce point une tangente commune avec la courbe. Par conséquent, en chaque point de l'enveloppe, les quantités x, y, y' sont les mêmes pour l'enveloppe et pour la courbe de la famille.

Or pour la courbe de la famille les quantités x, y, y' vérifient l'équation (1). Il en résulte que l'abscisse, l'ordonnée et le coefficient angulaire de chaque point de l'enveloppe vérifient aussi cette même équation, ce qui signifie que l'enveloppe est une courbe intégrale et que son équation est une solution de l'équation différentielle donnée.

Mais l'enveloppe n'étant pas en général une courbe de la famille, son équation ne peut être déduite de l'intégrale générale (2) en particulierisant C . On appelle *solution singulière* d'une équation différentielle toute solution non déduite de l'intégrale générale en particulierisant C , et ayant pour graphe l'enveloppe de la famille de courbes intégrales contenues dans la solution générale.

Supposons connue l'intégrale générale

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

éliminant C de cette équation et de l'équation $\Phi'_C(x, y, C) = 0$, on obtient une équation $\psi(x, y) = 0$. Si cette fonction vérifie l'équation différentielle (mais n'appartient pas à la famille (2)), c'est une *intégrale singulière*.

Remarquons qu'il passe au moins deux courbes intégrales par chaque point de l'intégrale singulière, c.-à-d. que l'unicité de la solution est violée en chaque point d'une intégrale singulière.

Notons que le point dans lequel est violée l'unicité de la solution d'une équation différentielle, c'est-à-dire le point par lequel passent au moins deux courbes intégrales, s'appelle *point singulier* *). Par conséquent, toute solution singulière est constituée de points singuliers.

Exemple. Trouver la solution singulière de l'équation

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \quad (*)$$

Solution. Trouvons son intégrale générale. Résolvons l'équation par rapport à y' :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

On trouve en séparant les variables

$$\pm \frac{y \, dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

On déduit l'intégrale générale par intégration:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

On voit que la famille de courbes intégrales est la famille de cercles de rayon R centrés sur l'axe des abscisses. L'enveloppe de cette famille de cercles est donnée par les deux droites $y = \pm R$.

Les fonctions $y = \pm R$ vérifient l'équation différentielle (*). Elles représentent les intégrales singulières.

§ 13. Equation de Clairaut

Considérons l'équation suivante

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

*) Les points frontières du domaine d'existence de la solution sont également nommés *points singuliers*. Tout point intérieur du domaine par lequel passe une seule et unique courbe intégrale de l'équation différentielle s'appelle *point ordinaire*.

appelée *équation de Clairaut*. Elle s'intègre en introduisant un paramètre auxiliaire. Posons, en effet, $\frac{dy}{dx} = p$; l'équation (1) prend la forme

$$y = xp + \psi(p). \quad (1')$$

Dérivons tous les termes de cette dernière équation par rapport à x , ayant en vue que $p = \frac{dy}{dx}$ est fonction de x :

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

ou

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0. \quad (2)$$

Annulons séparément chaque facteur, on obtient :

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

et

$$x + \psi'(p) = 0. \quad (3)$$

1) L'intégration de (2) donne $p = C$ ($C = \text{const.}$). Substituant cette valeur de p dans l'équation (1'), on trouve son intégrale générale

$$y = xC + \psi(C) \quad (4)$$

qui représente, du point de vue géométrique, une famille de droites.

2) Tirons p de l'équation (3) en tant que fonction de x et substituons-la dans l'équation (1'); on trouve

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \quad (4'')$$

qui, comme nous allons voir, est une solution de l'équation (1).

En effet, on trouve en vertu de (3):

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = p.$$

Par conséquent, on obtient une identité lorsqu'on substitue la fonction (4'') dans l'équation (1):

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

La solution (4'') ne peut pas être obtenue à partir de l'intégrale générale (4) en particulierisant C . C'est une solution singulière; on l'obtient en éliminant le paramètre p des équations

$$y = xp + \psi(p), \quad \left. \begin{array}{l} x + \psi'(p) = 0 \end{array} \right\}$$

ou, ce qui revient au même, en éliminant C dans les équations

$$\begin{aligned} y &= xC + \psi(C), \\ x + \psi'(C) &= 0. \end{aligned}$$

On voit donc que la solution singulière de l'équation de Clairaut est l'enveloppe de la famille de droites définies par l'intégrale générale (4).

Exemple. Trouver les intégrales générale et singulière de l'équation

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Solution. On obtient l'intégrale générale en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par C :

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

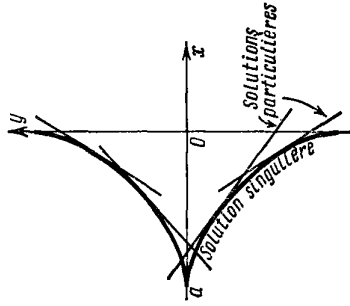


Fig. 264

Pour obtenir la solution singulière, dérivons cette dernière équation par rapport à C :

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0.$$

On obtient la solution singulière (l'enveloppe) sous forme paramétrique (C étant le paramètre):

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Éliminant le paramètre C , on trouve la dépendance entre x et y . Élevons chacune de ces équations séparément à la puissance $2/3$ et ajoutons membre à membre, on obtient la solution singulière sous la forme

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

C'est une astéroïde. Toutefois l'enveloppe de la famille de droites (et donc la solution singulière) n'est pas représentée par l'astéroïde tout entière mais par sa moitié de gauche (car les équations paramétriques de l'enveloppe montrent que $x \leq 0$) (fig. 264).

§ 14. Equation de Lagrange

On appelle ainsi une équation de la forme

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad (1)$$

où φ et ψ sont des fonctions données de $\frac{dy}{dx}$.

Cette équation est linéaire par rapport à x et y . L'équation de Clairaut, examinée au paragraphe précédent, est un cas particulier de l'équation de Lagrange lorsque $\varphi(y') \equiv y'$. Tout comme l'équation de Clairaut, l'équation de Lagrange s'intègre en introduisant un paramètre auxiliaire p . Posons

$$y' = p;$$

l'équation proposée prend alors la forme

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \quad (1')$$

On obtient en dérivant par rapport à x :

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}$$

ou

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}. \quad (1'')$$

On trouve d'emblée certaines solutions de cette équation, car elle devient une identité pour toute valeur constante $p = p_0$ vérifiant la condition

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

En effet, lorsque p est constant, on a $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ et les deux membres de l'équation (1'') s'annulent.

La solution correspondant à chaque valeur de $p = p_0$, c.-à-d. $\frac{dy}{dx} = p_0$, est une fonction linéaire de x (étant donné que la dérivée $\frac{dy}{dx}$ n'est constante que pour les fonctions linéaires). Pour trouver cette fonction, il suffit de substituer dans l'égalité (1') la valeur $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Si cette solution ne peut être déduite de la solution générale en particulierisant la constante arbitraire, c'est une solution singulière.

Trouvons à présent la solution générale. Écrivons à cet effet l'équation (1'') sous la forme

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

et considérons x comme fonction de p . L'équation obtenue est alors une équation différentielle linéaire par rapport à la fonction $x(p)$.

On trouve en la résolvant

$$x = \omega(p, C). \quad (2)$$

Éliminant le paramètre p des équations (1') et (2), on obtient l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Exemple. Soit l'équation

$$y = xy'^2 + y'^2. \quad (1)$$

Posons $y' = p$, on obtient

$$y = xp^2 + p^2. \quad (1')$$

Dérivons par rapport à x , on obtient:

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}. \quad (1'')$$

Trouvons les solutions singulières. Étant donné que $p = p_0$ lorsque $p_0 \equiv 0$ et $p_1 \equiv 1$ on aura pour solutions les fonctions (voir (1'')):

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ c.-à-d. } y = 0$$

et

$$y = x + 1.$$

On saura si ces fonctions sont des solutions particulières ou singulières après avoir trouvé l'intégrale générale. Pour trouver l'intégrale générale écrivons l'équation (1'') sous la forme

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2}{1-p} = \frac{2}{1-p}$$

et considérons x comme fonction de la variable indépendante p . Intégrons l'équation linéaire (relativement à x) obtenue, on trouve:

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \quad (II)$$

Éliminant p des équations (I') et (II) on obtient l'intégrale générale:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

L'équation proposée a pour intégrale singulière:

$$y = 0,$$

étant donné que cette solution ne résulte pas de la solution générale en particulierisant C .

Quant à la fonction $y = x + 1$, elle n'est pas une solution singulière, mais une solution particulière; elle se déduit de la solution générale en posant $C = 0$.

§ 15. Trajectoires orthogonales et isogonales

Considérons une famille de courbes à un paramètre

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (1)$$

On appelle *trajectoires isogonales* les courbes coupant toutes les courbes de la famille donnée (4) sous un angle constant. Si l'on a un angle droit, ces courbes sont alors des *trajectoires orthogonales*.

Trajectoires orthogonales. Cherchons l'équation des trajectoires orthogonales. Écrivons l'équation différentielle de la famille de courbes donnée, en éliminant le paramètre C des équations

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Soit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1')$$

cette équation différentielle. $\frac{dy}{dx}$ est ici la pente de la tangente au point $M(x, y)$ à la courbe correspondante de la famille. Étant donné que la trajectoire orthogonale passant par le point $M(x, y)$ est perpendiculaire à la courbe correspondante, sa pente $\frac{dy_T}{dx}$ est liée à $\frac{dy}{dx}$ par la relation (fig. 265)

$$\frac{dy_T}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \quad (2)$$

Substituant cette expression dans l'équation (1') et omettant l'indice T , on obtient une relation entre les coordonnées d'un point arbitraire (x, y) et la pente de la trajectoire orthogonale en ce point, c.-à-d. l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \quad (3)$$

L'intégrale générale de cette équation

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

représente la famille de trajectoires orthogonales.

Les trajectoires orthogonales se rencontrent, par exemple, lorsqu'on étudie l'écoulement plan d'un fluide.

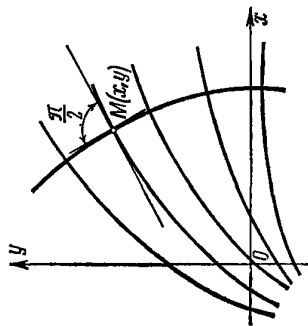


Fig. 265

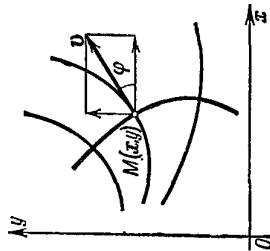


Fig. 266

Considérons le mouvement plan d'un fluide tel que le vecteur vitesse $v(x, y)$ du courant soit défini en chaque point du plan Oxy . Si ce vecteur ne dépend que de la position du point et non du temps, on dit que le mouvement est stationnaire. Nous allons considérer un tel mouvement. En outre, nous supposons qu'il existe un potentiel de vitesses, c.-à-d. une fonction $u(x, y)$ telle que les projections du vecteur $v(x, y)$ sur les axes de coordonnées $v_x(x, y)$ et $v_y(x, y)$ soient les dérivées partielles de cette fonction par rapport à x et y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \quad (4)$$

Les courbes de la famille

$$u(x, y) = C \quad (5)$$

sont appelées *lignes de niveau* ou *lignes équipotentielles*.

Les courbes dont la tangente en chaque point est confondue avec le vecteur $v(x, y)$ sont appelées *lignes de courant*; elles matérialisent les trajectoires des particules en mouvement.

Montrons que les lignes de courant sont les trajectoires orthogonales de la famille de lignes équipotentielles (fig. 266).

Soit φ l'angle formé par le vecteur vitesse v et l'axe Ox . On a, en vertu des relations (4),

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |v| \cos \varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |v| \sin \varphi;$$

d'où l'on déduit la pente de la tangente à la ligne de courant

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \quad (6)$$

On obtient la pente de la tangente à la ligne équipotentielle en dérivant la relation (5) par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (7)$$

Par conséquent, la pente de la tangente à la ligne équipotentielle est l'inverse changé de signe de la pente de la tangente à la ligne de courant.

Il en résulte que les lignes équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.

Dans le cas d'un champ électrique ou d'un champ magnétique, les trajectoires orthogonales de la famille de lignes équipotentielles sont les lignes de force du champ.

Exemple 1. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles

$$y = Cx^2.$$

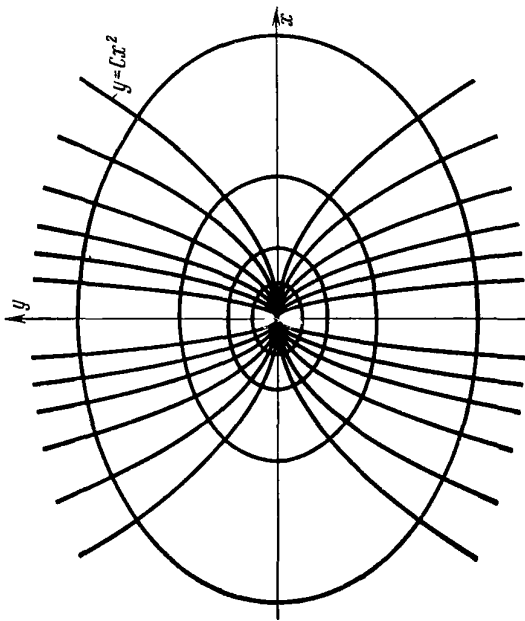


Fig. 267

Solution. Écrivons l'équation différentielle de la famille

$$y' = 2Cx.$$

On obtient en éliminant C :

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Remplaçant dans cette égalité y' par $-\frac{1}{y'}$, on obtient l'équation différentielle de la famille de trajectoires orthogonales

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

ou

$$y dy = -\frac{x dx}{2}.$$

Son intégrale générale est

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Par conséquent, les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles donnée forment une famille d'ellipses de demi-axes $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ (fig. 267).

Trajectoires isogonales. Supposons que les trajectoires coupent les courbes d'une famille donnée sous l'angle α . Posons $\operatorname{tg} \alpha = k$.

La pente $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ (fig. 268) de la tangente à la courbe de la famille et la pente $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg} \psi$ de la tangente à la trajectoire isogonale sont reliées par la relation

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi},$$

c.-à-d. que

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{\frac{dy}{dx} - k}{k \frac{dy}{dx} + 1}. \quad (2')$$

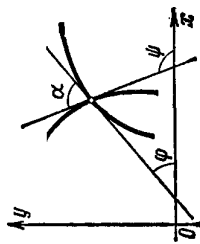


Fig. 268

Substituant cette expression dans l'équation (1') et omettant l'indice T , on obtient l'équation différentielle des trajectoires isogonales.

Exemple 2. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de droites

$$y = Cx. \quad (8)$$

On suppose que ces droites sont coupées sous l'angle α , et on posera $\operatorname{tg} \alpha = k$. Solution. Écrivons l'équation différentielle de la famille de droites. Dérivons l'équation (8) par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = C.$$

Par ailleurs, on déduit de la même équation

$$C = \frac{y}{x}.$$

L'équation de la famille de droites est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

On obtient l'équation différentielle des trajectoires isogonales en se servant de la relation (2')

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}.$$

On a donc, en omettant l'indice T :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k \frac{y}{x}}.$$

On obtient l'intégrale générale en intégrant cette équation homogène :

$$\text{Log } \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \text{arc tg } \frac{y}{x} + \text{Log } C, \quad (9)$$

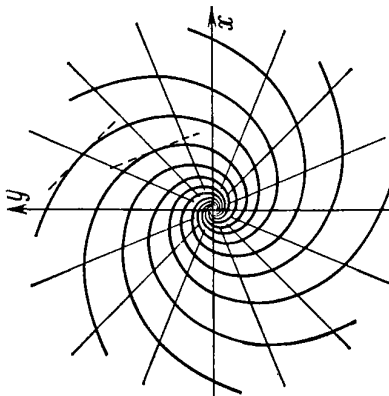


Fig. 269

telle est la famille de trajectoires isogonales. Pour voir quelles sont les courbes de cette famille, passons en coordonnées polaires :

$$\frac{y}{x} = \text{tg } \varphi; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

On obtient en substituant ces expressions dans (9)

$$\text{Log } \rho = \frac{1}{k} \varphi + \text{Log } C$$

ou

$$\rho = C e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

On voit que la famille de trajectoires isogonales est composée de spirales logarithmiques (fig. 269).

§ 16. Equations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales)

Comme nous l'avons indiqué plus haut (voir § 2), on peut écrire symboliquement une équation différentielle d'ordre n sous la forme

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

ou encore, si elle se résout par rapport à la dérivée d'ordre n ,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1')$$

Dans le présent chapitre, nous ne considérerons que des équations résolubles par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé. On a pour ces équations un théorème d'existence et d'unicité de la solution analogue à celui des équations du premier ordre.

T h é o r è m e. *Si dans l'équation*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

la fonction $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ et ses dérivées partielles par rapport à $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ sont continues dans un certain domaine contenant les valeurs $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, il existe une solution et une seule $y = y(x)$ de l'équation vérifiant les conditions

$$\left. \begin{aligned} y|_{x=x_0} &= y_0, \\ y'|_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

qui sont appelées les conditions initiales. La démonstration de ce théorème sort du cadre de ce livre.

Si l'on considère une équation du second ordre $y'' = f(x, y, y')$, les conditions initiales de la solution pour $x = x_0$ seront

$$y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

où x_0, y_0, y'_0 sont des nombres donnés. Le sens géométrique de ces conditions est le suivant : il passe par le point donné du plan (x_0, y_0) une seule courbe dont la pente de la tangente en ce point est y'_0 . Il en résulte que si l'on se donne différentes valeurs de y'_0 , le point x_0, y_0 étant fixe, on obtient autant de courbes intégrales de pentes différentes passant par le point donné.

Introduisons maintenant la notion de solution générale d'une équation du n -ième ordre.

D é f i n i t i o n. On appelle *solution générale* d'une équation différentielle du n -ième ordre une fonction

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

dépendant de n constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots, C_n$, telle que :

a) elle vérifie l'équation quelles que soient les valeurs des constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$;

b) les conditions initiales étant données :

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y^{(n-1)}_0, \end{aligned}$$

on peut choisir les constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ de sorte que la fonction $y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ vérifie ces conditions (on suppose que les valeurs initiales $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ appartiennent au domaine d'existence de la solution).

Une relation de la forme $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, définissant la solution générale implicitement, est appelée l'*intégrale générale* de l'équation différentielle proposée.

Toute fonction se déduisant de la solution générale, en concrétisant les valeurs $C_1, C_2, \dots, C_n$, est une *solution particulière*. La courbe représentative d'une solution particulière est une *courbe intégrale* de l'équation différentielle donnée.

Résoudre (intégrer) une équation différentielle d'ordre n , c'est :
1) trouver sa solution générale (si les conditions initiales ne sont pas données) ou

2) trouver la solution particulière de l'équation satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).

Nous donnons dans les paragraphes suivants des méthodes de résolution de différentes équations du n -ième ordre.

§ 17. Equation de la forme $y^{(n)} = f(x)$

L'équation la plus simple du n -ième ordre est de la forme

$$y^{(n)} = f(x). \quad (1)$$

Trouvons son intégrale générale.

Intégrons par rapport à x les deux membres de l'équation. On obtient, en prenant en considération que $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1,$$

où x_0 est une valeur arbitraire fixe de x et C_1 une constante d'intégration.

Intégrons encore une fois :

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right) dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Continuant ainsi, on obtient (après n intégrations) l'expression de l'intégrale générale

$$\begin{aligned} y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + C_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n. \end{aligned}$$

Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0; \dots; \quad y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0,$$

il suffit de poser

$$C_n = y_0, \quad C_{n-1} = y'_0, \dots, \quad C_1 = y^{(n-1)}_0.$$

E x e m p l e 1. Trouver l'intégrale générale de l'équation $y'' = \sin(kx)$

et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1$.

S o l u t i o n.

$$y' = \int_0^x \sin kx dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k} \right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2$$

ou

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Telle est l'intégrale générale. Pour trouver la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données, il suffit de déterminer les valeurs correspondantes de C_1 et C_2 .

On déduit de la condition $y_{x=0} = 0 \quad C_2 = 0$.

On déduit de la condition $y'_{x=0} = 1 \quad C_1 = \frac{1}{k}$.

Par conséquent, la solution particulière cherchée s'écrit

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x \left(\frac{1}{k} + 1 \right).$$

On rencontre des équations différentielles de ce genre en théorie de la flexion des poutres.

Exemple 2. Considérons une poutre prismatique fléchissant sous l'action de forces extérieures, aussi bien réparties que concentrées. Menons l'axe Ox horizontalement, confondu avec l'axe de la poutre avant sa déformation, et Oy verticalement vers le bas (fig. 270).

Toute force agissant sur la poutre (par exemple, la charge, la réaction des appuis) a un moment par rapport à une section transversale de la poutre qui est égal au produit de la force par la distance entre le point d'application de la force et la section considérée. La somme $M(x)$ des moments de toutes les forces appliquées d'un même côté de la section d'abscisse x est appelée moment fléchissant de la poutre par rapport à la section donnée. On démontre dans les cours de résistance des matériaux que le moment fléchissant d'une poutre est

$$\frac{EJ}{R},$$

où E est le module d'élasticité, qui dépend du matériau, J le moment d'inertie de la section transversale de la poutre par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de gravité de cette section, R le rayon de courbure de l'axe de la poutre courbée, dont l'expression est donnée par la formule (§ 6, chap. VI)

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Par conséquent, l'équation différentielle de l'axe courbe de la poutre s'écrit

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2)$$

Si l'on admet que les déformations sont petites et que les angles entre les tangentes à l'axe de la poutre et l'axe Ox sont petits, on pourra négliger la quantité y'^2 qui est le carré de la petite quantité y' et poser

$$R = \frac{1}{y''}.$$

L'équation différentielle de la poutre fléchie devient alors

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2')$$

C'est une équation de la forme (1).

Exemple 3. Une poutre est encastrée par son extrémité O et une force P agit verticalement à l'extrémité L , à la distance l de la section d'encastrement (fig. 270). On négligera le poids de la poutre.

Considérons la section au point $N(x)$. Le moment fléchissant par rapport à la section N est dans le cas donné

$$M(x) = (l - x)P.$$

L'équation différentielle (2') devient

$$y'' = \frac{P}{EJ} (l - x).$$

Conditions initiales: la déflexion y est nulle lorsque $x = 0$ et la tangente à l'axe de la poutre courbée est confondue avec l'axe Ox , c.-à-d.

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 0.$$

On trouve en intégrant l'équation:

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l - x) dx = \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right);$$

$$y = \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (3)$$

Notamment, la formule (3) définit la flèche h à l'extrémité L :

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 18. Quelques types d'équations différentielles du second ordre se ramenant à des équations du premier ordre.

Problème de la deuxième vitesse cosmique

I. Équations de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (4)$$

ne contenant pas explicitement la fonction inconnue y .

Solution. Désignons la dérivée $\frac{dy}{dx}$ par $p: \frac{dy}{dx} = p$. On aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Substituant ces expressions des dérivées dans l'équation (4), on obtient une équation du premier ordre

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

où p est la fonction inconnue de x . On obtient par intégration sa solution générale

$$p = p(x, C_1),$$

puis l'on déduit de la relation $\frac{dy}{dx} = p$ l'intégrale générale de l'équation (4):

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle de la chaînette (voir § 1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Posons

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

et on obtient une équation différentielle du premier ordre par rapport à la fonction auxiliaire $p(x)$:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1+p^2}.$$

Séparons les variables:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a},$$

d'où

$$\text{Log}(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = \text{sh} \left(\frac{x}{a} + C_1 \right).$$

Mais comme $p = \frac{dy}{dx}$, cette dernière relation est une équation différentielle portant sur la fonction inconnue y . On obtient en l'intégrant l'équation de la chaînette (voir § 4)

$$y = a \text{ ch} \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) + C_2.$$

Trouvons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} y_{x=0} &= a, \\ y'_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

La première condition donne $C_2 = 0$, la seconde $C_1 = 0$. On obtient finalement:

$$y = a \text{ ch} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Remarque. On intègre d'une manière analogue l'équation

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}).$$

Posant $y^{(n-1)} = p$, on obtient pour déterminer p une équation du premier ordre:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Déterminant p en fonction de x , on déduit y de la relation $y^{(n-1)} = p$ (voir § 17).

