Chapitre 4

Détermination des surfaces

4.1 Introduction :

L'une des opérations importantes en topographie est le calcul des surfaces en vue d'un certain partage. Pour cela, on peut utiliser deux méthodes de calcul :