II. Équations de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

5*

ne contenant pas explicitement la variable indépendante x . Posons à nouveau

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad (3)$$

mais nous considérerons maintenant que p est fonction de y (et non de x , comme auparavant). On aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Substituant dans l'équation (2) les expressions $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, on obtient une équation du premier ordre portant sur la fonction auxiliaire p :

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p). \quad (4)$$

On trouve, en l'intégrant, p comme fonction de y et d'une constante arbitraire C_1 :

$$p = p(y, C_1).$$

Substituant cette expression dans la relation (3), on trouve une équation différentielle du premier ordre relativement à la fonction y de x :

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

On trouve en séparant les variables:

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

L'intégration de cette équation fournit l'intégrale générale de l'équation proposée:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Exemple 2. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$3y'' = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Solution. Posons $\frac{dy}{dx} = p$ et considérons p comme fonction de y . On a alors $y'' = p \frac{dp}{dy}$ et on obtient une équation du premier ordre où la fonction inconnue est p :

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}.$$

On trouve en intégrant cette équation:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Mais $p = \frac{dy}{dx}$; on obtient donc pour y l'équation

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-2/3}}} = dx \text{ ou } \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = dx,$$

et on trouve

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}}.$$

Pour calculer cette intégrale, faisons la substitution :

$$C_1 y^{2/3} - 1 = t^2.$$

On a alors

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{3/2} \frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy = 3t(t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{3/2}} dt.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} &= \frac{1}{C_1^{3/2}} \int \frac{3t(t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^{3/2}} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = \\ &= \frac{1}{C_1^{3/2}} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2). \end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^{3/2}} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2).$$

Exemple 3. Supposons qu'un point matériel décrive la droite Ox sous l'action d'une force dépendant seulement de la position du point. L'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

Soit $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = v_0$ pour $t = 0$.

Multiplions les deux membres de l'équation par $\frac{dx}{dt}$ et intégrons de 0 à t , on obtient :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx,$$

ou

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left[- \int_{x_0}^x F(x) dx \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const.}$$

Le premier terme de la dernière égalité représente l'énergie cinétique du point matériel et le second son énergie potentielle. Il résulte de l'égalité obtenue que la somme des énergies potentielle et cinétique est constante pendant le mouvement.

Problème du pendule mathématique. Considérons un point matériel de masse m se mouvant sous l'action de son propre poids sur une circonférence L dans un plan vertical. Trouvons l'équation du mouvement en faisant abstraction des forces de résistance (frottement, résistance de l'air, etc.).

Prenons l'origine des coordonnées au point le plus bas de la circonférence et dirigeons l'axe Ox tangentiellement à cette dernière (fig. 271).

Soient l le rayon de la circonférence, s la longueur de la portion d'arc de l'origine O au point variable M où se trouve la masse m , cet arc étant pris avec son signe ($s > 0$ si le point M est à droite de O ; $s < 0$ si le point M est à gauche de O).

On se propose de trouver la dépendance entre s et le temps t .

Décomposons la force de pesanteur mg en ses composantes tangentielle et normale. La première, qui est égale à $-mg \sin \varphi$, entraîne le mouvement, la seconde est compensée par la réaction de la circonférence décrite par la masse m .

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Comme on a pour la circonférence $\varphi = \frac{s}{l}$, on obtient l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}.$$

C'est une équation différentielle du type II (car elle ne contient pas explicitement la variable indépendante t).

Intégrons-la comme il a été indiqué ci-dessus :

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p.$$

Par conséquent,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l}$$

ou

$$p dp = -g \sin \frac{s}{l} ds,$$

donc

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1.$$

Désignons par s_0 l'élongation maximum du point M . La vitesse du point est nulle lorsque $s = s_0$:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_0} = p \Big|_{s=s_0} = 0,$$

Ceci permet de déterminer C_1 :

$$0 = 2gl \cos \frac{s_0}{l} + C_1,$$

d'où

$$C_1 = -2gl \cos \frac{s_0}{l}.$$

Par conséquent,

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gl \left(\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l} \right)$$

ou, en appliquant à cette dernière relation la formule relative à la différence de cosinus :

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 4gl \sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}, \quad (5)$$

ou *)

$$\frac{ds}{dt} = 2 \sqrt{gl} \sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}. \quad (6)$$

C'est une équation à variables séparables. Séparons les variables :

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2 \sqrt{gl} dt. \quad (7)$$

Nous supposons pour l'instant que $s \neq s_0$, de sorte que le dénominateur de la fraction n'est pas nul. Si l'on suppose que $s=0$ lorsque $t=0$, on aura de l'égalité (7)

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2 \sqrt{gl} t. \quad (8)$$

Cette égalité donne la dépendance entre s et t . L'intégrale de gauche ne s'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires. Il en est de même de s comme fonction de t . Considérons le problème posé approximativement. Nous supposons que les angles $\frac{s_0}{l}$ et $\frac{s}{l}$ sont petits. Les angles $\frac{s+s_0}{2l}$ et $\frac{s_0-s}{2l}$ ne seront pas supérieurs à $\frac{s_0}{l}$. Remplaçons dans l'équation (6) les sinus par les angles :

$$\frac{ds}{dt} = 2 \sqrt{gl} \sqrt{\frac{s+s_0}{2l} \cdot \frac{s_0-s}{2l}} \quad (6')$$

ou

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{s_0^2 - s^2}.$$

*) Nous prenons le signe plus devant le radical. Il découlera de la remarque faite à la fin de ce problème qu'il n'y a pas lieu d'examiner le cas du signe moins.

Séparons les variables, on obtient (en supposant provisoirement que $s \neq s_0$)

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (7')$$

Nous supposons de nouveau que $s=0$ lorsque $t=0$. On obtient en intégrant cette équation :

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8')$$

ou

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

d'où

$$s = s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (9)$$

Remarque. Nous avons supposé jusqu'à présent $s \neq s_0$. Mais on peut s'assurer en substituant directement que la fonction (9) est solution de l'équation (6') quel que soit t .

Rappelons que la solution (9) est une solution approchée de l'équation (5), étant donné que nous avons remplacé l'équation (6) par l'équation approchée (6').

L'égalité (9) montre que le point M (que l'on peut considérer comme l'extrémité du pendule) accomplit des oscillations harmoniques de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Cette période ne dépend pas de l'amplitude de l'oscillation s_0 .

Exemple 4. Problème de la deuxième vitesse cosmique.

Déterminer la vitesse avec laquelle il faut lancer un corps verticalement vers le haut pour qu'il échappe à l'attraction terrestre. On négligera la résistance de l'air.

Solution. Désignons les masses de la Terre et du corps respectivement par M et m . En vertu de la loi d'attraction newtonienne la force f sollicitant le corps m est

$$f = k \frac{M \cdot m}{r^3},$$

où r est la distance entre le centre de la Terre et le centre de gravité du corps lancé, k est la constante de gravitation universelle.

L'équation différentielle du mouvement du corps de masse m est

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

ou

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}. \quad (10)$$

Nous avons pris le signe moins parce que l'accélération est ici négative. L'équation différentielle (10) est une équation de la forme (2). Nous la résoudreons en prenant pour conditions initiales :

$$\text{pour } t=0 \quad r=R, \quad \frac{dr}{dt} = v_0.$$

R est ici le rayon de la Terre et v_0 la vitesse de lancement. Introduisons les notations

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dr} \cdot \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dr},$$

v étant la vitesse du mouvement. On obtient en substituant dans l'équation (10) :

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}.$$

Séparons les variables :

$$v dv = -kM \frac{dr}{r^2}.$$

On obtient en intégrant cette équation

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + C_1. \quad (11)$$

Déterminons C_1 de la condition que $v = v_0$ à la surface de la Terre ($r = R$)

$$\frac{v_0^2}{2} = kM \frac{1}{R} + C_1$$

ou

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

Substituons la valeur de C_1 dans l'égalité (11) :

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

ou

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right). \quad (12)$$

Or, la vitesse du corps doit être constamment positive (elle ne s'annule pas), donc $\frac{v^2}{2} > 0$. Comme la quantité $\frac{kM}{r}$ devient arbitrairement petite lorsque r

croît indéfiniment, la condition $\frac{v^2}{2} > 0$ aura lieu pour tout r seulement si

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \quad (13)$$

ou

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

On a donc pour la vitesse minimum

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, \quad (14)$$

où

$$k = 6,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ cm.}$$

A la surface de la Terre, $r = R$, l'accélération de la force de pesanteur est g ($g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$). Ceci étant, on déduit de l'égalité (10)

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

ou

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Substituant cette valeur de M dans la formule (14), on obtient :

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

§ 19. Intégration graphique des équations différentielles du second ordre

Voyons quelle est l'interprétation géométrique d'une équation différentielle du second ordre. Soit l'équation

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1)$$

Désignons par φ l'angle formé par la tangente à la courbe avec l'axe positif Ox ; on a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Pour expliciter le sens géométrique de la dérivée seconde, rapelons-nous la formule du rayon de courbure d'une courbe en un point donné *)

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

D'où

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Or

$$y' = \operatorname{tg} \varphi; \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi;$$

$$(1 + y'^2)^{3/2} = |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|},$$

par conséquent,

$$y'' = \frac{1}{R |\cos^3 \varphi|}. \quad (3)$$

*) Nous supposons jusqu'à présent que le rayon de courbure était un nombre essentiellement positif, mais nous supposons dans ce paragraphe que le rayon de courbure pourra prendre des valeurs tant positives que négatives : si la courbe est convexe ($y'' < 0$), nous supposons le rayon de courbure négatif ($R < 0$); nous le supposons positif ($R > 0$) si la courbe est concave ($y'' > 0$).

Substituant à présent dans l'équation (1) les expressions obtenues pour y' et y'' , on aura

$$\frac{1}{R|\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \operatorname{tg} \varphi),$$

ou

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}. \quad (4)$$

Ce qui montre qu'une équation différentielle du second ordre détermine la grandeur du rayon de courbure de la courbe intégrale, une fois données les coordonnées du point et la direction de la tangente en ce point.

Il résulte de ce qui précède une méthode de construction approchée d'une courbe intégrale admettant une tangente continue *) en chaque point; la courbe est constituée d'arcs de cercles.

Ainsi, supposons que l'on doive tracer la courbe intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales:

$$y_x = x_0 = y_0; \quad y'_x = x_0 = y'_0.$$

Menons par le point $M_0(x_0, y_0)$ un rayon M_0T_0 de pente $y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ (fig. 272). On déduit de l'équation (4) $R = R_0$. Portons au segment M_0C_0 de longueur R_0 sur la perpendiculaire à la direction M_0T_0 et traçons du point C_0 pris pour centre un petit arc de cercle $\widehat{M_0M_1}$ de rayon R_0 . Remarquons qu'il faudra reporter le segment M_0C_0 du côté convenable pour que l'arc de cercle soit convexe vers le haut lorsque $R_0 < 0$ et qu'il soit convexe vers le bas lorsque $R_0 > 0$ (voir la note, p. 74).

Soit ensuite un point $M_1(x_1, y_1)$ sur l'arc de cercle construit, suffisamment voisin de M_0 , et soit $\operatorname{tg} \varphi_1$ la pente de la tangente M_1T_1 à la courbe au point M_1 . Déduisons de l'équation (4) la valeur $R = R_1$ correspondant à M_1 . Menons le segment M_1C_1 , égal à R_1 , perpendiculairement à M_1T_1 et, de C_1 comme centre, traçons un arc $\widehat{M_1M_2}$ de rayon R_1 . Prenons ensuite sur cet arc un point $M_2(x_2, y_2)$ voisin de M_1 et continuons notre construction jusqu'à ce que l'on obtienne un morceau de courbe suffisamment grand formé d'arcs de cercles. Il résulte de ce qui précède que cette courbe

*) C'est-à-dire que la pente est une fonction continue de l'arc s .

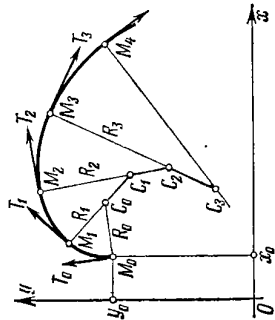


Fig. 272

est approximativement une courbe intégrale passant par le point M_0 . Il est évident que la courbe construite sera d'autant plus proche de la courbe intégrale que les arcs $\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, ... seront plus petits.

§ 20. Equations linéaires homogènes. Définitions et propriétés générales

Définition 1. Une équation différentielle d'ordre n est dite *linéaire* si elle est du premier degré par rapport à la fonction inconnue y et ses dérivées $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, c.-à-d. si elle est de la forme

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (1)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $f(x)$ sont des fonctions données de x ou des constantes, et $a_0 \neq 0$ quel que soit x dans le domaine de définition de l'équation (1). Nous supposons par la suite que les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $f(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de x et que $a_0 = 1$ (sinon il suffira de diviser tous les termes de x). La fonction $f(x)$ est appelée le *second membre de l'équation*.

Si $f(x) \neq 0$, l'équation est dite *non homogène* ou encore avec *second membre*. Si $f(x) \equiv 0$, l'équation s'écrit

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

et elle est dite *homogène* ou *sans second membre* (le premier membre de cette équation est une fonction homogène du premier degré par rapport à $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$).

Etablissons quelques propriétés fondamentales des équations linéaires homogènes, en nous bornant dans les démonstrations aux équations du second ordre.

Théorème 1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (3)$$

$y_1 + y_2$ est aussi solution de cette équation.

Démonstration. Etant donné que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation proposée, on a

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Substituant la somme $y_1 + y_2$ dans l'équation (3) et prenant en considération les identités (4), on aura

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) = (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) = 0 + 0 = 0,$$

ce qui montre que $y_1 + y_2$ est solution de l'équation.

T h é o r è m e 2. Si y_1 est solution de l'équation (3) et si C est une constante, Cy_1 est aussi une solution de cette équation.

D é m o n s t r a t i o n. Substituant dans l'équation (3) l'expression Cy_1 , on obtient :

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = C(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

et le théorème est démontré.

D é f i n i t i o n 2. Deux solutions y_1 et y_2 de (3) sont dites *linéairement indépendantes* sur le segment $[a, b]$ si leur rapport n'est pas constant sur ce segment, c.-à-d. si

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

Sinon, les solutions sont dites *linéairement dépendantes*. En d'autres termes, deux solutions y_1 et y_2 sont dites *linéairement dépendantes* sur le segment $[a, b]$ s'il existe une constante λ telle que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ pour $a \leq x \leq b$. On a alors $y_1 = \lambda y_2$.

E x e m p l e 4. Soit l'équation $y'' - y = 0$. On vérifie facilement que les fonctions $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$ sont des solutions de cette équation. Les fonctions e^x et e^{-x} sont linéairement indépendantes sur tout segment, étant donné que le rapport $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ ne reste pas constant lorsque x varie. Les fonctions e^x et $3e^x$, elles, sont linéairement dépendantes, car $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const.}$

D é f i n i t i o n 3. y_1 et y_2 étant des fonctions de x , le déterminant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

est appelé le *déterminant de Wronski* ou *wronskien* des fonctions données.

T h é o r è m e 3. Si les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur le segment $[a, b]$, leur wronskien est identiquement nul sur ce segment.

En effet, si $y_2 = \lambda y_1$, où $\lambda = \text{const.}$, $y_2' = \lambda y_1'$ et

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

T h é o r è m e 4. Si le déterminant de Wronski $W(y_1, y_2)$ des solutions y_1 et y_2 de l'équation linéaire homogène (3) n'est pas nul en un point $x = x_0$ du segment $[a, b]$ où les coefficients de l'équation sont continus, il ne s'annule nulle part sur ce segment.

D é m o n s t r a t i o n. y_1 et y_2 étant deux solutions de l'équation (3), on a

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Multipliant les termes de la première égalité par y_1 , ceux de la seconde par $-y_2$ et ajoutant, on obtient :

$$(y_1 y_2' - y_1' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \quad (5)$$

Le coefficient de a_1 dans (5) est le wronskien $W(y_1, y_2)$ et précisément $W(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)$. Le premier terme est la dérivée du wronskien :

$$W'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Par conséquent, l'égalité (5) s'écrit

$$W' + a_1 W = 0. \quad (6)$$

Trouvons la solution de la dernière équation satisfaisant à la condition initiale $W|_{x=x_0} = W_0$. Trouvons d'abord la solution générale de l'équation (6) en supposant $W \neq 0$. Séparant les variables dans l'équation (6), on obtient $\frac{dW}{W} = -a_1 dx$.

On obtient en intégrant

$$\text{Log } W = - \int_{x_0}^x a_1 dx + \text{Log } C$$

ou

$$\text{Log } \frac{W}{C} = - \int_{x_0}^x a_1 dx,$$

d'où

$$W = C e^{- \int_{x_0}^x a_1 dx}. \quad (7)$$

Il est à remarquer que l'on peut écrire la fonction (7) et dire qu'elle vérifie l'équation (6), ce dont on peut se convaincre aisément par substitution directe de cette fonction dans l'équation (6). L'hypothèse $W \neq 0$ n'est plus indispensable. La formule (7) est appelée *formule de Liouville*.

Déterminons C de sorte que soit vérifiée la condition initiale. Portant $x = x_0$ dans le premier et le second membre de l'égalité (7) nous trouvons

$$W_0 = C.$$

Par conséquent, la solution vérifiant les conditions initiales sera de la forme:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \quad (7')$$

Par hypothèse $W_0 \neq 0$. Il résulte alors de l'égalité (7') que $W \neq 0$ quel que soit x , car l'exponentielle ne peut s'annuler pour des valeurs finies de la variable. Le théorème est démontré.

R e m a r q u e 1. Si le wronskien est nul pour une certaine valeur $x = x_0$, il est alors nul pour toute valeur x du segment considéré. Ceci résulte directement de la formule (7) : si $W = 0$ pour $x = x_0$, alors

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

par conséquent, $W \equiv 0$ quelle que soit la valeur de la borne supérieure x dans la formule (7).

T h é o r è m e 5. Si les solutions y_1 et y_2 de l'équation (3) sont linéairement indépendantes sur le segment $[a, b]$, le déterminant de Wronski formé avec ces solutions ne s'annule en aucun point de ce segment.

D é m o n s t r a t i o n. Avant d'entamer la démonstration faisons les remarques suivantes. La fonction $y \equiv 0$ est une solution de l'équation (3) sur le segment $[a, b]$, satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=x_0} = 0, \quad y'_{x=x_0} = 0,$$

où x_0 est un point quelconque du segment $[a, b]$. En vertu du théorème d'existence et d'unicité (cf. § 16) qui s'applique à l'équation (3), il résulte que cette équation ne possède aucune autre solution satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=x_0} = 0, \quad y'_{x=x_0} = 0.$$

Toujours du même théorème il résulte que si une solution de l'équation (3) est identiquement nulle sur un certain segment ou intervalle (α, β) contenu dans le segment $[a, b]$, cette solution est identiquement nulle sur tout le segment $[a, b]$. En effet, au point $x = \beta$ (et au point $x = \alpha$) la solution satisfait aux conditions initiales

$$y_{x=\beta} = 0, \quad y'_{x=\beta} = 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème d'unicité elle est nulle dans un certain intervalle $\beta - d < x < \beta + d$, où d est déterminé par la valeur des coefficients de l'équation (3). En élargissant donc chaque fois d'une grandeur d l'intervalle où $y \equiv 0$, on montre que $y \equiv 0$ sur tout le segment $[a, b]$.

Ceci dit, passons maintenant à la démonstration du théorème (5).

Supposons que $W(y_1, y_2) = 0$ en un certain point du segment $[a, b]$. D'après le théorème 3 le wronskien sera nul en tous les points du segment $[a, b]$

$$W = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

Supposons que $y_1 \neq 0$ sur le segment $[a, b]$. Par conséquent,

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const},$$

c'est-à-dire que y_1 et y_2 sont linéairement dépendants, ce qui contredit l'hypothèse de leur indépendance linéaire.

Supposons encore que $y_1 = 0$ aux points $x_1, x_2, \dots, x_k$, du segment $[a, b]$. Considérons l'intervalle (a, x_1) . Dans cet intervalle $y_1 \neq 0$. De ce que nous venons tout juste de démontrer il découle donc que dans l'intervalle (a, x_1)

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const} \quad \text{ou} \quad y_2 = \lambda y_1.$$

Considérons la fonction $y = y_2 - \lambda y_1$. Les fonctions y_2 et y_1 étant solutions de l'équation (3), $y = y_2 - \lambda y_1$ est également solution de cette équation et $y \equiv 0$ dans l'intervalle (a, x_1) . Par conséquent, d'après les remarques faites en début de démonstration il s'ensuit que $y = y_2 - \lambda y_1 \equiv 0$ sur le segment $[a, b]$ ou

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda$$

sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire que y_2 et y_1 sont linéairement dépendants.

Ceci étant contraire à l'hypothèse sur l'indépendance linéaire des solutions y_1 et y_2 , nous avons donc démontré que le wronskien ne s'annule en aucun point du segment $[a, b]$.

T h é o r è m e 6. Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3), alors

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (8)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, est la solution générale de cette équation.

D é m o n s t r a t i o n. Il résulte des théorèmes 1 et 2 que la fonction

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

est solution de l'équation (3), quelles que soient les constantes C_1 et C_2 .

Montrons à présent que, quelles que soient les conditions initiales les $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, il est possible de choisir les valeurs des constantes C_1 et C_2 de sorte que la solution particulière correspondante $C_1 y_1 + C_2 y_2$ satisfasse aux conditions initiales.

Substituant les conditions initiales dans l'égalité (8), on a

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

où l'on a posé

$$\left. \begin{aligned} (y_1)_{x=x_0} &= y_{10}; & (y_2)_{x=x_0} &= y_{20}; \\ (y'_1)_{x=x_0} &= y'_{10}; & (y'_2)_{x=x_0} &= y'_{20}. \end{aligned} \right.$$

On peut tirer C_1 et C_2 du système (9), car le déterminant de ce système

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y'_{10} y_{20}$$

est le déterminant de Wronski pour $x = x_0$ et n'est donc pas nul (étant donné que les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes). La solution particulière déduite de la famille (8) en y remplaçant C_1 et C_2 par les valeurs trouvées satisfait aux conditions initiales données. Le théorème est démontré.

E x e m p l e 2. L'équation

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0,$$

dont les coefficients $a_1 = \frac{1}{x}$ et $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ sont continus sur tout segment ne contenant pas le point $x = 0$, admet les solutions particulières

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(il est facile de le vérifier en substituant dans l'équation). La solution générale s'écrit donc

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

R e m a r q u e 2. Il n'existe pas de méthode générale permettant de trouver sous forme finie la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients variables. Toutefois, il existe une telle méthode pour les équations à coefficients constants. Elle

fera l'objet du paragraphe suivant. Pour ce qui est des équations dont les coefficients sont variables, on indiquera au chapitre XVI « Séries » plusieurs procédés permettant de trouver des solutions approchées satisfaisant aux conditions initiales.

Nous allons démontrer maintenant un théorème permettant de trouver la solution générale d'une équation différentielle du second ordre à coefficients variables si l'on connaît une solution particulière. Comme on arrive parfois à trouver ou à deviner directement une solution particulière, ce théorème peut être utile dans maints cas.

T h é o r è m e 7. Si l'on connaît une solution particulière d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, la recherche de la solution générale se ramène à des quadratures.

D é m o n s t r a t i o n. Soit y_1 une solution particulière connue de l'équation

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Trouvons une autre solution particulière de l'équation proposée telle que y_1 et y_2 soient linéairement indépendantes. La solution générale s'écrit alors $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. On peut écrire en vertu de la formule (7) (voir la démonstration du théorème 4) :

$$y'_2 y_1 - y_2 y'_1 = C e^{-\int a_1 dx}.$$

Par conséquent, on a pour la détermination de y_2 une équation linéaire du premier ordre. Intégrons-la comme suit. Divisons tous les termes par y_1^2 :

$$\frac{y'_2 y_1 - y_2 y'_1}{y_1^2} = -\frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = -\frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx},$$

d'où

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C'.$$

Comme nous cherchons une solution particulière, on aura en posant $C' = 0$, $C = 1$:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \quad (10)$$

Il est évident que y_1 et y_2 sont des solutions linéairement indépendantes, car $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const.}$

La solution générale de l'équation proposée s'écrit donc

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \quad (11)$$

Exemple 3. Trouver la solution générale de l'équation

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Solution. On vérifie directement que cette équation a pour solution particulière $y_1 = x$. Trouvons une seconde solution particulière y_2 telle que y_1 et y_2 soient linéairement indépendantes.

Remarquant que $a_1 = -\frac{2x}{1-x^2}$, on obtient, en vertu de la formule (10) :

$$\begin{aligned} y &= x \int e^{\frac{\int 2x dx}{1-x^2}} dx = x \int \frac{e^{-\text{Log} |1-x^2|}}{x^2} dx = \\ &= x \int \frac{dx}{x^2 |1-x^2|} = x \int \left(\pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = \\ &= x \left[\mp \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]. \end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \text{Log} \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \mp 1 \right).$$

§ 21. Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Soit l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

où p et q sont des constantes réelles. Pour trouver l'intégrale générale de cette équation, il suffit, comme nous l'avons montré plus haut, de trouver deux solutions particulières linéairement indépendantes.

Cherchons les solutions particulières sous la forme

$$y = e^{kx}, \quad \text{où } k = \text{const}; \quad (2)$$

alors

$$y' = k e^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Substituons ces expressions des dérivées dans l'équation (1) :

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Comme $e^{kx} \neq 0$, on doit avoir

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3)$$

Par conséquent, si k est racine de l'équation (3), la fonction e^{kx} sera solution de l'équation (1). L'équation (3) est appelée *équation caractéristique* de l'équation (1).

L'équation caractéristique est une équation du second degré dont nous désignerons les racines par k_1 et k_2 . On a

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Les trois cas suivants peuvent se présenter :

I. k_1 et k_2 sont des nombres réels distincts ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 et k_2 sont des nombres complexes;

III. k_1 et k_2 sont des nombres réels égaux ($k_1 = k_2$).

Examinons chaque cas séparément.

I. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes: $k_1 \neq k_2$. On aura alors pour solutions particulières

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes, car

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$$

L'intégrale générale s'écrit, par conséquent,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Exemple 1. Soit l'équation

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Trouvons les racines de cette équation :

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2};$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

L'intégrale générale est

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

II. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes. Etant donné que les racines complexes sont conjuguées, posons :

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

où

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

On peut mettre les solutions particulières sous la forme

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}; \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}. \quad (4)$$

Ce sont des fonctions complexes d'une variable réelle vérifiant l'équation différentielle (1) (voir § 4, chap. VII).

Il est évident que si une fonction complexe d'une variable réelle

$$y = u(x) + iv(x) \quad (5)$$

vérifie l'équation (1), cette équation est vérifiée séparément par les fonctions $u(x)$ et $v(x)$.

En effet, substituons l'expression (5) dans l'équation (1):

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ou

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Mais une fonction complexe n'est nulle que si, et seulement si, les parties réelle et imaginaire sont nulles séparément, c.-à-d.

$$\begin{aligned} u'' + pu' + qu &= 0, \\ v'' + pv' + qv &= 0. \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que $u(x)$ et $v(x)$ sont solutions de l'équation proposée.

Recopions les solutions complexes (4) sous forme de somme des parties réelle et imaginaire:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x, \\ y_2 &= e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

D'après ce qui vient d'être démontré, les fonctions réelles suivantes seront des solutions particulières de l'équation (1):

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (6')$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (6'')$$

Les fonctions $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ sont linéairement indépendantes, car

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \cotg \beta x \neq \text{const.}$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (1) dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont complexes prend la forme

$$y = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ou

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad (7)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Un important cas particulier de la solution (7) est celui où les racines de l'équation caractéristique sont des *nombre imaginaires pures*.

Ceci a lieu lorsque dans l'équation (1) $p = 0$. A ce moment $y'' + qy = 0$.

L'équation caractéristique (3) prend la forme

$$k^2 + q = 0, \quad q > 0.$$

Ses racines sont donc

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \quad \alpha = 0.$$

Par suite la solution (7) est de la forme

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

Exemple 2. Soit l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Trouver l'intégrale générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$. Construire la courbe intégrale correspondante.

Solution. 1) Écrivons l'équation caractéristique

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

et trouvons ses racines:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

2) Trouvons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données: déterminons à cet effet les valeurs correspondantes de C_1 et C_2 . On déduit de la première condition:

$$0 = e^{-0} (C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0), \quad \text{d'où } C_1 = 0.$$

Remarquons que

$$y' = e^{-x} 2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x,$$

on déduit de la seconde condition:

$$1 = 2C_2, \quad \text{ou bien } C_2 = \frac{1}{2}.$$

La solution particulière cherchée est donc

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

La courbe est représentée par la fig. 273.

Exemple 3. Soit l'équation

$$y'' + 9y = 0.$$

Trouver l'intégrale générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 3.$$

Solution. Écrivons l'équation caractéristique

$$k^2 + 9 = 0.$$

Ses racines sont

$$k_1 = 3i, \quad k_2 = -3i.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Cherchons maintenant la solution particulière. Dérivons

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

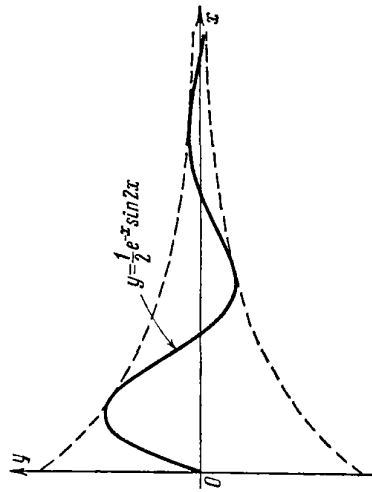


Fig. 273

En appliquant les conditions initiales, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ 3 &= -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

La solution particulière est donc

$$y = \sin 3x.$$

III. L'équation caractéristique admet une racine réelle double. On a alors $k_1 = k_2$.

On obtient une solution particulière $y_1 = e^{k_1 x}$ en vertu des raisonnements précédents. Il faut trouver une seconde solution particulière linéairement indépendante de la première (la fonction $e^{k_2 x}$ est identiquement égale à $e^{k_1 x}$ et ne peut être considérée comme une seconde solution particulière).

Nous cherchons la seconde solution particulière sous la forme

$$y_2 = u(x) e^{k_1 x},$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue que l'on doit déterminer.

Dérivons :

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

On obtient en substituant les expressions des dérivées dans l'équation (1) :

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Comme k_1 est une racine double de l'équation caractéristique, on a $k_1^2 + pk_1 + q = 0$.

En outre, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ou $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Par conséquent, pour trouver $u(x)$, il faut résoudre l'équation $e^{k_1 x} u'' = 0$ ou $u'' = 0$. On trouve en intégrant $u = C_1 x + C_2$. On peut poser $C_1 = 1$, $C_2 = 0$; on a alors $u = x$. On peut donc prendre pour seconde solution la fonction

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Cette solution est linéairement indépendante de la première, étant donné que $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const.}$ On prendra donc pour intégrale générale la fonction

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

Exemple 4. Soit l'équation

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

L'équation caractéristique $k^2 - 4k + 4 = 0$ a pour racines $k_1 = k_2 = 2$. L'intégrale générale s'écrit :

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

§ 22. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants

Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Nous supposons que $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes. Avant d'indiquer une méthode de résolution de l'équation (1), nous donnerons deux définitions qui nous seront utiles par la suite.

Définition 1. Si l'on a pour tous les x du segment $[a, b]$ l'égalité

$$\varphi_n(x) = A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \dots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x),$$

où $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des constantes non toutes nulles, on dit que $\varphi_n(x)$ est une *combinaison linéaire des fonctions* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

Définition 2. n fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ sont dites *linéairement indépendantes* si aucune d'elles ne peut être représentée comme combinaison linéaire des autres.

Remarque 1. Il résulte de ces définitions que si les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ sont *linéairement dépendantes*, il existe alors des constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ non toutes nulles et telles que l'on a, quel que soit x pris sur le segment $[a, b]$,

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Exemple 1. Les fonctions $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = 3e^x$ sont linéairement dépendantes, car on a pour $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = -\frac{1}{3}$ l'identité

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_33e^x \equiv 0.$$

Exemple 2. Les fonctions $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ sont linéairement indépendantes, car on ne peut annuler identiquement l'expression

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

avec des C_1, C_2, C_3 non tous nuls.

Exemple 3. Les fonctions $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}, \dots, y_n = e^{k_nx}, \dots$, avec $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ arbitraires, sont linéairement indépendantes. (Nous ne démontrons pas cette proposition.)

Passons maintenant à la solution de l'équation (1). On a pour cette équation le théorème suivant.

Théorème. Si les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1), sa solution générale est de la forme

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \quad (2)$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

Si les coefficients de l'équation (1) sont constants, on trouve la solution générale tout comme pour l'équation du second ordre.

1) On forme l'équation caractéristique

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

2) On trouve les racines de l'équation caractéristique

$$k_1, k_2, \dots, k_n.$$

3) Suivant le caractère des racines, on écrit les solutions particulières linéairement indépendantes en partant de ce qui suit :

a) il correspond à toute racine réelle simple k une solution particulière e^{kx} ;

b) il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées simples $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ et $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ deux solutions particulières $e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

c) il correspond à toute racine réelle k d'ordre de multiplicité r autant de solutions particulières linéairement indépendantes

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx};$$

d) il correspond à tout couple de racines complexes conjuguées $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$, d'ordre de multiplicité $\mu, 2\mu$ solutions particulières :

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Le nombre de ces solutions est égal au degré de l'équation caractéristique (qui est aussi l'ordre de l'équation différentielle proposée). On démontre que ces solutions sont linéairement indépendantes.

4) Ayant trouvé n solutions linéairement indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_n$, on écrit la solution générale de l'équation différentielle proposée sous la forme

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

Exemple 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$y^{IV} - y = 0.$$

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$k^4 - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont :

$$k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

où C_1, C_2, C_3, C_4 sont des constantes arbitraires.

Remarque 2. Il résulte de ce qui précède que toute la difficulté de la résolution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est dans la résolution de l'équation caractéristique correspondante.

§ 23. Equations linéaires non homogènes du second ordre

Soit une équation linéaire non homogène du second ordre

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (1)$$

La structure de la solution générale de l'équation (1) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1. *La solution générale de l'équation non homogène (1) est la somme d'une solution particulière quelconque y^* de cette équation et de la solution générale $\bar{y}$ de l'équation homogène correspondante*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (2)$$

Démonstration. On doit démontrer que la somme

$$y = \bar{y} + y^* \quad (3)$$

est la solution générale de l'équation (1). Démontrons en premier lieu que la fonction (3) est une solution de l'équation (1).

Substituons la somme $\bar{y} + y^*$ dans l'équation (1) au lieu de y , on aura :

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ou

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x). \quad (4)$$

$\bar{y}$ étant solution de l'équation (2), l'expression dans les premières parenthèses est identiquement nulle. y^* étant une solution de l'équation (1), l'expression dans les secondes parenthèses est égale à $f(x)$. L'égalité (4) est donc une identité. La première partie du théorème est ainsi démontrée.

Montrons à présent que l'expression (3) est la solution générale de l'équation (1), c.-à-d. que l'on peut choisir les constantes arbitraires qu'elle contient de manière que soient satisfaites les conditions initiales :

$$\left. \begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

quels que soient x_0 , y_0 et y'_0 (pourvu que x_0 soit pris dans le domaine de continuité des fonctions a_1 , a_2 et $f(x)$).

Remarquons que l'on peut mettre y sous la forme

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2) et C_1 et C_2 des constantes arbitraires, on peut recopier l'équa-

lité (3) sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \quad (3')$$

Il résulte des conditions (5) que *)

$$\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* &= y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*'} &= y'_0. \end{aligned}$$

Il nous faut déduire C_1 et C_2 de ce système. Recopions-le sous la forme

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

On remarque que le déterminant des coefficients des inconnues C_1 et C_2 est le wronskien des fonctions y_1 et y_2 calculé au point $x = x_0$. Etant donné que ces fonctions sont linéairement indépendantes par hypothèse, le wronskien n'est pas nul; le système (6) possède donc une solution bien déterminée C_1 et C_2 , c.-à-d. qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que la formule (3) définit la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales données. Le théorème est complètement démontré.

Par conséquent, si l'on connaît la solution générale $\bar{y}$ de l'équation sans second membre (2), le problème revient à trouver une solution particulière quelconque y^* de l'équation avec second membre (1).

Indiquons une méthode générale permettant de trouver des solutions particulières d'une équation avec second membre.

Méthode de la variation des constantes arbitraires. Écrivons la solution générale de l'équation homogène (2) :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (7)$$

Nous allons chercher une solution particulière de l'équation non homogène (1) sous la forme (7) en considérant C_1 et C_2 comme des fonctions de x qu'il faut déterminer.

Dérivons l'égalité (7) :

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2.$$

Choisissons les fonctions C_1 et C_2 de manière que soit satisfaite l'égalité

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0. \quad (8)$$

Ceci étant, la dérivée première y' devient

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

) Ici y_{10} , y_{20} , y_0^ , y'_{10} , y'_{20} , $y_0^{*'}$ sont les valeurs que prennent les fonctions y_1 , y_2 , y^* , y'_1 , y'_2 , $y^{*'}$ pour $x = x_0$.

Dérivons maintenant cette expression, on trouve y'' :

$$y'' = C_{1y_1}'' + C_{2y_2}'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Substituons y , y' , y'' dans l'équation (1), on obtient:

$$C_{1y_1}'' + C_{2y_2}'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + a_1(C_{1y_1}' + C_{2y_2}') + a_2(C_{1y_1} + C_{2y_2}) = f(x)$$

ou

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Les expressions contenues dans les deux premières parenthèses s'annulent du fait que y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène. Par conséquent, cette dernière égalité prend la forme

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \quad (9)$$

Ainsi, la fonction (7) est une solution de l'équation avec second membre (1) pourvu que les fonctions C_1 et C_2 satisfassent aux équations (8) et (9), c.-à-d. si l'on a

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \quad C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Or, le déterminant de ce système est le wronskien des solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de l'équation (2), donc il n'est pas nul; on trouve C_1' et C_2' comme fonctions de x en résolvant le système précédent:

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

On trouve en intégrant:

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2,$$

où $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$ sont des constantes d'intégration.

Substituant les expressions de C_1 et C_2 dans l'égalité (7), on trouve une intégrale dépendant de deux constantes arbitraires $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$, c.-à-d. la solution générale de l'équation avec second membre *).

Exemple. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Solution. Trouvons la solution générale de l'équation homogène

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

On a:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \text{Log } y' = \text{Log } x + \text{Log } C, \quad y' = Cx;$$

ainsi,

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

*) Si l'on pose $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, on obtient une solution particulière de l'équation (1).

Pour que cette expression soit la solution de l'équation proposée, il faut déterminer C_1 et C_2 comme fonctions de x du système

$$C_1'x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1'x + C_2' \cdot 0 = x.$$

On trouve en résolvant ce système:

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{1}{2}x^2,$$

et par intégration:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Substituant les fonctions trouvées dans la formule $y = C_1x^2 + C_2$, on obtient la solution générale de l'équation avec second membre:

$$y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

ou $y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2}$, où $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$ sont des constantes arbitraires.

Le théorème suivant peut être utile pour la recherche de solutions particulières.

Théorème 2. La solution y^* de l'équation

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x), \quad (10)$$

où le second membre est la somme de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, peut être exprimée sous la forme d'une somme $y^* = y_1^* + y_2^*$, où y_1^* et y_2^* sont les solutions respectives des équations

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = f_1(x), \quad (11)$$

$$y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = f_2(x). \quad (12)$$

Démonstration. En ajoutant membre à membre les équations (11) et (12), on obtient:

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(y_1^* + y_2^*)' + a_2(y_1^* + y_2^*) = f_1(x) + f_2(x). \quad (13)$$

Par conséquent, $y_1^* + y_2^* = y^*$ est une solution de l'équation (10).

Exemple. Trouver la solution particulière y^* de l'équation

$$y'' - 4y = x + 3e^x.$$

Solution: La solution particulière de l'équation

$$y_1'' + 4y_1 = x$$

est

$$y_1^* = \frac{1}{4}x.$$

*) Il est évident que ce théorème subsiste pour un nombre arbitraire de termes dans le second membre.

Celle de l'équation

$$y_2'' + 4y_2' = 3e^x$$

est

$$y_2^* = \frac{3}{5} e^x.$$

La solution particulière y^* de l'équation donnée est donc :

$$y^* = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x.$$

§ 24. Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants

Soit l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$

où p et q sont des nombres réels.

On a indiqué au paragraphe précédent une méthode générale de recherche des solutions des équations non homogènes. Lorsque l'équation est à coefficients constants, il est parfois plus simple de trouver une solution particulière sans intégration. Considérons les types d'équations (1) auxquelles cette remarque s'applique.

I. Supposons que le second membre de l'équation (1) soit le produit d'une exponentielle par un polynôme :

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \quad (2)$$

où $P_n(x)$ est un polynôme du n -ième degré. Les cas suivants peuvent se présenter :

a) Le nombre α n'est pas une racine de l'équation caractéristique

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Il faut alors chercher la solution particulière sous la forme

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}. \quad (3)$$

En effet, substituant y^* dans l'équation (1) et simplifiant par $e^{\alpha x}$, on aura

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x). \quad (4)$$

$Q_n(x)$ est un polynôme de degré n , $Q_n'(x)$ et $Q_n''(x)$ sont respectivement des polynômes de degrés $n-1$ et $n-2$. On a donc de part et d'autre du signe d'égalité des polynômes de degré n . Egalant les coefficients des mêmes puissances de x (le nombre des coefficients inconnus est égal à $n+1$), on obtient un système de $n+1$ équations pour la détermination des coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

b) α est une racine simple de l'équation caractéristique.

Si l'on cherchait alors une solution particulière sous la forme (3), on obtiendrait dans le premier membre de l'égalité (4) un polynôme de degré $n-1$, étant donné que le coefficient de $Q_n'(x)$, soit $\alpha^2 + p\alpha + q$, est nul et que $Q_n''(x)$ et $Q_n'(x)$ sont des polynômes de degrés inférieurs à n . Par conséquent, l'égalité (4) ne pourrait être une identité quel que soit le choix des constantes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$. Donc, dans le cas considéré, on cherchera la solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré $n+1$ privé de son terme constant (car ce dernier disparaît après dérivation *) :

$$y^* = xQ_n(x) e^{\alpha x}.$$

c) α est une racine double de l'équation caractéristique. Le degré du polynôme s'abaisse alors de deux unités quand on substitue la fonction $Q_n(x) e^{\alpha x}$ dans l'équation différentielle. En effet, α étant une racine de l'équation caractéristique, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; en outre, α étant racine double, on a $2\alpha + p = 0$ (on sait, en effet, que la somme des racines de l'équation réduite du second degré est égale au coefficient du terme du premier degré pris avec le signe moins). Ainsi, $2\alpha + p = 0$.

Il reste donc dans le premier membre de l'égalité (4) $Q_n''(x) e^{\alpha x}$, d. à d. un polynôme de degré $n-2$. Pour que le résultat de la substitution soit un polynôme de degré n , il faut chercher une solution particulière sous forme de produit de $e^{\alpha x}$ par un polynôme de degré $n+2$. La constante et le terme du premier degré de ce polynôme disparaissent alors après dérivation et on pourra les omettre dans la solution particulière.

Ainsi donc, lorsque α est une racine double de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

Exemple 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 4y' - 3y = x.$$

Solution. La solution générale de l'équation homogène correspondante est

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Comme le second membre de l'équation non homogène est de la forme $x e^{0x}$ [c. à d. de la forme $P_1(x) e^{\alpha x}$] et n'étant pas racine de l'équation caractéristique ($k^2 + 4k - 3 = 0$), nous chercherons une solution particulière sous la forme $y^* = Q_1(x) e^{0x}$, c. à d. que nous posons

$$y^* = A_0 x + A_1.$$

*) Notons que tous les résultats apportés ci-dessus sont également valables lorsque α est un nombre complexe (ceci résulte des règles de dérivation de la fonction $e^{\alpha x}$, m étant un nombre complexe arbitraire; voir § 4, ch. VII).

donc une solution particulière sous la forme $y^* = xQ_1(x)e^x$ ou

$$y^* = x(Ax + B)e^x;$$

substituons cette expression dans l'équation, on a :

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) - + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x,$$

ou encore

$$(-10A - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x.$$

On obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de x :

$$-10A = 1, \quad B = \frac{9}{25}.$$

d'où $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. On a donc pour solution particulière

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x,$$

et la solution générale s'écrit

$$y = Ce^{3x} + C_2e^x + x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x.$$

II. Supposons le second membre de la forme

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (5)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

On peut examiner ce cas comme précédemment en passant des fonctions trigonométriques à des exponentielles. Remplaçons $\cos \beta x$ et $\sin \beta x$ par leurs expressions exponentielles données par les formules d'Euler (voir § 5, chap. VII); on obtient :

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x)e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

ou

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2i}Q(x) \right] e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2}P(x) - \frac{1}{2i}Q(x) \right] e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

On a dans les crochets des polynômes dont le degré est égal au degré le plus élevé de $P(x)$ ou de $Q(x)$. On voit que le second membre a été mis sous la forme du cas I.

On montre (nous ne le démontrons pas) qu'on peut trouver des solutions particulières ne contenant pas de quantités complexes.

Par conséquent, lorsque le second membre de l'équation (4) est de la forme

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (7)$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant des polynômes, on détermine comme suit la forme de la solution particulière :

Substituons cette expression dans l'équation proposée, on a :

$$4A_0 + 3(A_0x + A_1) = x.$$

On déduit, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x de part et d'autre du signe d'égalité :

$$3A_0 = 1, \quad 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

d'où

$$A_0 = \frac{1}{3}; \quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Par conséquent,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

La solution générale $y = y^* + y^*$ sera

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Exemple 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Solution. On trouve facilement la solution générale de l'équation :

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Le second membre de l'équation donnée $(x^2 + 1)e^{3x}$ est de la forme

$$P_2(x)e^{3x}.$$

Comme le coefficient 3 dans l'exposant n'est pas une racine de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution particulière sous la forme

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \text{ ou } y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Substituons cette expression dans l'équation différentielle :

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Simplifions par e^{3x} et égalons les coefficients des mêmes puissances de x , on obtient :

$$18A = 1, \quad 12A + 18B = 0, \quad 2A + 6B + 18C = 1,$$

d'où $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$. La solution particulière est donc

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$$

et la solution générale

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}.$$

Exemple 3. Résoudre l'équation

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Solution. Le second membre est ici de la forme $P_1(x)e^{1 \cdot x}$, où 1 de l'exposant est une racine simple du polynôme caractéristique. Nous chercherons

a) si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, il faut chercher une solution particulière de l'équation (4) sous la forme

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (8)$$

$U(x)$ et $V(x)$ étant des polynômes dont le degré est égal au degré le plus élevé de $P(x)$ ou de $Q(x)$;

b) si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, on prendra une solution particulière sous la forme

$$y^* = x [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x]. \quad (9)$$

Pour éviter des erreurs possibles, notons que les formes indiquées des solutions particulières (8) et (9) sont évidemment conservées aussi dans le cas où dans le second membre de l'équation (4) l'un des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est identiquement nul, c.-à-d. quand le second membre est de la forme

$$P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{ou} \quad Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Considérons ensuite un cas particulier important. Supposons que le second membre d'une équation linéaire du second ordre soit de la forme

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x, \quad (7')$$

où M et N sont des constantes.

a) Si βi n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x. \quad (8')$$

b) Si βi est racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = x (A \cos \beta x + B \sin \beta x). \quad (9')$$

Notons que la fonction (7') est un cas particulier de la fonction (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); les fonctions (8') et (9') sont des cas particuliers des fonctions (8) et (9).

Exemple 4. Trouver l'intégrale générale de l'équation linéaire non homogène

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

Solution. L'équation caractéristique $k^2 + 2k + 5 = 0$ a pour racines $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$. L'intégrale générale de l'équation homogène correspondante s'écrit donc

$$\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

A et B étant des constantes à déterminer.

Substituons y^* dans l'équation proposée, on a :

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Egalant les coefficients de $\cos x$ et de $\sin x$, on obtient deux équations pour déterminer A et B :

$$-A + 2B + 5A = 2; \quad -B - 2A + 5B = 0.$$

$$\text{d'où } A = \frac{2}{5}, \quad B = \frac{1}{5}.$$

La solution générale de l'équation proposée, $y = \bar{y} + y^*$, est

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Exemple 5. Résoudre l'équation

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Solution. Les racines de l'équation caractéristique sont $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; la solution générale de l'équation homogène est donc

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = x (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

On a :

$$y^{*'} = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$y^{*''} = -4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Substituons ces expressions des dérivées dans l'équation proposée et égalons les coefficients de $\cos 2x$ et de $\sin 2x$; on obtient un système d'équations pour la détermination de A et B :

$$4B = 1; \quad -4A = 0;$$

d'où $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$. L'intégrale générale de l'équation donnée est donc

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Exemple 6. Résoudre l'équation

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x.$$

Solution. Le second membre de l'équation est de la forme

$$f(x) = e^{2x} (M \cos x + N \sin x)$$

avec $M = 3$, $N = 0$. L'équation caractéristique $\lambda^2 - 1 = 0$ a pour racines $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Comme $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y^* = e^{2x} (A \cos x + B \sin x).$$

Dérivons y^* quatre fois et substituons les expressions obtenues dans l'équation donnée, on obtient :

$$-A_0x^3 - A_1x^2 - A_2x - A_3 = x^3 + 1.$$

Egalons les coefficients des mêmes puissances de x , on a :

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Par conséquent,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

On trouve l'intégrale générale de l'équation complète sous la forme $y = \bar{y} + y^*$, soit

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Exemple 2. Résoudre l'équation

$$y^{IV} - y = 5 \cos x.$$

Solution. L'équation caractéristique $k^4 - 1 = 0$ a pour racines $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Le second membre de l'équation proposée est de la forme

$$f(x) = M \cos x + N \sin x,$$

avec $M = 5$, $N = 0$.

Comme i est une racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

On trouve en substituant cette expression dans l'équation :

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

d'où $4A = 0$, $-4B = 5$

ou $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$. La solution particulière de l'équation différentielle proposée est donc

$$y^* = -\frac{5}{4} x \sin x$$

et la solution générale

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x.$$

§ 26. Equations différentielles d'oscillations mécaniques

L'objet de ce paragraphe et des paragraphes suivants est l'étude d'un problème de mécanique appliquée au moyen d'équations différentielles linéaires.

Considérons une masse Q posée sur un ressort à boudin (fig. 274). Soit y l'écart de cette masse à sa position d'équilibre. L'écart vers le bas sera considéré comme positif, l'écart vers le haut sera négatif.

Dans la position d'équilibre la force de pesanteur agissant sur la masse est compensée par l'élasticité du ressort. Supposons que la force de rappel soit proportionnelle à l'écart, c.-à-d. qu'elle s'exprime par $-ky$, où k est une constante donnée appelée la « rigidité » du ressort *).

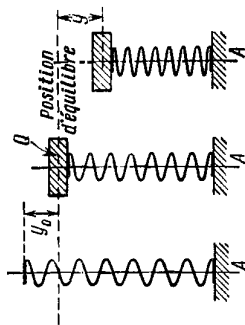


Fig. 274

Supposons qu'il s'oppose au mouvement de la masse Q une force de résistance proportionnelle à la vitesse du mouvement par rapport au point le plus bas du ressort, c.-à-d. une force $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, où $\lambda = \text{const} > 0$ (un amortisseur). Écrivons l'équation différentielle du mouvement. On a en vertu de la seconde loi de Newton

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

(k et λ sont des nombres positifs). Nous avons obtenu une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.

Écrivons-la sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad (1')$$

avec

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}.$$

Supposons en outre que le point inférieur du ressort effectue un mouvement vertical obéissant à la loi $z = \varphi(t)$. Tel est le cas si le

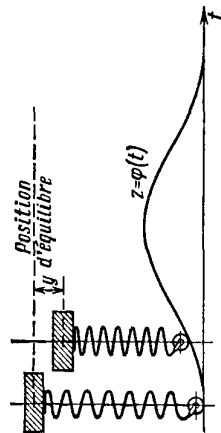


Fig. 275

ressort est fixé par son extrémité inférieure à un rouleau décrivant un contour donné (fig. 275).

*) Un ressort dont la force de rappel est proportionnelle à la déformation est dit à « caractéristique linéaire ».

La force de rappel sera alors non pas $-ky$ mais $-k[y + \varphi(t)]$, la force de résistance sera $-\lambda[y' + \varphi'(t)]$ et on obtient au lieu de l'équation (1)

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \quad (2)$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad (2')$$

où l'on a posé

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Nous avons obtenu une équation différentielle du second ordre avec second membre.

L'équation (1') est appelée équation des *oscillations libres*, l'équation (2') est celle des *oscillations forcées*.

§ 27. Oscillations libres. Représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques

Considérons d'abord l'équation des oscillations libres

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p > 0, q > 0, \text{ voir § 26}). \quad (1)$$

Ecrivons l'équation caractéristique correspondante

$$k^2 + pk + q = 0$$

et trouvons ses racines :

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) Soit $\frac{p^2}{4} > q$. Les racines k_1 et k_2 sont alors des nombres réels négatifs. La solution générale s'exprime par des exponentielles :

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, k_2 < 0). \quad (2)$$

Il résulte de cette formule que l'élongation y tend asymptotiquement vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$, quelles que soient les conditions initiales. Il n'y a pas d'oscillations dans le cas donné, car la force de freinage est grande par rapport au coefficient de rigidité du ressort k .

2) Soit $\frac{p^2}{4} = q$; on a alors une racine double $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. La solution générale s'écrit donc :

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{p}{2}t}. \quad (3)$$

Là encore l'élongation tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$, mais moins vite que dans le cas précédent (étant donné le facteur $C_1 + C_2 t$).

3) Soit $p = 0$, c.-à-d. que l'on suppose le freinage absent.

L'équation (1) est alors de la forme

$$y'' + qy = 0. \quad (4)$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$k^2 + q = 0,$$

et elle a pour racines $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$, avec $\beta = \sqrt{q}$. La solution générale est

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t. \quad (5)$$

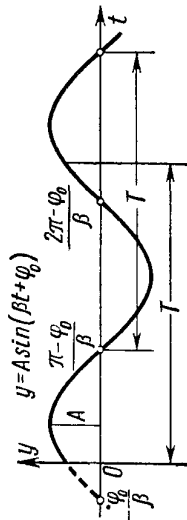


Fig. 276

Remplaçons dans cette formule les constantes arbitraires C_1 et C_2 par d'autres, A et φ_0 , liées à C_1 et C_2 par les relations :

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

On tire de là A et φ_0 en fonction de C_1 et C_2 comme suit :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2}.$$

Substituant les expressions de C_1 et C_2 dans la formule (5), on obtient

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t$$

ou

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0). \quad (6)$$

De telles oscillations sont dites *harmoniques*. Les courbes intégrales sont des sinusoides. L'intervalle de temps T dans lequel la quantité $\beta t + \varphi_0$ varie de 2π est appelé *période* des oscillations; dans notre cas $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Nous appellerons *fréquence* des oscillations le nombre d'oscillations dans le temps 2π ; dans notre cas la fréquence est β ; la constante A , qui représente l'élongation maximum à partir de la position d'équilibre, est appelée *amplitude* du mouvement oscillatoire; φ_0 est la *phase initiale*. On a représenté le graphique de la fonction (6) sur la figure 276.

En électronique et ailleurs on fait largement appel aux représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques.

Considérons dans le plan complexe xOy le rayon vecteur $A = A(t)$ de longueur constante $|A| = A = \text{const.}$

Lorsque le paramètre t (t désigne ici le temps) varie, l'extrémité du vecteur A décrit un cercle de rayon A centré à l'origine des coordonnées (fig. 277). Soit ψ l'angle formé par le vecteur A et l'axe Ox et tel que $\psi = \beta t + \varphi_0$. La grandeur β est appelée vitesse angulaire de rotation du vecteur A . Projétons le vecteur A sur les axes Oy et Ox :

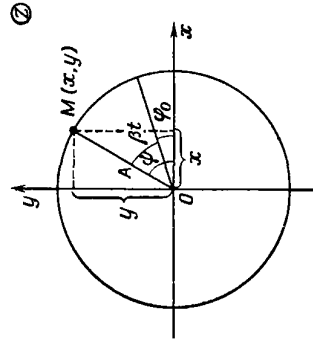


Fig. 277

$$\left. \begin{aligned} y &= A \sin(\beta t + \varphi_0), \\ x &= A \cos(\beta t + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Les expressions (7) sont les solutions de l'équation (4).

Considérons la grandeur complexe

$$z = x + iy = A \cos(\beta t + \varphi_0) + iA \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (8)$$

ou encore

$$z = A [\cos(\beta t + \varphi_0) + i \sin(\beta t + \varphi_0)]. \quad (8)$$

Comme nous l'avons vu au § 1, chap. VII, la grandeur complexe z (8) représente le vecteur A .

Par conséquent, les solutions de l'équation des oscillations harmoniques (4) peuvent être assimilées aux projections sur les axes Oy et Ox du vecteur A ayant β pour vitesse angulaire et φ_0 pour phase initiale.

En se référant à la formule d'Euler (cf. (4), § 5, chap. VII) on peut écrire l'expression (8) sous la forme:

$$z = A e^{i(\beta t + \varphi_0)}.$$

Les parties imaginaire et réelle de l'expression (9) sont les solutions de l'équation (4). L'expression (9) est dite *solution complexe* de l'équation (4). Mettons l'expression (9) sous la forme

$$z = A e^{i\varphi_0} e^{i\beta t}. \quad (9)$$

L'expression $A e^{i\varphi_0}$ porte le nom d'*amplitude complexe*. Désignons-la par A^* . La solution complexe (10) peut alors être mise sous la forme

$$z = A^* e^{i\beta t}.$$

4) Soit $p \neq 0$ et $\frac{p^2}{4} < q$.

Les racines de l'équation caractéristique sont alors complexes:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

où

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

L'intégrale générale est de la forme

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (12)$$

ou

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (13)$$

Force nous est de prendre ici pour amplitude la quantité $A e^{\alpha t}$ qui dépend du temps. Comme $\alpha < 0$, elle tend vers zéro lorsque

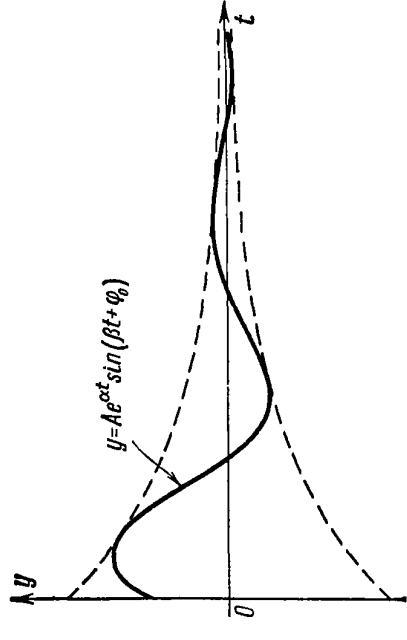


Fig. 278

$t \rightarrow \infty$, c.-à-d. que nous sommes en présence d'*oscillations amorties*. La figure 278 représente le graphique de telles oscillations.

§ 28. Oscillations forcées

L'équation des oscillations forcées s'écrit

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad (p > 0, q > 0, \text{ voir § 26}). \quad (1)$$

Considérons le cas important en pratique où la force perturbatrice extérieure est représentée par la fonction périodique

$$f(t) = a \sin \omega t;$$

l'équation (1) devient alors

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t. \quad (1')$$

1) Supposons d'abord que $p \neq 0$ et $\frac{p^2}{4} < q$, c.-à-d. que les racines de l'équation caractéristique soient des nombres complexes $\alpha \pm i\beta$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors (voir formules (12) et (13), § 27)

$$\bar{y} = Ae^{ct} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (2)$$

Cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (3)$$

Substituant cette expression de y^* dans l'équation différentielle initiale, on trouve M et N :

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \quad N = \frac{(q-\omega^2)a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Avant de substituer les expressions de M et N dans l'égalité (3), introduisons les nouvelles constantes A^* et φ^* en posant

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

soit

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

On pourra écrire alors la solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin(\omega t + \varphi^*)$$

ou, en définitive,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est égale à $y = \bar{y} - y^*$, soit

$$y = Ae^{ct} \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

Le premier terme du second membre (la solution de l'équation homogène) représente des oscillations amorties. Il décroît lorsque t croît et, par conséquent, au bout d'un certain temps, c'est le second terme, représentant les oscillations forcées, qui joue le rôle principal. La fréquence ω de ces oscillations est égale à la fréquence de la force extérieure $f(t)$; l'amplitude des oscillations forcées est d'autant plus grande que p est petit et que ω^2 est voisin de q .

Étudions en détail la dépendance entre l'amplitude des oscillations forcées et la fréquence ω pour différentes valeurs de p . Désignons à cet effet l'amplitude des oscillations forcées par $D(\omega)$:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}.$$

Posons $q = \beta_1^2$ (pour $p = 0$ β_1 serait égal à la fréquence des oscillations propres). On a

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2} \frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Posons

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda; \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma,$$

où λ est le quotient de la fréquence de la force perturbatrice et de la fréquence des oscillations libres du système, la constante γ ne dépendant pas de la force perturbatrice. L'amplitude s'exprime alors par la formule

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2}}. \quad (4)$$

Trouvons le maximum de cette fonction. Il correspond évidemment à la valeur de λ pour laquelle le dénominateur est minimum. Mais le minimum de la fonction

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2} \quad (5)$$

est atteint pour

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

et est égal à

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Par conséquent, l'amplitude maximum est égale à

$$\bar{D}_{\max} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Le graphique de la fonction $\bar{D}(\lambda)$ pour divers γ est représenté sur la figure 279 (pour fixer les idées, on a posé pour la construction des courbes correspondantes $a = 1$, $\beta_1 = 1$). Ces courbes sont appelées *courbes de résonance*.

Il résulte de la formule (5) que pour des γ petits la valeur maximum de l'amplitude est atteinte pour des λ voisins de l'unité, c.-à-d. lorsque la fréquence de la force coercitive est voisine de la fréquence des oscillations libres. Si $\gamma = 0$ (donc $p = 0$), c.-à-d. s'il n'y a pas de résistance au mouvement, l'amplitude des oscillations forcées croît indéfiniment lorsque $\lambda \rightarrow 1$, c.-à-d. lorsque $\omega \rightarrow \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ (\gamma=0)}} \bar{D}(\lambda) = \infty.$$

Lorsque $\omega^2 = q$, il y a résonance.

2) Supposons maintenant que l'on ait $p = 0$, c.-à-d. que nous considérons l'équation d'oscillations élastiques sans résistance en présence d'une force coercitive périodique :

$$y'' + qy = a \sin \omega t. \quad (6)$$

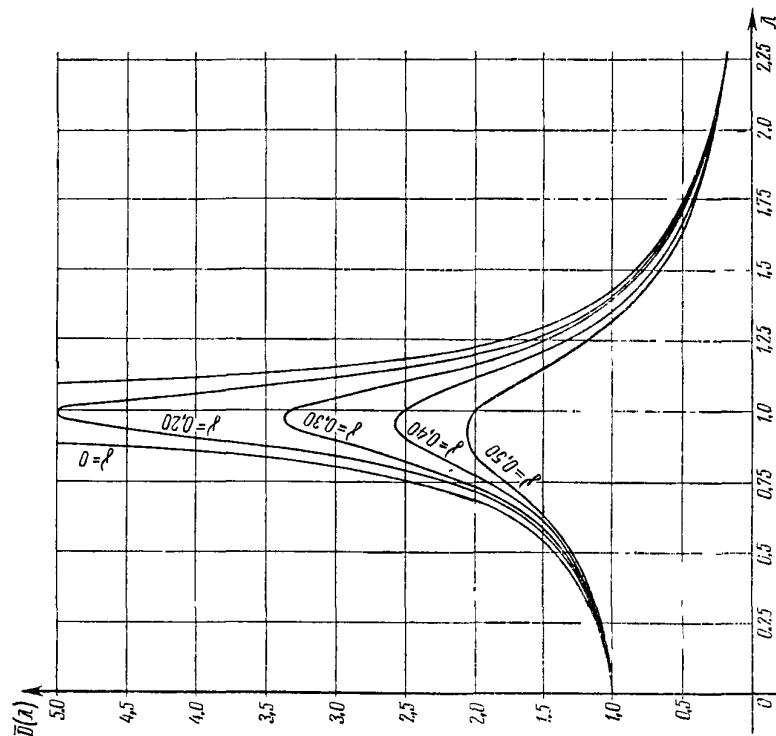


Fig. 279

La solution générale de l'équation homogène est

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (\beta^2 = q).$$

Si $\beta \neq \omega$, c.-à-d. si la fréquence de la force coercitive n'est pas égale à la fréquence des oscillations propres, la solution particulière de l'équation non homogène s'écrit

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t$$

On trouve en substituant cette expression dans l'équation proposée :

$$M = 0, \quad N = \frac{a}{q - \omega^2}$$

La solution générale est

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t.$$

Le mouvement résulte donc de la superposition des oscillations propres de fréquence β et des oscillations forcées de fréquence ω .

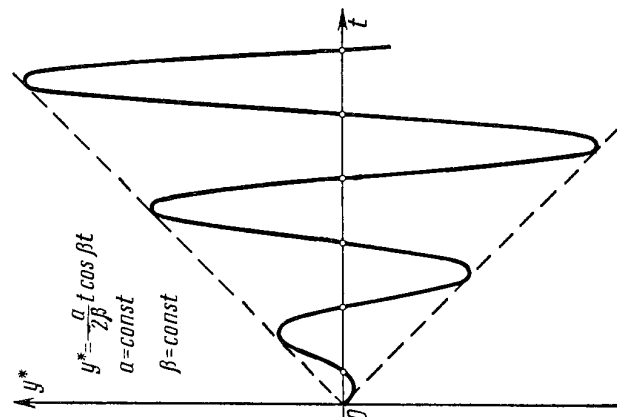


Fig. 280

Si $\beta = \omega$, c.-à-d. si la fréquence des oscillations propres coïncide avec la fréquence de la force coercitive, la fonction (3) n'est pas solution de l'équation (6). On cherchera alors, en vertu des résultats du § 24, une solution particulière sous la forme

$$y^* = t (M \cos \beta t + N \sin \beta t). \quad (7)$$

On trouve M et N en substituant cette expression dans l'équation différentielle :

$$M = -\frac{a}{2\beta}; \quad N = 0.$$

Pour que la solution obtenue satisfasse aux conditions initiales données (2), il ne reste plus qu'à déterminer dans (6) et (7) les valeurs des constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ (comme on l'a fait dans le cas d'une seule équation différentielle).

R e m a r q u e 1. Si le système (1) est linéaire par rapport aux fonctions inconnues, l'équation (5) sera aussi linéaire.

E x e m p l e 1. Intégrer le système :

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \quad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \quad (\alpha)$$

avec les conditions initiales

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0. \quad (\beta)$$

S o l u t i o n. 1) On a en dérivant par rapport à x la première équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1.$$

On obtient en substituant dans cette dernière les expressions $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ tirées des équations (a) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1. \quad (\gamma)$$

2) On déduit de la première équation (a)

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x. \quad (\delta)$$

Substituons cette expression dans (c), on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2 \left(\frac{dy}{dx} - y - x \right) + 3x + 1$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 5x + 1. \quad (\epsilon)$$

La solution générale de cette dernière est

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9 \quad (\zeta)$$

et compte tenu de (d)

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14. \quad (\eta)$$

Choisissons les constantes C_1 et C_2 de manière à satisfaire aux conditions initiales (b)

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0.$$

On déduit alors des égalités (f) et (g)

$$1 = C_1 - 9, \quad 0 = C_2 - 2C_1 + 14,$$

d'où $C_1 = 10$; $C_2 = 6$.

Par conséquent, la solution satisfaisant aux conditions initiales (b) s'écrit $y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9$, $z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$.

R e m a r q u e 2. Nous avons supposé dans les raisonnements précédents que l'on pouvait tirer les fonctions $y_2, y_3, \dots, y_n$ des $n - 1$ premières équations (3). Mais on peut parfois tirer $y_2, \dots, y_n$ de moins de n équations. On obtient alors pour déterminer y une équation différentielle d'ordre inférieur à n .

E x e m p l e 2. Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{dy}{dt} = x + z; \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

S o l u t i o n. On trouve en dérivant par rapport à t la première équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x + z) + (x + y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z.$$

Éliminons les variables y et z des équations

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

on obtient une équation du second ordre par rapport à x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière est

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \quad (\alpha)$$

D'où

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad \text{et} \quad y = \frac{dx}{dt} - x = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - x. \quad (\beta)$$

Substituant les expressions ci-dessus de x et y dans la troisième équation du système proposé, on obtient une équation permettant de déterminer z :

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}.$$

On trouve en intégrant cette équation :

$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \quad (\gamma)$$

Mais on a alors en vertu de (β) :

$$y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}. \quad (\delta)$$

Les équations (α), (β), (γ) donnent la solution générale du système proposé.

Il se peut que les équations différentielles d'un système contiennent des dérivées d'ordres supérieurs à un. L'ordre du système considéré s'élève en conséquence.

Ainsi, le problème du mouvement d'un point matériel sollicité par une force F se ramène à un système de trois équations différentielles du second ordre.

Solution. Formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

ou $k^2 - 5k + 4 = 0$. Nous trouvons les racines

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$$

Recherchons la solution sous la forme

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t$$

et

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t}.$$

Composons le système (3) pour la racine $k_1 = 1$ et déterminons $\alpha_1^{(1)}$ et $\alpha_2^{(1)}$:

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ 1\alpha_1^{(1)} + (3-4)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

d'où $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Posant $\alpha_1^{(1)} = 1$ nous obtenons $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$. Nous avons ainsi obtenu la solution du système:

$$x_1^{(1)} = e^t, \quad x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}e^t.$$

Composons ensuite le système (3) pour la racine $k_2 = 4$ et déterminons $\alpha_1^{(2)}$ et $\alpha_2^{(2)}$:

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0, \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0, \end{cases}$$

d'où $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ et $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1$. Nous obtenons la seconde solution du système

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = e^{4t}.$$

La solution générale du système sera [voir (6)]

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \\ x_2 &= -\frac{1}{2}C_1 e^t + C_2 e^{4t}. \end{aligned}$$

II. Les racines de l'équation caractéristique sont distinctes, mais certaines d'entre elles sont complexes. Supposons que parmi les racines de l'équation caractéristique existent deux racines complexes conjuguées:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

A ces racines correspondront les solutions

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha+i\beta)t} \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha-i\beta)t} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Les coefficients $\alpha_j^{(1)}$ et $\alpha_j^{(2)}$ sont déterminés à partir du système d'équations (3).

De même qu'au § 21 on peut montrer que les parties réelles et imaginaires de la solution complexe sont aussi des solutions. Nous obtenons ainsi deux solutions particulières:

$$\begin{cases} \bar{x}_j^{(1)} = e^{\alpha t} (\lambda_j^{(1)} \cos \beta t + \lambda_j^{(2)} \sin \beta t), \\ \bar{x}_j^{(2)} = e^{\alpha t} (\bar{\lambda}_j^{(1)} \sin \beta t + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos \beta t), \end{cases} \quad (9)$$

où $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$ sont des nombres réels définis au moyen de $\alpha_j^{(1)}$ et $\alpha_j^{(2)}$.

Les combinaisons correspondantes des fonctions (9) entreront dans la solution générale du système.

Exemple 2. Trouver la solution générale du système

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -7x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - 5x_2. \end{aligned}$$

Solution. Nous formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ou $k^2 + 12k + 37 = 0$ et nous trouvons ses racines:

$$k_1 = -6 + i, \quad k_2 = -6 - i.$$

Portant $k_1 = -6 + i$ dans le système (3) nous trouvons:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1 + i,$$

Ecrivons la solution (7):

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)t}. \quad (7')$$

Portant $k_2 = -6 - i$ dans le système (3), nous trouvons:

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$$

Nous obtenons le second système de solutions (8):

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t}. \quad (8')$$

Récrivons la solution (7'):

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} (\cos t + i \sin t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{-6t} (\cos t + i \sin t)$$

ou

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= e^{-6t} \cos t + ie^{-6t} \sin t, \\ x_2^{(1)} &= e^{-6t} (\cos t - \sin t) + ie^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Récrivons la solution (8'):

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= e^{-6t} \cos t - ie^{-6t} \sin t, \\ x_2^{(2)} &= e^{-6t} (\cos t - \sin t) - ie^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir comme système de solutions particulières séparément les parties réelles et imaginaires

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= e^{-\epsilon t} \cos t, & \bar{x}_2^{(1)} &= e^{-\epsilon t} (\cos t - \sin t), \\ \bar{x}_1^{(2)} &= e^{-\epsilon t} \sin t, & \bar{x}_2^{(2)} &= e^{-\epsilon t} (\cos t + \sin t). \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

La solution générale du système sera :

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{-\epsilon t} \cos t + C_2 e^{-\epsilon t} \sin t, \\ x_2 &= C_1 e^{-\epsilon t} (\cos t - \sin t) + C_2 e^{-\epsilon t} (\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

On peut trouver par une méthode analogue la solution d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordres supérieurs à coefficients constants.

En mécanique et en théorie des circuits électriques on étudie, par exemple, la solution du système d'équations différentielles du deuxième ordre

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Nous recherchons de nouveau la solution sous la forme

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}$$

Portant ces expressions dans le système (10) et simplifiant par e^{kt} , nous obtenons un système d'équations pour déterminer α , β et k :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k^2) \alpha + a_{12} \beta &= 0, \\ a_{21} \alpha + (a_{22} - k^2) \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Les valeurs α et β ne seront différentes de zéro que dans le cas où le déterminant du système sera égal à zéro :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

C'est précisément l'équation caractéristique pour le système (10) ; c'est une équation du 4-ième ordre par rapport à k . Soient k_1 , k_2 , k_3 et k_4 ses racines (nous supposons que les racines sont distinctes). Pour chaque racine k_i du système (11) nous trouvons les valeurs α et β . La solution générale analogue à (6) sera de la forme

$$\begin{aligned} x &= C_1 \alpha^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \alpha^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \alpha^{(4)} e^{k_4 t}, \\ y &= C_1 \beta^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \beta^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \beta^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \beta^{(4)} e^{k_4 t}. \end{aligned}$$

Si certaines des racines sont complexes, à chaque paire de racines complexes correspondra dans la solution générale une expression du type (9).

Exemple 3. Trouver la solution générale du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= x - 4y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -x + y. \end{aligned}$$

Solution. Écrivons l'équation caractéristique (12) et trouvons ses racines :

$$\begin{vmatrix} 1 - k^2 & -4 \\ -4 & 1 - k^2 \end{vmatrix} = 0, \\ k_1 = t, \quad k_2 = -t, \quad k_3 = \sqrt{3}, \quad k_4 = -\sqrt{3}.$$

Nous rechercherons la solution sous la forme

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha^{(1)} e^{it}, & y^{(1)} &= \beta^{(1)} e^{it}, \\ x^{(2)} &= \alpha^{(2)} e^{-it}, & y^{(2)} &= \beta^{(2)} e^{-it}, \\ x^{(3)} &= \alpha^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, & y^{(3)} &= \beta^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, \\ x^{(4)} &= \alpha^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}, & y^{(4)} &= \beta^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}. \end{aligned}$$

Nous tirons du système (11) $\alpha^{(j)}$ et $\beta^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= 1, & \beta^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha^{(2)} &= 1, & \beta^{(2)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha^{(3)} &= 1, & \beta^{(3)} &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha^{(4)} &= 1, & \beta^{(4)} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Écrivons les solutions complexes :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= e^{it} = \cos t + i \sin t, \\ x^{(2)} &= e^{-it} = \cos t - i \sin t, \\ y^{(1)} &= \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t), \\ y^{(2)} &= \frac{1}{2} (\cos t - i \sin t). \end{aligned}$$

Les parties réelles et imaginaires prises séparément seront aussi des solutions :

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)} &= \cos t, & \bar{y}^{(1)} &= \frac{1}{2} \cos t, \\ \bar{x}^{(2)} &= \sin t, & \bar{y}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sin t. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire la solution générale :

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{\sqrt{3}t} + C_4 e^{-\sqrt{3}t}, \\ y &= \frac{1}{2} C_1 \cos t + \frac{1}{2} C_2 \sin t - \frac{1}{2} C_3 e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{2} C_4 e^{-\sqrt{3}t}. \end{aligned}$$

R e m a r q u e. Nous n'avons pas considéré dans ce paragraphe le cas des racines multiples de l'équation caractéristique.

§ 31. Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier

Comme les solutions de la plupart des équations différentielles et des systèmes d'équations ne s'expriment pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratures, on a recours également à des méthodes d'intégration approchée. On a donné une idée de ces méthodes au § 3; en outre, plusieurs de ces méthodes seront examinées aux §§ 32-35 et aussi au chapitre XVI.

Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière; pour obtenir d'autres solutions particulières, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

En maints problèmes de mécanique et de technique, il importe de connaître non pas les valeurs concrètes de la solution correspondant à des valeurs concrètes de la variable, mais l'allure de la solution lorsque la variable varie, notamment lorsqu'elle tend vers l'infini. Il est, par exemple, important de savoir si les solutions satisfaisant à des conditions initiales données sont périodiques ou si elles tendent asymptotiquement vers une fonction connue, etc. La théorie qualitative des équations différentielles a ces questions pour objet.

La question de la stabilité d'une solution ou d'un mouvement est une des questions fondamentales de la théorie qualitative; cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Liapounov (1857-1918).

Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ les solutions de ce système satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0. \end{aligned} \quad (1')$$

Soient encore $\bar{x} = \bar{x}(t)$ et $\bar{y} = \bar{y}(t)$ les solutions du système (1) satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{cases} \bar{x}_{t=0} = \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0. \end{cases} \quad (1'')$$

D é f i n i t i o n. Les solutions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ satisfaisant aux équations (1) et aux conditions initiales (1') sont dites *stables*

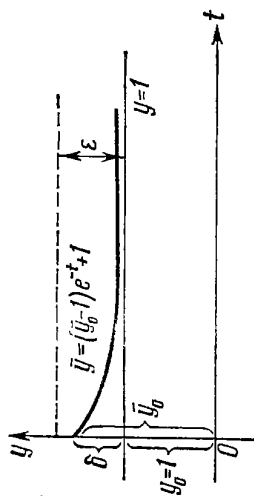


Fig. 281

au sens de Liapounov lorsque $t \rightarrow \infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait pour tout $t > 0$ les inégalités

$$\begin{aligned} |\bar{x}(t) - x(t)| &< \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| &< \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

dès que les conditions initiales satisfont aux inégalités

$$\begin{aligned} |\bar{x}_0 - x_0| &< \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| &< \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Interprétons cette définition. Il résulte des inégalités (2) et (3) que les solutions varient peu, quel que soit t positif, lorsque les conditions initiales varient peu. Si le système d'équations différentielles est celui d'un mouvement, le caractère du mouvement varie peu lorsque les conditions initiales varient peu si les solutions sont stables.

Voyons-le sur l'exemple d'une équation du premier ordre. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1. \quad (a)$$

Sa solution générale est

$$y = Ce^{-t} + 1. \quad (b)$$

Trouvons la solution particulière satisfaisant à la condition initiale

$$y_{t=0} = 1. \quad (c)$$

Il est évident que cette solution $y = 1$ correspond à $C = 0$ (fig. 284). Trouvons ensuite la solution particulière satisfaisant à la condition initiale

Trouvons la valeur de C dans l'équation (b):

$$\bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0.$$

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

On obtient en substituant cette valeur de C dans l'égalité (b)

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

Il est évident que la solution $y = 1$ est stable. En effet

$$\bar{y} - y = [(y_0 - 1)e^{-t} + 1] - 1 = (y_0 - 1)e^{-t} \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow \infty$.

L'inégalité (3) est donc vérifiée quel que soit ε dès que l'on a $(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon$.

Si les équations (4) décrivent le mouvement, où l'argument t est le temps, et qu'elles ne contiennent pas explicitement le temps t , c'est-à-dire si elles ont la forme

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y),$$

un tel système est dit *autonome*.

Considérons ensuite le système d'équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

en supposant que les coefficients a, b, c, g soient des constantes. La substitution directe nous convainc que la solution du système (4) est alors $x = 0, y = 0$.

Voyons à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients pour que la solution $x = 0, y = 0$ du système (4) soit stable.

Dérivons la première équation et éliminons y et $\frac{dy}{dt}$, on obtient une équation du second ordre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} = c \frac{dx}{dt} + g(ax + by) = c \frac{dx}{dt} + agx + b \left(\frac{dx}{dt} - cx \right)$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c) \frac{dx}{dt} - (ag-bc)x = 0. \quad (5)$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag-bc) = 0. \quad (6)$$

Cette équation est notée habituellement sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & g \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

(cf. équation (4), § 30).

Désignons les racines de l'équation caractéristique par λ_1 et λ_2 . Comme nous allons le voir, la stabilité (ou l'instabilité) des solutions du système (4) est déterminée par la nature des racines λ_1 et λ_2 . Les cas suivants peuvent se présenter.

1. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, négatives et distinctes :

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

On trouve x de l'équation (5) :

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

De la première équation du système (4), on déduit alors y . La solution du système (4) prend ainsi la forme :

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}] \frac{1}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Remarque. Si $g = 0$ et $a \neq 0$, il faut alors écrire l'équation (5) pour la fonction y . De la deuxième équation du système (4) on déduit y et ensuite x . La structure de la solution (8) ne change pas. Si $g = 0$ et $a = 0$, la solution du système d'équations s'écrit sous la forme :

$$x = C_1 e^{ct}, \quad y = C_2 e^{bt}. \quad (8')$$

Dans ce cas il est plus facile d'analyser le caractère des solutions. Donnons à C_1 et C_2 des valeurs telles que les solutions (8) satisfassent aux conditions initiales

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0.$$

La solution vérifiant les conditions initiales est donc :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g} \left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - c) e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Il résulte de ces dernières formules que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits tels que l'on ait

pour tous les $t > 0$:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad \text{étant donné que} \\ e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ et } e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Notons que dans ce cas

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Considérons le plan xOy . Ce plan porte le nom de *plan de phase* du système d'équations différentielles (4) et de l'équation différentielle (5). Considérons les solutions (8) et (9) du système (4) comme les équations paramétriques d'une certaine courbe dans le plan de phase xOy :

$$x = \bar{\varphi}(t, C_1, C_2), \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \bar{\psi}(t, C_1, C_2), \\ x &= \varphi(t, x_0, y_0), \\ y &= \psi(t, x_0, y_0). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Ces courbes sont appelées *courbes intégrales* ou *trajectoires* de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + gy} \quad (43)$$

obtenue en divisant membre à membre les équations du système (4).

L'origine des coordonnées $O(0, 0)$ est un *point singulier* pour l'équation différentielle (43) puisqu'il n'appartient pas au domaine d'existence et d'unicité de la solution.

Le caractère des solutions (9) et plus généralement des solutions du système (4) est illustré concrètement par la disposition des courbes intégrales

$$\bar{F}(x, y, C) = 0$$

qui forment l'intégrale générale de l'équation différentielle (43). La constante C est tirée de la condition initiale $y_{x=x_0} = y_0$. Après substitution de C l'équation de la famille prend la forme

$$F(x, y, x_0, y_0). \quad (44)$$

Dans le cas des solutions (9) le point singulier porte le nom de *noeud stable*. On dit qu'un point se déplaçant sur la trajectoire tend indéfiniment vers le point singulier si $t \rightarrow +\infty$.

Il est évident qu'on aboutirait également à la relation (44) en éliminant le paramètre t du système (42). Pour déterminer comment, dans le plan de phase, sont disposées les courbes intégrales

au voisinage du point singulier pour toutes les racines possibles de l'équation caractéristique, au lieu d'une analyse complète, bornons-nous à une illustration sur des cas simples ne nécessitant pas des calculs compliqués. Précisons que les trajectoires de l'équation (43) et celles qui seront étudiées dans ces exemples auront la même allure au voisinage de l'origine des coordonnées quels que soient les coefficients.

Exemple 1. Étudier la stabilité de la solution $x=0, y=0$ du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y.$$

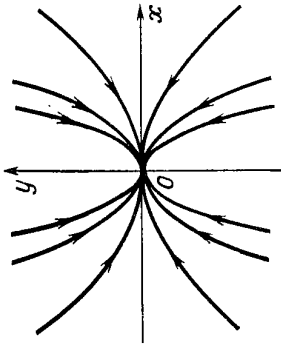


Fig. 282

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Les solutions (8') sont dans ce cas

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-2t}.$$

Les solutions (9)

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t}. \quad (a)$$

Il est évident que lorsque $t \rightarrow +\infty$ $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow 0$. La solution $x=0, y=0$ est donc stable. Voyons maintenant le plan de phase. En éliminant le paramètre t de l'équation (a) nous obtenons une équation de la forme (14)

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}. \quad (b)$$

C'est une famille de paraboles (fig. 282).

L'équation (43) s'écrit dans ce cas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Nous obtenons en intégrant

$$\text{Log } |y| = 2 \text{ Log } |x| + \text{Log } |C|, \quad (c)$$

Tirons C des conditions

$$y_{x=x_0} = y_0, \quad C = \frac{y_0}{x_0^2}.$$

En substituant C dans (c) nous obtenons la solution (b). Le point singulier $O(0, 0)$ est un *noeud stable*.

II. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, positives et distinctes: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Dans ce cas les solutions sont données également par les formules (8) et respectivement (9). Ici cependant pour $|x_0|$ et $|y_0|$ aussi petits qu'on veut $|x(t)| \rightarrow \infty$, $|y(t)| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, étant donné que $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$ et $e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Sur le plan de phase le point singulier sera un *noeud instable*: en effet, lorsque $t \rightarrow +\infty$, un point qui se déplace sur la trajectoire s'éloigne du point de repos $x = 0, y = 0$.

Ex e m p l e 2. Etudier la stabilité des solutions du système

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y.$$

Solution. L'équation caractéristique sera

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

ses racines

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2,$$

et la solution du système

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{2t}.$$

Cette solution est instable car $|x(t)| \rightarrow \infty$, $|y(t)| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Éliminons t :

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

(fig. 283). Le point singulier $O(0, 0)$ est un *noeud instable*.

III. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et de signes contraires, par exemple $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

Il résulte de la formule (9) que pour $|x_0|$ et $|y_0|$ aussi petits qu'on veut, si $cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0$, $|x(t)| \rightarrow \infty$, $|y(t)| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. La solution est *instable*. Dans le plan de phase le point singulier porte le nom de *selle*.

Ex e m p l e 3. Etudier la stabilité de la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y.$$

Solution. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

par suite, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. La solution est

$$x = x_0 e^{+t}, \quad y = y_0 e^{-2t}.$$

La solution est instable. En éliminant le paramètre t , nous obtenons une famille de courbes dans le plan de phase

$$yx^2 = y_0 x_0^2.$$

Le point singulier $O(0, 0)$ est une *selle* (fig. 284).

IV. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes avec une partie réelle négative: $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha < 0$).

La solution du système (4) est

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t], \\ y &= \frac{1}{g} e^{\alpha t} [(\alpha C_1 + \beta C_2 - c C_1) \cos \beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1 - c C_2) \sin \beta t]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Posons

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \delta = \frac{C_1}{C}, \quad \cos \delta = \frac{C_2}{C}.$$

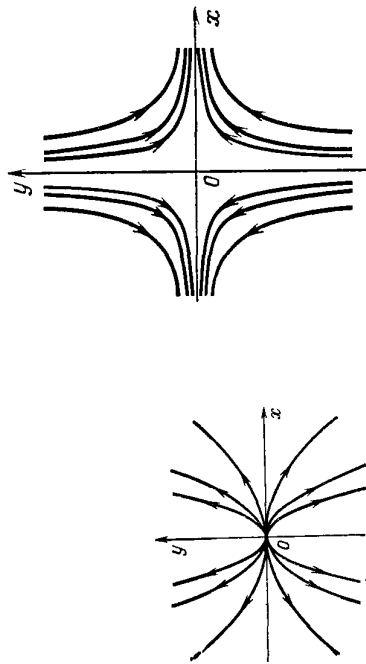


Fig. 283

L'équation (15) peut alors s'écrire sous la forme

$$\left. \begin{aligned} x &= C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{C e^{\alpha t}}{g} [(\alpha - c) \sin(\beta t + \delta) + \beta \cos(\beta t + \delta)], \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires susceptibles d'être tirées des conditions initiales: $x = x_0, y = y_0$ en faisant $t = 0$. De plus,

$$x_0 = C \sin \delta, \quad y_0 = \frac{C}{g} [(\alpha - c) \sin \delta + \beta \cos \delta],$$

d'où

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{g y_0 - x_0(\alpha - c)}{\beta}. \quad (17)$$

Rappelons que si $g = 0$, la solution se présentera sous un autre aspect, mais le caractère de l'analyse restera le même.

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits on aura

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

La solution est *stable*. Dans ce cas quand $t \rightarrow +\infty$
 $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow 0$

en changeant de signe un nombre indéfini de fois. Sur le plan de phase le point singulier de cette nature porte le nom de *foyer stable*.

Exemple 4. Etudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = -x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

Déterminons C_1 et C_2 d'après les formules (17): $C_1 = x_0$, $C_2 = y_0$. En les substituant dans (15) nous obtenons:

$$\begin{cases} x = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t), \\ y = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t). \end{cases} \quad (A)$$

Il est évident que pour des valeurs de t quelconques

$$|x| \leq |x_0| + |y_0|, \quad |y| \leq |x_0| + |y_0|.$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 0$. La solution est stable.

Voyons maintenant comment dans ce cas sont disposées les courbes dans le plan de phase. Transformons l'expression (A). Soient

$$x_0 = M \cos \delta, \quad y_0 = M \sin \delta,$$

$$M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{y_0}{x_0}$$

Les égalités (A) prennent alors la forme:

$$\begin{cases} x = Me^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ y = Me^{-t} \sin(\beta t - \delta). \end{cases} \quad (B)$$

Passons aux coordonnées polaires ρ et θ et exprimons ρ en fonction de θ . Les équations (B) prennent la forme

$$\begin{cases} \rho \cos \theta = Me^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ \rho \sin \theta = Me^{-t} \sin(\beta t - \delta). \end{cases} \quad (C)$$

En élevant les premiers et les deuxièmes membres au carré et en additionnant, nous obtenons

$$\rho^2 = M^2 e^{-2t}$$

ou encore

$$\rho = Me^{-t}. \quad (D)$$

Exprimons à présent t en fonction de θ . En divisant membre à membre les équations du système (C), nous obtenons

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta t - \delta),$$

d'où il vient

$$t = \frac{0 + \delta}{\beta}.$$

Substituons dans (D):

$$\rho = Me^{-\frac{0 + \delta}{\beta}}$$

ou

$$\rho = Me^{-\frac{\delta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta}}.$$

En désignant $Me^{-\frac{\delta}{\beta}}$ par M_1 nous obtenons en définitive

$$\rho = M_1 e^{-\frac{\theta}{\beta}}. \quad (E)$$

C'est une famille de spirales logarithmiques. Dans ce cas lorsque $t \rightarrow +\infty$ un point se déplaçant sur la trajectoire tend vers l'origine des coordonnées. Le point singulier $O(0, 0)$ est un *foyer stable*.

V. Les racines de l'équation caractéristique sont complexes avec une partie réelle positive: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha > 0$).

Dans ce cas la solution s'exprime également au moyen des formules (15), où $\alpha > 0$. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $|x(t)|$ et $|y(t)|$ peuvent prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut quelles que soient les conditions initiales x_0 et y_0 ($\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$). La solution est *instable*. Sur le plan de phase un point singulier de cette nature porte le nom de *foyer instable*. Un point se déplaçant sur la trajectoire s'éloigne indéfiniment de l'origine des coordonnées.

Exemple 5. Etudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y.$$

Solution. Ecrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

La solution (15), compte tenu de (17), est dans ce cas

$$x = e^t(x_0 \cos t + y_0 \sin t),$$

$$y = e^t(y_0 \cos t - x_0 \sin t).$$

Dans le plan de phase nous obtenons une courbe en coordonnées polaires

$$\rho = M_1 e^{\theta/\beta}.$$

Le point singulier est un *foyer instable* (fig. 285).

VI. Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres imaginaires purs: $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$.

Dans ce cas la solution (15) prend la forme:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \\ y &= \frac{1}{g} [(\beta C_2 - c C_1) \cos \beta t + (-\beta C_1 - c C_2) \sin \beta t]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées d'après la formule (17):

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{g y_0 + c x_0}{g}. \quad (19)$$

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits, $|x(t)| < \varepsilon$ et $|y(t)| < \varepsilon$ quel que soit t . La solution est donc *stable*. x et y sont des fonctions périodiques de t .

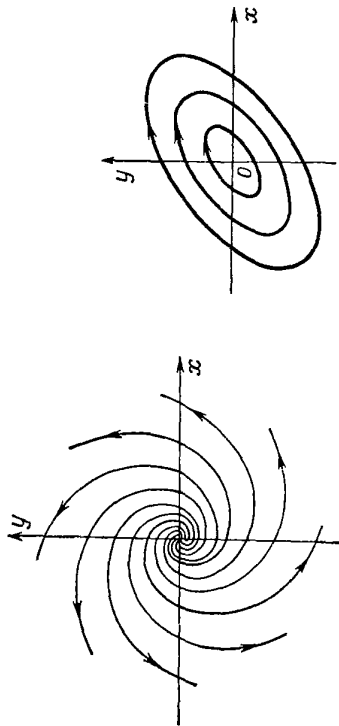


Fig. 285

Pour analyser les courbes intégrales dans le plan de phase, il est plus commode d'écrire la première des solutions (18) sous la forme suivante (cf. (16)):

$$\left. \begin{aligned} x &= C \sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{C\beta}{g} \cos(\beta t + \delta) - \frac{Cc}{g} \sin(\beta t + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

où C et δ sont des constantes arbitraires. Nous constatons immédiatement d'après (20) que x et y sont des fonctions périodiques de t . Éliminons le paramètre t des équations (20)

$$y = \frac{C\beta}{g} \sqrt{1 - \frac{x^2}{C^2}} - \frac{c}{g} x.$$

En faisant disparaître le radical, nous obtenons:

$$\left(y - \frac{c}{g} x\right)^2 = \left(\frac{C\beta}{g}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right). \quad (21)$$

C'est une famille de courbes du second degré (courbes réelles) dépendant de la constante arbitraire C . Aucune d'elles ne possède de point indéfiniment éloigné. Par conséquent, c'est une famille d'ellipses entourant l'origine des coordonnées (lorsque $c = 0$ les axes des ellipses sont parallèles aux axes des coordonnées). Le point singulier de cette nature est appelé *centre* (fig. 286).

Exemple 6. Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -4x.$$

Solution. Écrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda = \pm 2i.$$

Les solutions (20) seront

$$\begin{aligned} x &= C \sin(2t + \delta), \\ y &= 2C \cos(2t + \delta). \end{aligned}$$

L'équation (21) prend la forme

$$y^2 = 4C^2 \left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right), \quad \frac{y^2}{4C^2} + \frac{x^2}{C^2} = 1.$$

Nous obtenons ainsi une famille d'ellipses dans le plan de phase. Le point singulier est un *centre*.

VII. Soient $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$.

La solution (8) dans ce cas prend la forme

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g} [-C_1 c + C_2 (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t}]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ et $|x_0|$ et $|y_0|$ suffisamment petits, $|x(t)| < \varepsilon$ et $|y(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t > 0$. La solution est donc *stable*.

Exemple 7. Étudier la stabilité de la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -y. \quad (\alpha)$$

Solution. Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

Dans ce cas $g = 0$. Résolvons directement le système sans recourir aux formules (22)

$$x = C_1, \quad y = C_2 e^{-t}. \quad (\beta)$$

La solution satisfaisant aux conditions initiales $x = x_0$ et $y = y_0$ lorsque $t = 0$ est

$$x = x_0, \quad y = y_0 e^{-t}. \quad (\gamma)$$

Il est évident que la solution est *stable*. Dans le plan de phase l'équation différentielle est $\frac{dx}{dy} = 0$. L'intégrale générale est $x = C$. Les trajectoires sont donc des droites parallèles à l'axe Oy . De l'équation (y) il vient que les points sur les trajectoires s'approchent de la droite $y = 0$ (fig. 287).

VIII. Soient $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Des formules (22) ou (8') il résulte que la solution n'est pas stable, étant donné que $|x(t)| + |y(t)| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

IX. Soit $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

La solution est

$$\left. \begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, \\ y &= \frac{1}{g} e^{\lambda_1 t} [C_1 (\lambda_1 - c) + C_2 (1 + \lambda_1 t - ct)]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Étant donné que $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ et $te^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir C_1 et C_2 (par le choix de x_0 et y_0) tels que

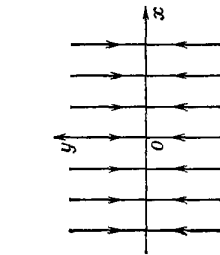


Fig. 287

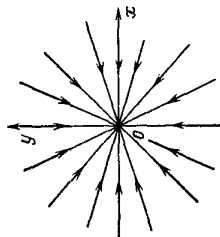


Fig. 288

$|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t > 0$. La solution est donc *stable*. De plus, $x(t) \rightarrow 0$ et $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Exemple 8. Étudier la stabilité de la solution du système

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

Solution. Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda+1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Dans ce cas $g=0$. La solution du système aura la forme (8'):

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-t},$$

en outre $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. La solution est stable. La famille de courbes représentées sur le plan de phase aura pour équation

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} = k \quad \text{ou} \quad y = kx.$$

C'est un faisceau de droites passant par l'origine des coordonnées. Les points se déplaçant sur la trajectoire tendent vers l'origine des coordonnées. Le point singulier $O(0, 0)$ est un *nœud* (fig. 288).

Notons qu'au cas où $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ l'allure de la solution (22) ne change pas, mais quand $t \rightarrow +\infty$, $|x(t)| \rightarrow \infty$ et $|y(t)| \rightarrow \infty$. La solution est donc *instable*.

X. Soit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Alors

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 t, \\ y &= \frac{1}{g} [-cC_1 + C_2 - cC_2 t]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

On voit que $x \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. La solution est donc *instable*.

Exemple 9. Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Solution. Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La solution est donc

$$y = C_2, \quad x = C_2 t + C_1.$$

Fig. 289

Il est évident que $x \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. La solution est donc *instable*. Dans le plan de phase l'équation sera $\frac{dy}{dx} = 0$. Les trajectoires $y = C$ sont des droites parallèles à l'axe Ox (fig. 289). Le point singulier de cette nature s'appelle *selle dégénérée*.

Pour donner un critère général de stabilité de la solution du système (4) procédons de la façon suivante.

Ecrivons les racines de l'équation caractéristique sous la forme de nombres complexes:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(si les racines sont réelles, $\lambda_1^{**} = 0$ et $\lambda_2^{**} = 0$).

Introduisons le plan de la variable complexe $\lambda^* \lambda^{**}$ et représentons les racines de l'équation caractéristique par des points sur ce plan. Ainsi d'après les cas que nous venons d'examiner le critère de stabilité de la solution du système (4) peut s'énoncer de la manière suivante.

Si aucune des racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique (6) n'est située à droite de l'axe imaginaire et si l'une d'elles au moins est *non nulle*, la solution est *stable*; si l'une des racines au moins est *située à droite de l'axe imaginaire* ou si elles sont toutes deux nulles, la solution est *instable* (fig. 290).

Considérons maintenant un système d'équations plus général :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

La solution de ce système ne s'exprime pas, sauf pour des cas exceptionnels, au moyen de fonctions élémentaires et de quadratures.

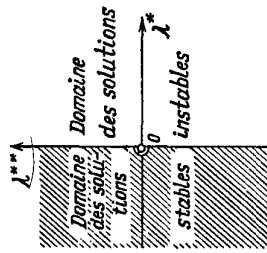
Pour s'assurer si les solutions de ce système sont stables ou non on les compare à celles d'un système linéaire. Supposons que lorsque $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow 0$ les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ tendent également vers zéro, mais plus rapidement que ρ où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; en d'autres termes

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

On démontre alors que, sauf exception, la solution du système (25) sera de la même nature quant à sa stabilité que la solution du système

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Fig. 290



Cette exception est précisément le cas où les deux racines de l'équation caractéristique sont situées sur l'axe imaginaire; le problème de la stabilité de la solution du système (25) se complique alors considérablement.

A. Liapounov a étudié le problème de la stabilité des solutions de systèmes d'équations sous des hypothèses assez générales.

Dans la théorie des oscillations on est souvent amené à résoudre l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (26)$$

Posons

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (27)$$

Nous obtenons alors le système d'équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= f(x, v). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Pour ce système le plan de phase sera le plan (x, v) . Les trajectoires illustrent géométriquement la dépendance de la vitesse v par rapport à x et donnent une image concrète des variations de x et v . Si le point $x = 0$, $v = 0$ est un point singulier, il définit la position d'équilibre.

Si, par exemple, le point singulier du système d'équations est un centre, c'est-à-dire que, dans le plan de phase, les trajectoires sont des courbes fermées autour de l'origine des coordonnées, les mouvements représentés par l'équation (26) ne sont pas des oscillations amorties. Si, par contre, le point singulier du plan de phase est un foyer (et qu'en outre $|x| \rightarrow 0$, $|v| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$), les mouvements représentés par l'équation (26) sont des oscillations amorties. Si le point singulier est un nœud ou une selle (et ce point singulier est unique), alors $x \rightarrow \pm\infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans ce cas un point matériel se déplaçant sur la trajectoire s'éloigne à l'infini.

Si l'équation (26) est une équation linéaire de la forme $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b \frac{dx}{dt}$ le système (28) devient alors

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = ax + bv.$$

Il se ramène donc à un système de la forme (4). Le point $x = 0$, $v = 0$ est un point singulier définissant la position d'équilibre. Notons que la variable x n'est pas obligatoirement un déplacement mécanique d'un point. Elle est susceptible d'avoir un autre sens physique et représenter, par exemple, des oscillations électriques.

§ 32. Solution approchée des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler

Nous considérerons deux méthodes de résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre. Dans ce paragraphe nous aborderons la *méthode d'Euler*.

Trouvons la solution approchée de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

sur le segment $[x_0, b]$, vérifiant la condition initiale $y = y_0$ pour $x = x_0$. Découpons le segment $[x_0, b]$ à l'aide des points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ en n parties égales (ici $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$). Introduisons la notation $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, par conséquent,

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Soit $y = \varphi(x)$ une certaine solution approchée de l'équation (1) et

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \quad \dots, \quad y_n = \varphi(x_n).$$

Introduisons les notations

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

En chacun des points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de l'équation (1) remplaçons la dérivée par le rapport des différences finies :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad (2)$$

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x. \quad (2')$$

Pour $x = x_0$ nous aurons

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$$

ou

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) h.$$

Dans cette égalité x_0, y_0, h sont connus, par conséquent nous trouvons :

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) h.$$

Pour $x = x_1$ l'équation (2') sera de la forme

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1) h$$

ou

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1) h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) h.$$

x_1, y_1, h sont ici connus, par contre on détermine y_2 . Nous trouvons de même :

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) h,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) h,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) h.$$

Nous avons ainsi trouvé les valeurs approchées de la solution aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$. Réunissant sur le plan des coordonnées les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ par des segments de droite, nous obtenons une ligne brisée qui est la représentation approchée de la courbe intégrale (fig. 291). Cette ligne brisée est appelée *ligne brisée d'Euler*.

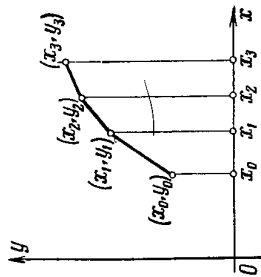


Fig. 291

R e m a r q u e. Désignons par $y = \varphi_h(x)$ la solution approchée de l'équation (1) correspondant à la ligne brisée d'Euler pour $\Delta x = h$. On peut démontrer que s'il existe une solution unique $y = \varphi^*(x)$ de l'équation (1), satisfaisant aux conditions initiales et déterminée sur le segment $[x_0, b]$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi_h(x) - \varphi^*(x)| = 0$ pour tout x de l'intervalle $[x_0, b]$.

E x e m p l e. Trouver la valeur approchée pour $x = 1$ de la solution de l'équation

$$y' = y + x$$

vérifiant la condition initiale : $y_0 = 1$ pour $x_0 = 0$.

S o l u t i o n. Divisons le segment $[0, 1]$ en 10 parties à l'aide des points $x_0 = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$. Par conséquent, $h = 0,1$. Nous rechercherons les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_n$ à l'aide de la formule (2')

$$\Delta y_h = (y_h + x_h) h$$

ou

$$y_{h+1} = y_h + (y_h + x_h) h.$$

Nous obtenons ainsi :

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1,$$

$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,22,$$

.....

Au cours de la résolution nous formons le tableau :

x_h	y_h	$y_h + x_h$	$\Delta y_h = (y_h + x_h) h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2892
$x_8 = 0,8$	2,4810	3,2810	0,3281
$x_9 = 0,9$	2,8094	3,7094	0,3709
$x_{10} = 1,0$	3,1800		

Nous avons trouvé la valeur approchée y | $x=1$ = 3,1800. La solution exacte de l'équation donnée, vérifiant les conditions initiales citées précédemment, sera

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Par conséquent,

$$y | x=1 = 2(e - 1) = 3,4366.$$

L'erreur absolue est égale à 0,2566, l'erreur relative à :

$$\frac{0,2566}{3,4366} = 0,075 \approx 8 \%$$

§ 33. Solution approchée des équations différentielles par la méthode des différences finies basée sur l'application de la formule de Taylor. Méthode d'Adams

Nous rechercherons de nouveau la solution de l'équation

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

sur le segment $[x_0, b]$ vérifiant la condition initiale: pour $x = x_0$, $y = y_0$. Introduisons les notations qui nous serviront par la suite. Les valeurs approchées de la solution aux points

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

seront

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Les premières différences ou les différences du premier ordre seront:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Les deuxièmes différences ou les différences du deuxième ordre sont:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Les différences des différences du deuxième ordre sont appelées différences du troisième ordre, etc. Désignons par $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$ les valeurs approchées des dérivées et par $y''_0, y''_1, \dots, y''_n$ les valeurs approchées des dérivées du deuxième ordre, etc. On détermine d'une manière analogue les premières différences des dérivées

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \dots, \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

et les secondes différences des dérivées

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \dots, \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2},$$

etc.

Ecrivons ensuite la formule de Taylor pour la solution de l'équation au voisinage du point $x = x_0$ (t. I, ch. IV, § 6, formule (6)):

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} y^{(m)}_0 + R_m. \quad (2)$$

Dans cette formule y_0 est connu et nous trouvons les valeurs des dérivées $y'_0, y''_0, \dots$ à partir de l'équation (1) de la manière suivante.

Portant dans le second membre de l'équation (1) les valeurs initiales x_0, y_0 nous trouvons y'_0 :

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Dérivant les termes de l'équation (1) par rapport à x , nous obtenons:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \quad (3)$$

Portant dans le second membre les valeurs x_0, y_0, y'_0 , nous trouvons:

$$y''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0, y=y_0, y'=y'_0}.$$

Dérivant encore une fois l'égalité (3) par rapport à x et portant les valeurs x_0, y_0, y'_0, y''_0 nous trouvons y'''_0 . En poursuivant *) ainsi nous pouvons trouver les valeurs des dérivées de n'importe quel ordre pour $x = x_0$. Tous les termes du second membre de la formule (2), excepté le terme restant R_m , sont connus. Ainsi en négligeant le terme restant nous pouvons obtenir les valeurs approchées pour n'importe quelle valeur de x ; leur degré d'exactitude dépendra de la grandeur $|x - x_0|$ et du nombre de termes dans le développement.

Dans la méthode considérée plus bas on ne détermine à l'aide de la formule (2) que certaines premières valeurs de y quand $|x - x_0|$ est petit. Nous déterminerons les valeurs y_1 et y_2 pour $x_1 = x_0 + h$ et $x_2 = x_0 + 2h$, en prenant quatre termes du développement (y_0 est connue des données initiales):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0, \quad (4)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0. \quad (4')$$

Nous supposons ainsi connues trois valeurs **) de la fonction: y_0, y_1, y_2 . Sur la base de ces valeurs nous déterminons en utilisant l'équation (1):

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_1, y_1), \quad y'_2 = f(x_2, y_2).$$

Connaissant y'_0, y'_1, y'_2 nous pouvons déterminer $\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta^2 y'_0$. Groupons les résultats des calculs dans le tableau suivant:

*) Nous supposons dans ce qui suit que la fonction $f(x, y)$ est dérivable par rapport à x et y autant de fois que l'exigent les raisonnements.

**) Pour une solution d'un degré d'exactitude plus élevé nous aurons dû calculer plus que trois premières valeurs de y .

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0		
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1	$\Delta y'_0$	$\Delta^2 y'_0$
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
...	...	...	...	...
$x_{k-2} = x_0 + (k-2)h$	y_{k-2}	y'_{k-2}	$\Delta y'_{k-2}$	
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k	$\Delta y'_{k-1}$	

Supposons maintenant que nous connaissons les valeurs de la solution

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k.$$

Sur la base de ces valeurs nous pouvons calculer, en utilisant l'équation (1), les valeurs des dérivées

$$y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_k,$$

et, par conséquent,

$$\Delta y'_0, \Delta y'_1, \dots, \Delta y'_{k-1}$$

et

$$\Delta^2 y'_0, \Delta^2 y'_1, \dots, \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Déterminons la valeur de y_{k+1} d'après la formule de Taylor en posant $a = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k + \dots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}_k + R_m.$$

Limitons-nous dans ce cas à quatre termes dans le développement:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k. \quad (5)$$

Dans cette formule les inconnues sont y'_k et y''_k , que nous chercherons à déterminer à l'aide des différences connues du premier et second ordre.

Exprimons tout d'abord y'_{k-1} à l'aide de la formule de Taylor, en posant $a = x_k$, $x - a = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k, \quad (6)$$

et y'_{k-2} en posant $a = x_k$, $x - a = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \quad (7)$$

Nous tirons de l'égalité (6):

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \quad (8)$$

Retranchant des termes de l'égalité (6) les termes de l'égalité (7) nous obtenons:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \quad (9)$$

Nous tirons de (8) et (9)

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k$$

ou

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2}. \quad (10)$$

Portant la valeur de y'''_k dans l'égalité (8) nous obtenons:

$$y'_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2h}. \quad (11)$$

Nous avons ainsi trouvé y'_k et y'''_k . Portant les expressions (10) et (11) dans le développement (5) nous obtenons:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h^3}{12} \Delta^2 y'_{k-2}. \quad (12)$$

C'est la *formule dite d'Adams* pour quatre termes. La formule (12) permet, connaissant y_h, y_{h-1}, y_{h-2} , de déterminer y_{h+1} . Ainsi connaissant y_0, y_1 et y_2 nous pouvons trouver y_3 et par suite $y_4, y_5, \dots$

R e m a r q u e 1. Indiquons sans le démontrer que s'il existe une solution unique de l'équation (1) sur le segment $[x_0, b]$ vérifiant les conditions initiales, alors l'erreur des valeurs approchées déterminées par la formule (12) n'excède pas en valeur absolue M/h^4 , où M est une constante ne dépendant que de la longueur de l'intervalle et de la forme de la fonction $f(x, y)$ et indépendante de la grandeur h .

R e m a r q u e 2. Si nous voulons réduire la marge d'erreur, il convient de prendre un plus grand nombre de termes dans le développement (5) et de modifier en conséquence la formule (12). Ainsi, si au lieu de la formule (5) nous prenons une formule dont le membre de droite recèle cinq termes, autrement dit si nous ajoutons un terme d'ordre h^4 , nous obtiendrons d'une manière analogue au lieu de la formule (12) la formule

$$y_{h+1} = y_h + \frac{h}{1} y'_h + \frac{h}{2} \Delta y'_{h-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{h-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{h-3}.$$

Ici y_{k+1} est déterminé à partir des valeurs y_k, y_{k-1}, y_{k-2} et y_{k-3} . Ainsi, avant d'aborder les calculs suivant cette formule, il faut connaître les quatre premières valeurs de la solution : y_0, y_1, y_2, y_3 . Lors du calcul de ces valeurs à l'aide des formules du type (4) il convient de prendre cinq termes dans le développement.

E x e m p l e 1. Trouver les valeurs approchées de la solution de l'équation vérifiant la condition initiale

$$y_0 = 1 \text{ pour } x_0 = 0.$$

Déterminer les valeurs de la solution pour $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$.
S o l u t i o n. Trouvons d'abord y_1 et y_2 à l'aide des formules (4) et (4'). Nous obtenons de l'équation et des conditions initiales:

$$y'_0 = (y + x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

Dérivant cette équation nous obtenons:

$$y'' = y' + 1.$$

Par conséquent,

$$y''_0 = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Dérivons encore une fois

$$y''' = y''.$$

Par conséquent,

$$y'''_0 = y''_0 = 2.$$

Portant dans l'égalité (4) les valeurs y_0, y'_0, y''_0 et $h=0,1$ nous obtenons:

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,1103.$$

D'une manière analogue nous trouverons pour $h=0,2$:

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,2427.$$

Connaissant y_0, y_1, y_2 nous obtiendrons à partir de l'équation:

$$y'_0 = y_0 + x_0 = 1;$$

$$y'_1 = y_1 + x_1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103;$$

$$y'_2 = y_2 + x_2 = 1,2427 + 0,2 = 1,4427;$$

$$\Delta y'_0 = 0,2103;$$

$$\Delta y'_1 = 0,2324;$$

$$\Delta^2 y'_0 = 0,0221.$$

Dressons avec les valeurs obtenues le tableau suivant.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y'_0 = 1$		
			$\Delta y'_0 = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y'_1 = 1,2103$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0221$
			$\Delta y'_1 = 0,2324$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,2427$	$y'_2 = 1,4427$		$\Delta^2 y'_1 = 0,0244$
			$\Delta y'_2 = 0,2568$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3695$	$y'_3 = 1,6995$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5833$			

Nous tirons y_3 de la formule (12):

$$y_3 = 1,2427 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,4427 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2324 + \frac{5 \cdot (0,1)}{12} \cdot 0,0221 = 1,3695.$$

Nous trouvons ensuite les valeurs $y'_3, \Delta y'_2, \Delta^2 y'_1$. Puis à l'aide de la même formule (12) nous trouvons y_4 :

$$y_4 = 1,3695 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,6995 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2568 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0244 = 1,5833.$$

Ainsi

$$y_3 = 0,0027 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0400 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0300 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0200 = 0,0090,$$

$$y_4 = 0,0090 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0901 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0501 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0201 = 0,0214.$$

Notons que pour y_4 les quatre premiers chiffres exactes après la virgule sont : $y_4 = 0,0213$. (On peut les obtenir par d'autres méthodes plus précises permettant d'évaluer l'erreur.)

§ 34. Méthode de Runge-Kutta

Soit donnée l'équation différentielle

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

On demande de trouver la solution de cette équation satisfaisant aux conditions initiales :

$$y = y_0 \text{ pour } x = x_0. \quad (2)$$

Considérons le domaine D du plan xOy (fig. 291a)

$$-A \leq x - x_0 < A,$$

$$-B \leq y - y_0 < B,$$

où A et B sont des nombres positifs donnés.

Supposons qu'en chaque point $M(x, y)$ du domaine D pour un h

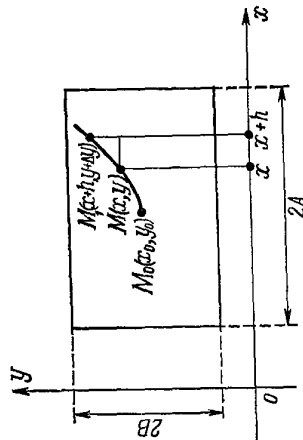


Fig. 291a

donné la solution de l'équation (1) puisse être développée d'après la formule de Taylor jusqu'aux membres d'ordre h^4 inclus.

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(IV)}(x) + \lambda h^5, \quad (3)$$

où λ est une quantité bornée dans le domaine D .

L'expression exacte de la solution de cette équation est :

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Par conséquent, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0,4 - 1 = 1,58364$. L'erreur absolue est : 0,0003; l'erreur relative : $\frac{0,0003}{1,5836} \approx 0,0002 = 0,02\%$. (L'erreur absolue de la valeur de y_4 calculée par la méthode d'Euler est 0,06; l'erreur relative : 0,038 = 3,8 %.)

Exemple 2. Trouver les valeurs approchées de la solution de l'équation

$$y' = y^2 + x^2,$$

vérifiant la condition initiale: $y_0 = 0$ pour $x_0 = 0$. Déterminer les valeurs de la solution pour $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$.

Solution. Nous trouvons :

$$y_0' = 0^2 + 0^2 = 0,$$

$$y_{x=0}'' = (2yy' + 2x^2)_{x=0} = 0,$$

$$y_{x=0}''' = (2y'^2 + 2yy'' + 2x^2)_{x=0} = 2.$$

Nous obtenons des formules (4) et (4') :

$$y_1 = \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0003, \quad y_2 = \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0027.$$

Nous tirons de l'équation :

$$y_0' = 0, \quad y_1' = 0,0100, \quad y_2' = 0,0400.$$

A l'aide de ces valeurs nous composons les premières lignes du tableau, puis nous déterminons les valeurs de y_3 et y_4 d'après la formule (12).

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_0' = 0$		
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,0003$	$y_1' = 0,0100$	$\Delta y_0' = 0,0100$	
				$\Delta^2 y_0' = 0,0200$
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,0027$	$y_2' = 0,0400$	$\Delta y_1' = 0,0300$	
				$\Delta^2 y_1' = 0,0201$
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,0090$	$y_3' = 0,0901$	$\Delta y_2' = 0,0501$	
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,0204$			

$|\lambda| < C$ où C ne dépend pas de x, y, h .

(Nous n'allons pas étudier les conditions auxquelles doit satisfaire $f(x, y)$ pour que ce développement soit possible).

En posant

$$\Delta y = y(x+h) - y(x), \quad (4)$$

la formule (3) s'écrit sous la forme:

$$\Delta y = \frac{h}{1} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(IV)}(x) + \lambda h^5. \quad (5)$$

Par conséquent, si on connaît la valeur $y(x)$ au point x et les dérivées jusqu'au 4-ième ordre inclus (les dérivées $y'(x), y''(x), y'''(x), y^{(IV)}(x)$ peuvent être tirées de l'équation (1)), on peut déterminer Δy puis $y(x+h)$. Toutefois il est plus commode de calculer Δy par une autre méthode: la *méthode de Runge-Kutta* exposée ci-dessous.

Donnons-nous les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x+h, y+k_3). \end{aligned} \quad (6)$$

On peut alors montrer aux termes en h^4 près, que le Δy donné par la formule (4) coïncide avec le Δy donné par la formule suivante:

$$\Delta y = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (7)$$

Indiquons comment a été obtenue cette équation sans nous livrer à tous les calculs.

De l'équation (1) nous tirons:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y), \\ y''' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

De la même manière nous trouvons $y^{(IV)}$.

En substituant ces expressions dans l'égalité (5) (λh^5 est négligé), on trouve Δy exprimé en fonction de $f(x, y)$, des dérivées partielles de $f(x, y)$ jusqu'au troisième ordre inclus et des puissances en h jusqu'à h^4 inclus. Considérons à présent les expressions (6): dévelop-

pons au voisinage du point $M(x, y)$ chacune des fonctions f exprimant k_2, k_3, k_4 d'après la formule de Taylor pour deux variables (cf. t. I, chap. VIII, § 17) jusqu'aux accroissements du troisième degré des variables. Il est évident que k_1, k_2, k_3, k_4 et, par conséquent, $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ s'exprimeront en fonction de $f(x, y)$, de ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclus et des puissances en h jusqu'à h^4 inclus. En substituant les expressions ainsi obtenues dans l'équation (7) nous vérifions que nous avons bien affaire à une identité. Notons que les calculs se trouvent sensiblement simplifiés si nous introduisons l'opérateur de dérivation *)

$$Du = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) u.$$

Revenons à présent à la solution de l'équation (1) avec les conditions initiales (2).

Posons:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, & x_0 + h &= x_1, & y(x_0 + h) &= y_1, & y_1 - y_0 &= \Delta y_1, \\ x_1 + h &= x_2, & y(x_1 + h) &= y_2, & y_2 - y_1 &= \Delta y_2, & & \\ & \dots & & & & & & \\ x_{s-1} + h &= x_s, & y(x_{s-1} + h) &= y_s, & y_s - y_{s-1} &= \Delta y_s. \end{aligned} \quad (8)$$

Commençons par chercher

$$y_1 = y(x_0 + h).$$

Pour cela il nous faut connaître

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0$$

ou bien

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} k_1^{(0)} &= hf(x_0, y_0), \\ k_2^{(0)} &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right), \\ k_3^{(0)} &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right), \\ k_4^{(0)} &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}). \end{aligned} \quad (9)$$

D'après la formule (7) nous pouvons écrire:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6} (k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) \quad (10)$$

*) Pour une démonstration détaillée se reporter à l'ouvrage « Méthodes d'analyse numérique » de B. Demidovitch, I. Maron, E. Chouvalova (en russe).

et

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1$$

y_1 étant maintenant connu, cherchons y_2

Nous avons

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= hf(x_1, y_1), \\ k_2^{(1)} &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right), \\ k_3^{(1)} &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right), \\ k_4^{(1)} &= hf(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)}). \end{aligned} \quad (14)$$

D'après la formule (7) nous avons $\Delta y_2 = y_2 - y_1$. Δy_2 et y_1 étant connus, d'après (4) y_2 est par conséquent déterminé. De la même manière on trouve y_3, y_4 , et ainsi de suite.

Pour trouver plus aisément les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_m$, les résultats des calculs sont groupés dans le tableau ci-dessous.

i	x	y	$h = hf$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	Δy_1
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	
	$x_0 + h$	$y_0 + h$	$k_4^{(0)}$	
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_1$	$k_1^{(1)}$	Δy_2
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$k_2^{(1)}$	
	$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_2 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$k_3^{(1)}$	
	$x_1 + h$	$y_3 + k_3^{(1)}$	$k_4^{(1)}$	
.				
m	x_m	$y_m = y_{m-1} + \Delta y_m$	$k_1^{(m)}$	Δy_{m+1}
	$x_m + \frac{h}{2}$	$y_m + \frac{k_1^{(m)}}{2}$	$k_2^{(m)}$	
	$x_m + \frac{h}{2}$	$y_m + \frac{k_2^{(m)}}{2}$	$k_3^{(m)}$	
	$x_m + h$	$y_m + k_3^{(m)}$	$k_4^{(m)}$	

La méthode de Runge-Kutta se prête facilement à la programmation.

Ajoutons que cette méthode est d'autant plus commode qu'on peut à chaque étape choisir le pas approprié du calcul h .

Il est relativement difficile d'évaluer l'erreur de la solution $y(x)$ pour une valeur donnée de x . On recommande néanmoins de recourir au procédé suivant (qui est donné sans démonstration) pour obtenir par un choix judicieux de h , le degré de précision voulue.

On cherche la solution $y_h(x)$ avec le pas $h = \frac{x - x_0}{n}$ et la solution $y_{\frac{h}{2}}(x)$ avec le pas $h_1 = -\frac{h}{2}$.

On fait ensuite le module de la différence $|y_h(x) - y_{\frac{h}{2}}(x)|$.

Si cette différence n'excède pas l'erreur autorisée, la solution $y_h(x)$ est acceptable. Si au contraire cette différence excède l'erreur autorisée, il faut alors se donner d'autres h^* et $h_1^* = \frac{h^*}{2}$ et reprendre les calculs. Cette remarque s'applique également à la méthode d'Adams.

Illustrons la méthode de Runge-Kutta par la résolution d'un exemple simple où les calculs peuvent être faits à la main.

Exemple. Trouver la solution de l'équation

$$y' = x + y$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y_0 = 1 \text{ pour } x = 0$$

sur le segment

$$[0; 0,4].$$

Solution: Prenons $h = 0,1$. Il nous faut, par conséquent, chercher les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 . En ce qui nous concerne

$$f(x, y) = x + y.$$

Nous avons:

$$k_1^{(0)} = hf(x, y) = 0,1(0 + 1) = 0,1,$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1\left[\left(1 + \frac{0,1}{2}\right) + \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)\right] = 0,44,$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1\left[\left(1 + \frac{0,1}{2}\right) + \left(1 + \frac{0,44}{2}\right)\right] = 0,4105,$$

$$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) = 0,1[(0 + 0,4) + (1 + 0,4105)] = 0,42105.$$

D'après la formule (10) il vient:

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}[0,4 + 2 \cdot 0,44 + 2 \cdot 0,4105 + 0,42105] = 0,4103.$$

D'après la formule (4) nous obtenons

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 1 + 0,1103 = 1,1103.$$

Portons les résultats des calculs de y_2, y_3, y_4 dans le tableau suivant.

i	x	y	$h=0,1 (x+y)$	Δy
0	0	1	0,1	$\Delta y_1 = 0,1103$
	0,05	1,05	0,11	
	0,05	1,055	0,1105	
	0,1	1,1105	0,1210	
1	0,1	1,1103	0,1210	$\Delta y_2 = 0,1324$
	0,15	1,1708	0,1321	
	0,15	1,1763	0,1326	
	0,2	1,2429	0,1443	
2	0,2	1,2427	0,1443	$\Delta y_3 = 0,1569$
	0,25	1,3149	0,1565	
	0,25	1,3209	0,1571	
	0,3	1,3998	0,1700	
3	0,3	1,3996	0,1700	$\Delta y_4 = 0,1840$
	0,35	1,4846	0,1835	
	0,35	1,4904	0,1840	
	0,4	1,5836	0,1984	
4	0,4	1,5836		

Nous obtenons de la sorte, les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 .
Au paragraphe précédent nous avons vu que la solution exacte de cette équation était :

$$y = 2e^x - x - 1,$$

$$y_4 = y_{x=0,4} = 1,58364.$$

§ 35. Méthode approchée d'intégration des systèmes d'équations différentielles du premier ordre

Les méthodes d'intégration approchées des équations différentielles considérées aux §§ 32 et 33 peuvent être appliquées également pour la solution des systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Considérons maintenant la méthode des différences pour la solution des systèmes d'équations. Nous conduirons les raisonnements pour un système de deux équations comportant deux fonctions

inconnues. On demande de chercher les solutions du système d'équations

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \quad (2)$$

vérifiant les conditions initiales: $y = y_0, z = z_0$, pour $x = x_0$.
Nous déterminerons les valeurs des fonctions y et z pour les valeurs de la variable indépendante $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$.
Soit de nouveau

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1). \quad (3)$$

Les valeurs approchées de la fonction seront notées

$$y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$$

et respectivement

$$z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n.$$

Ecrivons les formules de récurrence du type (12) du § 33 :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_k + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_k - 2, \quad (4)$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_k + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_k - 2. \quad (5)$$

Pour aborder les calculs suivant ces formules il faut connaître outre les y_0 et z_0 donnés y_1, y_2, z_1, z_2 ; nous trouverons ces valeurs par les formules du type (4) et (5) du § 32 :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0.$$

Pour appliquer ces formules il faut connaître $y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0$ que nous allons maintenant déterminer. Nous tirons maintenant des équations (1) et (2) :

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0),$$

$$z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0).$$

Dérivant les équations (1) et (2) et portant les valeurs x_0, y_0, z_0, y'_0 et z'_0 nous trouvons :

$$y''_0 = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' \right)_{x=x_0},$$

$$z''_0 = (z'')_{x_0=x} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}.$$

Dérivant encore une fois nous obtenons y'''_0 et z'''_0 . Connaissant y_1, y_2, z_1, z_2 nous tirons des équations (1) et (2) :

$$y'_1, y'_2, z'_1, z'_2, \Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta^2 y'_0, \Delta z'_0, \Delta z'_1, \Delta^2 z'_0,$$

ce qui nous permet de composer les cinq premières lignes du tableau :

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y'_0			z_0	z'_0		
x_1	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$	z_1	z'_1		$\Delta^2 z'_0$
			$\Delta y'_1$				$\Delta z'_1$	
x_2	y_2	y'_2		$\Delta^2 y'_2$	z_2	z'_2		$\Delta^2 z'_2$
x_3	y_3	y'_3			z_3	z'_3		

De formules (4) et (5) nous obtenons y_3 et z_3 et des équations (1) et (2) y'_3 et z'_3 . Calculant $\Delta y'_2, \Delta^2 y'_1, \Delta z'_2, \Delta^2 z'_1$ nous trouvons en utilisant de nouveau les formules (4) et (5) y_4 et z_4 et ainsi de suite.

Exemple 1. Trouver les valeurs approchées des solutions du système

$$y' = z, \quad z' = y$$

pour les conditions initiales : $y_0 = 0, z_0 = 1$ pour $x = 0$. Calculer les valeurs des solutions pour $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$.

Solution. Nous tirons de ces équations :

$$y'_0 = z_{x=0} = 1,$$

$$z'_0 = y_{x=0} = 0.$$

Dérivant ces équations nous aurons :

$$y''_0 = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$

$$z''_0 = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$

$$y'''_0 = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$

$$z'''_0 = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

Appliquant les formules du type (4) et (5) nous obtenons :

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 1 = 0,1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 1 = 0,2013,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{2!} \cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0200.$$

Des données obtenues nous tirons :

$$y'_1 = 1,0050, \quad z'_1 = 0,1002,$$

$$y'_2 = 1,0200, \quad z'_2 = 0,2013,$$

$$\Delta y'_0 = 0,0050, \quad \Delta z'_0 = 0,1002,$$

$$\Delta y'_1 = 0,0150, \quad \Delta z'_1 = 0,1011,$$

$$\Delta^2 y'_0 = 0,0100, \quad \Delta^2 z'_0 = 0,0009,$$

et nous composons les cinq premières lignes du tableau.

Nous trouvons à l'aide des formules (4) et (5) :

$$y_3 = 0,2013 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0200 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0150 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0100 = 0,3045,$$

$$z_3 = 1,0200 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,2013 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1011 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0009 = 1,0452$$

et d'une manière analogue

$$y_4 = 0,3045 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0452 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0252 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0102 = 0,4107,$$

$$z_4 = 1,0452 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,3045 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1032 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0021 = 1,0809.$$

Il est évident que les solutions exactes du système donné d'équations vérifiant les conditions initiales seront

$$y = \operatorname{sh} x, \quad z = \operatorname{ch} x.$$

C'est pourquoi les quatre premiers chiffres exacts après la virgule seront

$$y_4 = \operatorname{sh} 0,4 = 0,41075, \quad z_4 = \operatorname{ch} 0,4 = 1,08107.$$

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 1$		
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,1002$	$y'_1 = 1,0050$	$\Delta y'_0 = 0,0050$	$\Delta^2 y'_0 = 0,0100$
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,2013$	$y'_2 = 1,0200$	$\Delta y'_1 = 0,0150$	$\Delta^2 y'_1 = 0,0102$
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,3045$	$y'_3 = 1,0452$	$\Delta y'_2 = 0,0252$	
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,4107$			

x	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
$x_0 = 0$	$z_0 = 1$	$z'_0 = 0$		
$x_1 = 0,1$	$z_1 = 1,0050$	$z'_1 = 0,1002$	$\Delta z'_0 = 0,1002$	$\Delta^2 z'_0 = 0,0009$
$x_2 = 0,2$	$z_2 = 1,0200$	$z'_2 = 0,2013$	$\Delta z'_1 = 0,1014$	$\Delta^2 z'_1 = 0,0021$
$x_3 = 0,3$	$z_3 = 1,0452$	$z'_3 = 0,3045$	$\Delta z'_2 = 0,1032$	
$x_4 = 0,4$	$z_4 = 1,0809$			

R e m a r q u e. Comme les équations d'ordre supérieur et les systèmes d'équations des ordres supérieurs se ramènent dans de nombreux cas à un système d'équations du premier ordre, la méthode exposée est également applicable à la résolution de ces problèmes.

Exercices

Montrer que les fonctions ci-dessous dépendant de constantes arbitraires satisfont aux équations différentielles en regard.

Fonctions Equations différentielles

1. $y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

2. $y = Cx + C - C^2$. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$.

3. $y^2 = 2Cx + C^2$. $y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$.

4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1+C}$. $xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}$.

5. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$. $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

6. $y = (C_1 + C_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2 y = e^x$.

7. $y = C_1 e^a \arcsin x + C_2 e^{-a} \arcsin x$. $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$.

8. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0$.

Intégrer les équations à variables séparables :

9. $y \, dx - x \, dy = 0$. Rép. $y = Cx$.

10. $(1+u) v \, du + (1-v) u \, dv = 0$. Rép. $\text{Log } uv + u - v = C$.

11. $(1+y) \, dx - (1-x) \, dy = 0$. Rép. $(1+y)(1-x) = C$.

12. $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$. Rép. $\frac{t+x}{tx} + \text{Log } \frac{x}{t} = C$.

13. $(y-a) \, dx + x^2 \, dy = 0$. Rép. $(y-a) = C e^{\frac{1}{x}}$.

14. $z \, dt - (t^2 - a^2) \, dz = 0$. Rép. $z^{2a} = C \frac{t-a}{t+a}$.

15. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. Rép. $x = \frac{y+C}{1-Cy}$.

16. $(1+s^2) \, dt - \sqrt{t} \, ds = 0$. Rép. $2\sqrt{t} - \arcsin s = C$.

17. $d\rho + \rho \, \text{tg } \theta \, d\theta = 0$. Rép. $\rho = C \cos \theta$.

18. $\sin \theta \cos \varphi \, d\theta - \cos \theta \sin \varphi \, d\varphi = 0$. Rép. $\cos \varphi = C \cos \theta$.
 19. $\sec^2 \theta \, \theta \, d\theta + \sec^2 \varphi \, \varphi \, d\varphi = 0$. Rép. $\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi = C$.
 20. $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi + \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \theta \, d\theta = 0$. Rép. $\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi = C$.
 21. $(1 + x^2) \, dy - \sqrt{1 - y^2} \, dx = 0$. Rép. $\arcsin y - \arcsin \operatorname{tg} x = C$.
 22. $\sqrt{1 - x^2} \, dy - \sqrt{1 - y^2} \, dx = 0$. Rép. $y \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - y^2} = C$.
 23. $3e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$. Rép. $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$.
 24. $(x - y^2 x) \, dx + (y - x^2 y) \, dy = 0$. Rép. $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + C$.

Etablissement d'équations différentielles

25. Montrer que la courbe dont la pente de la tangente en chaque point est proportionnelle à l'abscisse du point de contact est une parabole. Rép. $y = ax^2 + C$.
 26. Trouver une courbe passant par le point $(0, -2)$ telle que la pente de la tangente en chaque point soit égale à l'ordonnée correspondante augmentée de trois unités. Rép. $y = e^x - 3$.
 27. Trouver une courbe passant par le point $(4, 1)$ telle que la pente de la tangente en chaque point soit proportionnelle au carré de l'ordonnée de ce point. Rép. $k(x - 4)y - y + 4 = 0$.
 28. Trouver une courbe dont la pente de la tangente en chaque point soit n fois plus grande que celle de la droite réunissant ce point à l'origine des coordonnées. Rép. $y = Cx^n$.
 29. Faire passer par le point $(2, 1)$ une courbe dont la tangente en chaque point coïncide avec le rayon vecteur mené de l'origine à ce point. Rép. $y = \frac{1}{2}x$.
 30. Trouver en coordonnées polaires l'équation d'une courbe telle qu'en chaque point la tangente de l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente à la courbe soit égale à l'inverse changé de signe du rayon vecteur. Rép. $r(\theta + C) = 4$.
 31. Trouver en coordonnées polaires l'équation d'une courbe telle qu'en chaque point la tangente de l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente à la courbe soit égale au carré du rayon vecteur. Rép. $r^2 = 2(\theta + C)$.
 32. Montrer que la courbe douée de cette propriété que toutes ses normales passent par un point fixe est un cercle.
 33. Trouver une courbe telle qu'en chaque point la sous-tangente soit égale au double de l'abscisse. Rép. $y = C\sqrt{x}$.
 34. Trouver une courbe dont le rayon vecteur soit égal à la portion de tangente comprise entre le point de tangence et son intersection avec l'axe Ox .

Solution. D'après les conditions du problème $\left| \frac{y}{x} \right| \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, d'où $\frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x}$. On obtient en intégrant deux familles de courbes: $y = Cx$ et $y = \frac{C}{x}$.

35. D'après la loi de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence des températures du corps et du milieu. La température de l'air étant de 20°C , le corps se refroidit de 100° à 60°C en l'espace de 20 minutes. On demande en combien de temps sa température tombera à 30°C .

Solution. L'équation différentielle du problème est $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$. On trouve en intégrant $T - 20 = Ce^{kt}$; $T = 100$ lorsque $t = 0$; $T = 60$ lorsque $t = 20$; donc $C = 80$; on a $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$, par conséquent, $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Posant $T = 30$, on trouve $t = 60$ minutes.

36. On considère un entonnoir conique d'angle au sommet $d = 60^\circ$ et de hauteur 10 cm. Au bout de quel temps T l'entonnoir sera-t-il vide, sachant que l'eau fuit par une ouverture de $0,5 \text{ cm}^2$ dans le fond?

Solution. Calculons de deux manières différentes le volume de l'eau qui a coulé entre les instants t et $t + \Delta t$. A vitesse constante v , il s'échappe en une seconde une colonne d'eau de section $0,5 \text{ cm}^2$ et de hauteur v . Il s'échappe donc dans le temps Δt une quantité d'eau dv

$$-dv = -0,5 v \, dt = -0,3 \sqrt{\frac{2}{g} h} \, dt.$$

Par ailleurs, la hauteur diminuant avec l'écoulement, son accroissement dh est négatif et l'on a

$$-dv = \pi r^2 \, dh = \frac{\pi}{3} (h + 0,7)^2 \, dh.$$

De sorte que

$$\frac{\pi}{3} (h + 0,7)^2 \, dh = -0,3 \sqrt{\frac{2}{g} h} \, dt,$$

d'où

$$t = 0,0315 (40^{5/2} - h^{5/2}) + 0,0732 (40^{3/2} - h^{3/2}) + 0,078 (\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Posant $h = 0$, on obtient le temps d'écoulement $T = 12,5 \text{ s}$.

37. Le freinage d'un disque tournant dans un liquide est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω . Trouver la dépendance entre la vitesse angulaire et le temps si l'on sait que la vitesse angulaire du disque est tombée de 100 tr/mn à 60 tr/mn en l'espace d'une minute. Rép. $\omega = 100 \left(\frac{t}{60}\right)^4 \text{ tr/mn}$.

38. On suppose que la pression d'une colonne d'air verticale en une section donnée dépend de la pression des couches d'air supérieures. Trouver la dépendance entre la pression et l'altitude sachant que la pression est de 1 kg/cm^2 au niveau de la mer et de $0,92 \text{ kg/cm}^2$ à 500 mètres d'altitude.

Solution. Se servir de la loi de Mariotte en vertu de laquelle la densité d'un gaz est proportionnelle à sa pression. L'équation différentielle du problème est $dp = -kp \, dh$, d'où $p = e^{-0,00017h}$. Rép. $p = e^{-0,00017h}$.

Intégrer les équations différentielles homogènes suivantes:

39. $(y - x) \, dx + (y + x) \, dy = 0$. Rép. $y^2 + 2xy - x^2 = C$.

40. $(x + y) \, dx + x \, dy = 0$. Rép. $x^2 + 2xy = C$.

41. $(x + y) \, dx + (y - x) \, dy = 0$. Rép. $\operatorname{Log} (x^2 + y^2)^{1/2} - \arcsin \frac{y}{x} = C$.

42. $x \, dy - y \, dx = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx$. Rép. $1 + 2 C y - C^2 x^2 = 0$.

*) La vitesse d'écoulement v de l'eau par une ouverture se trouvant à la distance h de la surface libre est donnée par la formule $v = 0,6 \sqrt{2gh}$, où g est l'accélération dans le champ de la pesanteur.

43. $(8y + 10x) dx + (5y + 7x) dy = 0$. Rép. $(x + y)^2 (2x + y)^3 = C$.

44. $(2\sqrt{st} - s) dt + t ds = 0$. Rép. $t e^{\frac{s}{t}} = C$ ou $s = t \operatorname{Log} \frac{C}{t}$.

45. $(t - s) dt + t ds = 0$. Rép. $t e^{\frac{s}{t}} = C$ ou $s = t \operatorname{Log} \frac{C}{t}$.

46. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$. Rép. $y = x \sqrt[3]{3 \operatorname{Log} Cx}$.

47. $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$. Rép. $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

Intégrer les équations différentielles suivantes se ramenant à des équations homogènes :

48. $(3y - 7x + 7) dx - (3x - 7y - 3) dy = 0$. Rép. $(x + y - 1)^5 (x - y - 4)^2 = C$.

49. $(x + 2y + 1) dx - (2x + 4y + 3) dy = 0$. Rép. $\operatorname{Log} (4x + 8y + 5) + \frac{4y + 5}{2x - 3} = C$.

50. $(x + 2y + 1) dx - (2x - 3) dy = 0$. Rép. $\operatorname{Log} (2x - 3) - \frac{4y + 5}{2x - 3} = C$.

51. Déterminer la courbe dont la sous-normale est la moyenne arithmétique entre l'abscisse et l'ordonnée du point de la courbe considérée. Rép. $(x - y)^2 (x + 2y) = C$.

52. Déterminer la courbe dont le rapport du segment découpé par la tangente sur l'axe Oy au rayon vecteur est une constante.

Solution. On a par hypothèse $\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m$, d'où $\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{C}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}$.

53. Déterminer la courbe dont le rapport du segment découpé par la normale sur l'axe Ox au rayon vecteur est une constante.

Solution. On a par hypothèse $\frac{x + y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m$, d'où $x^2 + y^2 = m^2 (x - C)^2$.

54. Déterminer la courbe dont le segment découpé par la tangente sur l'axe Oy est égal à $a \sec \theta$, où θ est l'angle entre le rayon vecteur et l'axe Ox .

Solution. Comme on a $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ et par hypothèse

$$y - x \frac{dy}{dx} = a \sec \theta,$$

on obtient

$$y - x \frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

d'où

$$y = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{a}{x} + b} - e^{-\left(\frac{a}{x} + b\right)} \right].$$

55. Déterminer la courbe dont le segment découpé par la normale sur l'axe Oy est égal à la distance du point considéré à l'origine des coordonnées.

Solution. Le segment découpé par la normale sur l'axe Oy est égal à $y + \frac{x}{y}$; on a donc par hypothèse

$$y + \frac{x}{y} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

d'où

$$x^2 = C(2y + C).$$

56. Trouver la forme d'un miroir tel que les rayons issus d'un point O soient réfléchis parallèlement à une direction donnée.

Solution. Confondons cette direction avec l'axe Ox et soit O l'origine. Soient OM le rayon incident, MP le rayon réfléchi, MQ la normale à la courbe cherchée :

$$\alpha = \beta; OM = OQ, NM = y,$$

$$NQ = NO + OQ = -x + \sqrt{x^2 + y^2} = y \cotg \beta = y \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$y dy = (-x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx;$$

on trouve par intégration

$$y^2 = C^2 + 2Cx.$$

Intégrer les équations différentielles linéaires suivantes :

57. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. Rép. $2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2$.

58. $y' - a \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$. Rép. $y = Cx^a + \frac{x}{1-a}$.

59. $(x - x^3) y' + (2x^2 - 1) y - ax^3 = 0$. Rép. $y = ax + Cx \sqrt{1 - x^2}$.

60. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1$. Rép. $s = \sin t + C \cos t$.

61. $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$. Rép. $s = \sin t - 1 + C e^{-\sin t}$.

62. $y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n$. Rép. $y = x^n (e^x + C)$.

63. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}$. Rép. $x^n y = ax + C$.

64. $y' + y = e^{-x}$. Rép. $e^x y = x + C$.

65. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$. Rép. $y = x^2 (1 + C e^{\frac{1}{x}})$.

Intégrer les équations de Bernoulli :

66. $y' + xy = x^3 y^3$. Rép. $y^2 (x^2 + 1 + C e^{x^2}) = 1$.

67. $(1 - x^2) y' - xy - ax y^2 = 0$. Rép. $(C \sqrt{1 - x^2} - a) y = 1$.

68. $3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0$. Rép. $a^2 y^3 = C e^{ax} - a(x+1) - 1$.

69. $y' (x^2 y^3 + xy) = 1$. Rép. $x[(2 - y^2) e^{\frac{1}{2} y^2} + C] = e^{\frac{1}{2} y^2}$.

70. $(y \log x - 2)y \, dx = x \, dy$. Rép. $y(Cx^2 + \log x^2 + 1) = 4$.

71. $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$. Rép. $y = \frac{\lg x + \sec x}{\sin x + C}$.

Intégrer les équations suivantes aux différentielles totales :

72. $(x^2 + y) \, dx + (x - 2y) \, dy = 0$. Rép. $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$.

73. $(y - 3x^2) \, dx - (4y - x) \, dy = 0$. Rép. $2y^2 - xy + x^3 = C$.

74. $(y^3 - x) \, y' = y$. Rép. $y^4 = 4xy + C$.

75. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0$.

Rép. $\log \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$.

76. $2(3xy^2 + 2x^3) \, dx + 3(2x^2y + y^2) \, dy = 0$. Rép. $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$.

77. $\frac{x \, dx + (2x + y) \, dy}{(x + y)^2} = 0$. Rép. $\log(x + y) - \frac{x}{x + y} = C$.

78. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx = \frac{2y \, dy}{x^3}$. Rép. $x^2 + y^2 = Cx^3$.

79. $\frac{x^2 \, dy - y^2 \, dx}{(x - y)^2} = 0$. Rép. $\frac{xy}{x - y} = C$.

80. $x \, dx + y \, dy = \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2}$. Rép. $x^2 + y^2 - 2 \arctan \frac{x}{y} = C$.

81. Trouver les courbes jouissant de cette propriété que le produit du carré de la distance d'un point quelconque pris sur la courbe considérée à l'origine des coordonnées par le segment découpé par la normale sur l'axe des abscisses est égal au cube de l'abscisse du point. Rép. $y^2(2x^2 + y^2) = C$.

82. Trouver les enveloppes des familles de courbes suivantes :

a) $y = Cx + C^2$. Rép. $x^2 + 4y = 0$. b) $y = \frac{x}{C} + C^2$. Rép. $27x^2 = 4y^3$. c) $\frac{x}{C} - \frac{y}{C^3} = 2$. Rép. $27y = x^3$. d) $C^2x + Cy - 1 = 0$. Rép. $y^2 + 4x = 0$. e) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. Rép. $x = 0$; $y = 0$. f) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. Rép. $y^2 = 4x + 4$.

g) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$. Rép. $(x - y)^2 = 8$. h) $Cx^2 + C^2y = 1$. Rép. $x^4 + 4y = 0$.

83. Une droite se déplace de telle manière que la somme des segments qu'elle découpe sur les axes de coordonnées est égale à une constante a . Chercher l'enveloppe de cette famille de droites. Rép. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (parabole). Trouver l'enveloppe d'une famille de droites telles que les axes de coordonnées découpent sur ces droites des segments de longueur constante a . Rép. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

85. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles dont les diamètres sont les doubles des ordonnées de la parabole $y^2 = 2px$. Rép. $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right)$.

86. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles centrés sur la parabole $y^2 = 2px$ et passant par le sommet de la parabole. Rép. La cissoïde $x^3 + y^3(x + y) = 0$.

87. Trouver l'enveloppe d'une famille de cercles dont les diamètres sont les cordes de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ perpendiculaires à l'axe Ox . Rép. $\frac{a^2x^2}{x^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

88. Trouver la développée de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en tant qu'enveloppe de ses normales. Rép. $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$. Intégrer les équations suivantes (équations de Lagrange) :

89. $y = 2xy' + y'^2$. Rép. $x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2}{3}p$; $y = \frac{3p}{2C - p^3}$.

90. $y = xy'^2 + y'^2$. Rép. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Intégrale singulière : $y = 0$.

91. $y = x(1 + y') + (y')^2$. Rép. $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(p + 1)e^{-p} - p^2 + 2$.

92. $y = yy'^2 + 2xy'$. Rép. $4Cx = 4C^2 - y^2$. Trouver la courbe à normale constante. Rép. $(x - C)^2 + y^2 = a^2$. Intégrale singulière : $y = \pm a$.

93. Trouver la courbe à normale constante. Rép. $(x - C)^2 + y^2 = a^2$. Intégrer les équations de Clairaut :

94. $y = xy' + \frac{y'}{x + 1}$. Rép. $y = Cx + C - C^2$. Intégrale singulière : $4y = (x + 1)^2$.

95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. Rép. $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$. Intégrale singulière : $y^2 - x^2 = 1$.

96. $y = xy' + y'$. Rép. $y = Cx + C$.

97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$. Rép. $y = Cx + \frac{1}{C}$. Intégrale singulière : $y^2 = 4x$.

98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$. Rép. $y = Cx - \frac{1}{C^2}$. Intégrale singulière : $y^3 = -\frac{27}{4}x^2$.

99. L'aire du triangle formé par la tangente à une courbe et les axes de coordonnées est constante. Trouver cette courbe. Rép. L'hyperbole équilatère $4xy = \pm a^2$, ainsi que les droites de la famille $y = Cx \pm a\sqrt{C}$.

100. Trouver une courbe telle que le segment de sa tangente compris entre les axes de coordonnées ait une longueur constante a . Rép. $y = Cx \pm \frac{a}{\sqrt{1 + C^2}}$.

Solution singulière : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

101. Trouver une courbe telle que la somme des segments découpés par ses tangentes sur les axes de coordonnées soit égale à la constante $2a$. Rép. $y = Cx - \frac{2a}{1 - C}$. Solution singulière : $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

102. Trouver les courbes telles que le produit des distances de deux points donnés à la tangente soit constant. Rép. Des ellipses et des hyperboles. (Trajectoires orthogonales et isogonales.)

103. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $y = ax^n$. Rép. $x^2 + ny^2 = C$.

104. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles $y^2 = 2p(x - \alpha)$ (α étant le paramètre). Rép. $y = \frac{x}{C}$.

105. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $x^2 - y^2 = \alpha$ (α étant le paramètre). Rép. Les cercles $y = C(x^2 + y^2)$.

106. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de cercles $x^2 + y^2 = 2ax$. Rép. Les cercles $y = C(x^2 + y^2)$.

107. Trouver les trajectoires orthogonales des paraboles égales tangentes en leurs sommets à une droite donnée. Rép. Si le paramètre des paraboles est $2p$ et si Oy est la droite donnée, l'équation des trajectoires sera $y + C = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} x^{3/2}}$.

108. Trouver les trajectoires orthogonales des cissoïdes $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.
 Rép. $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

109. Trouver les trajectoires orthogonales des lemniscates $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2$.
 Rép. $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

110. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de courbes $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, où a est un paramètre variable, sachant que l'angle entre les courbes et leurs trajectoires est $\omega = 60^\circ$.

Solution. On trouve l'équation différentielle de la famille de courbes $y' = \frac{2y - x}{x\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ et l'on remplace y' par l'expression $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}}$.

Si $\omega = 60^\circ$, on a $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'}$ et on obtient l'équation différentielle

$\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$. L'intégrale générale $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ donne la famille des trajectoires cherchées.

111. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de paraboles $y^2 = 4Cx$, sachant que $\omega = 45^\circ$. Rép. $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{y}{\sqrt{3}} \arctg \frac{y}{x}}$.

112. Trouver les trajectoires isogonales de la famille de droites $y = Cx$ pour $\omega = 30^\circ, 45^\circ$. Rép. Les spirales logarithmiques

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{y}{x}}, \\ x^2 + y^2 = e^{2 \arctg \frac{y}{x}}. \end{cases}$$

113. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Éliminer C_1 et C_2 . Rép. $y'' - y = 0$.

114. Écrire l'équation différentielle de tous les cercles d'un plan. Rép. $(1 + y'^2)y'' - 3y'y''^2 = 0$.

115. Écrire l'équation différentielle de toutes les coniques à centres ayant pour axes principaux Ox, Oy . Rép. $x(yy'' + y'^2) - y(y'' + y'^2) = 0$.

116. On se donne l'équation différentielle $y'' - 2y'y'' + 2y = 0$ et sa solution générale $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$. On demande: 1) de vérifier que la famille de courbes données est bien la solution générale; 2) de trouver la solution particulière correspondant à $x=0: y=1, y'=0$, $y'' = -1$. Rép. $y = \frac{1}{6}(9e^x + e^{-x} - 4e^{2x})$.

117. On se donne l'équation différentielle $y'' = \frac{1}{2y'}$ et sa solution générale $y = \pm \frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$.

1) Vérifier que la famille de courbes données est bien l'intégrale générale; 2) trouver la courbe intégrale passant par le point (1, 2) et dont la tangente en ce point forme avec l'axe positif Ox un angle de 45° . Rép.

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + \frac{4}{3}}.$$

Intégrer les équations différentielles simples suivantes se ramenant à des équations du premier ordre:

118. $xy''' = 2$. Rép. $y = x^2 \log x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $x=1, y=1, y'=1, y''=3$. Rép. $y = x^2 \log x + 1$.

119. $y^{(n)} = x^m$. Rép. $y = \frac{m! x^{m+n}}{(m+n)!} + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$.

120. $y'' = a^2 y$. Rép. $ax = \log(ay + \sqrt{a^2 y^2 + C_1}) + C_2$ ou $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$.

121. $y'' = \frac{a}{y^3}$. Rép. $(C_1 x + C_2)^2 = C_3 y^2 - a$.

Dans les exemples 122-125, écrire la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $x=0, y=-4, y' = 0$.

122. $xy'' - y' = x^2 e^x$. Rép. $y = e^x(x-4) + C_1 x^2 + C_2$. Solution particulière: $y = e^x(x-4)$.

123. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$. Rép. $y + C_1 \log y = x + C_2$. Solution particulière: $y = -1$.

124. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. Rép. $y = C_2 + C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x$. Solution particulière: $y = 2 \sin x - \sin x \cos x - x - 1$.

125. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$. Rép. $y = C_2 - a \cos(x + C_1)$. Solutions particulières: $y = a - 1 - a \cos x; y = a \cos x - (a + 1)$.

(Indication. Forme paramétrique $y'' = a \cos t, y' = a \sin t$.)

126. $y'' = \frac{1}{2y'}$. Rép. $y = \pm \frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$.

127. $y'' = y''^2$. Rép. $y = (C_1 - x)[\log(C_1 - x) - 1] + C_2 x + C_3$.

128. $y'y'' - 3y'^2 = 0$. Rép. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

Intégrer les équations linéaires différentielles suivantes à coefficients constants:

129. $y'' = 9y$. Rép. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

130. $y'' + y = 0$. Rép. $y = A \cos x + B \sin x$.

131. $y'' - y' = 0$. Rép. $y = C_1 + C_2 e^x$.

132. $y'' + 12y = 7y'$. Rép. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

133. $y'' - 4y' + 4y = 0$. Rép. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

134. $y'' + 2y' + 10y = 0$. Rép. $y = e^{-x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$.

135. $y'' + 3y' - 2y = 0$. Rép. $y = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$.

136. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. Rép. $y = (C_1 + C_2 x)e^{3/2x}$.

137. $y'' + y' + y = 0$. Rép. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]$.

138. Deux masses identiques sont suspendues à un ressort à boudin. On suppose que l'une des masses se détache et on demande de trouver le mouvement de

l'autre. Rép. $x = a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)$, où a est l'allongement du ressort sous l'action d'une seule masse au repos.

139. Un point matériel de masse m est sollicité par deux centres, les forces étant proportionnelles à la distance. Le coefficient de proportionnalité est k . La distance entre les deux centres est $2c$. Le corps se trouve à l'instant initial sur la ligne des centres à la distance a du milieu. La vitesse initiale est nulle. Trouver la loi du mouvement du point.

Rép. $x = a \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$.

140. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. Rép. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Rép. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

142. $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$. Rép. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{ax}$.

143. $y^{\text{IV}} - 4y''' = 0$. Rép. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$.
144. $y^{\text{IV}} + 2y'' + 9y = 0$. Rép. $y = (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)e^{-x} + (C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x)e^x$.
145. $y^{\text{IV}} - 8y'' + 16y = 0$. Rép. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3xe^{2x} + C_4xe^{-2x}$.
146. $y^{\text{IV}} + y = 0$. Rép. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$.
147. $y^{\text{IV}} - a^4y = 0$. Trouver la solution générale et mettre en évidence la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$. Rép. Solution générale: $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Solution particulière: $y_0 = \cos ax$.
Intégrer les équations différentielles avec seconds membres; trouver la solution générale;
148. $y'' - 7y' + 12y = x$. Rép. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{12x+7}{144}$.
149. $s'' - a^2s = t + 1$. Rép. $s = C_1e^{at} + C_2e^{-at} - \frac{t+1}{a^2}$.
150. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$. Rép. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{5}(6 \sin 2x + 2 \cos 2x)$.
151. $y'' - y = 5x + 2$. Rép. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 5x - 2$.
152. $s'' - 2as' + a^2s = e^t$ ($a \neq 1$). Rép. $s = C_1e^{at} + C_2te^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2}$.
153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. Rép. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}$.
154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. Rép. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$.
155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$. Rép. $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$.
156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. Rép. $y = e^x (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41} (5 \cos x - 4 \sin x)$.
157. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$. Rép. $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{x}{2} \cos 2x$.
158. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. Rép. $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x} - x - 4$.
159. $y^{\text{IV}} - a^4y = 5a^4e^{ax} \sin ax$. Rép. $y = (C_1 - \sin ax)e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$.
160. $y^{\text{IV}} + 2a^2y'' + a^4y = 8 \cos ax$. Rép. $y = (C_1 + C_2x) \cos ax + (C_3 + C_4x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.
161. Trouver la courbe intégrale de l'équation $y'' + k^2y = 0$ passant par le point $M(x_0, y_0)$ et tangente en ce point à la droite $y = ax$. Rép. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$.

162. Trouver la solution de l'équation $y'' + 2hy' + n^2y = 0$, satisfaisant aux conditions initiales $y = a$, $y' = C$ pour $x = 0$.

Rép. Si $h < n$, $y = e^{-hx} \left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2}x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \sin \sqrt{n^2 - h^2}x \right)$;

si $h = n$, $y = e^{-hx} [(C + ah)x + a]$;

si $h > n$, $y = \frac{C + a(h + \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} - \frac{C + a(h - \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}$.

163. Trouver la solution de l'équation $y'' + n^2y = h \sin px$ ($p \neq n$), satisfaisant aux conditions: $y = a$, $y' = C$ lorsque $x = 0$.

Rép. $y = a \cos nx + \frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px$.

164. Un poids de 4 kg accroché à un ressort l'allonge de 1 cm. Trouver la loi du mouvement du poids, sachant que l'extrémité supérieure du ressort effectue des oscillations harmoniques $y = \sin \sqrt{100}gt$, y étant l'élongation verticale.

Solution. Soit x la coordonnée verticale du poids comptée à partir de la position de repos. On a:

$$\frac{4}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y - l),$$

où l est la longueur du ressort détendu et $k = 400$, comme il résulte des conditions initiales. On en déduit $\frac{d^2x}{dt^2} + 100gx = 100g \sin \sqrt{100}gt + 100lg$. On cherchera une intégrale particulière de cette équation sous la forme

$$t(C_1 \cos \sqrt{100}gt + C_2 \sin \sqrt{100}gt) + l,$$

étant donné que le premier terme du second membre de l'équation entre dans la solution de l'équation homogène.

165. Dans le problème 139, la vitesse initiale est égale à v_0 et elle est dirigée perpendiculairement à la droite entre les centres. Trouver la trajectoire. Solution. Prenons l'origine des coordonnées au milieu du segment reliant les deux centres; les équations différentielles du mouvement s'écrivent:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -2ky.$$

Conditions initiales à l'instant $t = 0$:

$$x = a; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad y = 0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

On trouve en intégrant:

$$x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right), \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right);$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 k}{mv_0^2} = 1 \text{ (ellipse)}.$$

166. Un tube horizontal tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω . Une bille glisse dans le tube sans frottement. Trouver la loi du mouvement de la bille sachant qu'à l'instant initial elle se trouve sur l'axe de rotation et sa vitesse initiale est v_0 (selon l'axe du tube).

Indication. L'équation différentielle du mouvement est $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$.

Conditions initiales: $r=0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ lorsque $t=0$. On trouve en intégrant

$$r = \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} - e^{-\omega t}].$$

Appliquer la méthode de la variation des constantes à l'intégration des équations différentielles suivantes:

167. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. Rép. $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}$.

168. $y'' + y = \sec x$. Rép. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \operatorname{Log} \cos x$.

169. $y'' + y = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Rép. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

Intégrer les équations différentielles suivantes des divers types:

170. $yy'' = y'^2 + 1$. Rép. $y = \frac{1}{2C_1} [e^{C_1(x-C_2)} + e^{-C_1(x-C_2)}]$.

171. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0$. Rép. $\frac{xy}{x-y} = C$.

172. $y = xy'^2 + y'^2$. Rép. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$.

Solutions singulières: $y=0$; $x+1=0$.

173. $y'' + x = \sec x$. Rép. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \operatorname{Log} \cos x$.

174. $(1+x^2)y' - xy - a = 0$. Rép. $y = ax + C\sqrt{1+x^2}$.

175. $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$. Rép. $x e^{\frac{y}{x}} = C$.

176. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$. Rép. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$.

177. $xy' + y - y^2 \operatorname{Log} x = 0$. Rép. $(\operatorname{Log} x + 1 + Cx)y = 1$.

178. $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0$. Rép. $2x + y - 3 \operatorname{Log}(x + \frac{y}{2} + 1) = C$.

179. $3e^x \operatorname{tg} y \frac{dx}{dy} + (1 - e^x) \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0$. Rép. $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^2$.

Intégrer les systèmes d'équations différentielles:

180. $\frac{dx}{dt} = y + 1$, $\frac{dy}{dt} = x + 1$. Indiquer la solution particulière satisfaisant

aux conditions initiales $x = -2$, $y = 0$ pour $t = 0$. Rép. $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$, $x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1$. La solution particulière est: $x^* = -e^{-t} - 1$, $y^* = e^{-t} - 1$.

181. $\frac{dx}{dt} = x - 2y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$. Indiquer la solution particulière correspondant

aux conditions initiales $x=1$, $y=1$ pour $t=0$. Rép. $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $x = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t$. Solution particulière: $x^* = \cos t - \sin t$, $y^* = \cos t$.

182.
$$\begin{cases} 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$$
 Rép. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$, $y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cos t$.

183.
$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases}$$

Rép. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$,
 $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$.

184.
$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 1. \end{cases}$$

Rép. $x = C_1 + C_2 t + C_3 e^2 - \frac{1}{6} t^3 + e^t$,
 $y = C_4 - (C_1 + 2C_3)t - \frac{1}{2} (C_2 -$
 $- 1)t^2 - \frac{1}{3} C_3 t^3 + \frac{1}{24} t^4 - e^t$.

185.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$$

Rép. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$,
 $z = (C_2 - C_1 - C_2 x) e^{-2x}$.

186.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + 4y = 0. \end{cases}$$

Rép. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$,
 $z = -2(C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x})$.

187.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$$

Rép. $y = C_1 + C_2 x + 2 \sin x$,
 $z = -2C_1 - C_2(2x + 1) -$
 $- 3 \sin x - 2 \cos x$.

188.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Rép. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$,
 $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$,
 $z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

189.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}. \end{cases}$$

Rép. $z = C_2 e^{C_1 x}$,
 $y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}$.

190.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{yz}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{y^2}. \end{cases}$$

Rép. $\frac{z}{y} = C_1$,
 $zy^2 - \frac{3}{2} x^2 = C_2$.

Étudier la stabilité de la solution $x=0$, $y=0$ pour les systèmes d'équations différentielles suivants:

191.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases}$$
 Rép. Instable.

192. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$ Rép. Stable.

193. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$ Rép. Instable.

194. Trouver les valeurs approchées des solutions de l'équation $y' = y^2 + x$, vérifiant les conditions initiales : $y = 1$ pour $x = 0$. Trouver les valeurs des solutions pour les valeurs $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$. Rép. $y_{x=0,5} = 2,235$.

195. Trouver la valeur approchée $y_{x=1,4}$ de la solution de l'équation $y' + \frac{1}{x}y = e^x$ vérifiant les conditions initiales : $y = 1$ pour $x = 1$. Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte.

196. Trouver les valeurs approchées $x_{t=1,4}$ et $y_{t=1,4}$ des solutions du système d'équations $\frac{dx}{dt} = y - x$, $\frac{dy}{dt} = -x - 3y$ vérifiant les conditions initiales : $x = 0$, $y = 1$ pour $t = 1$. Comparer les résultats obtenus avec les valeurs exactes.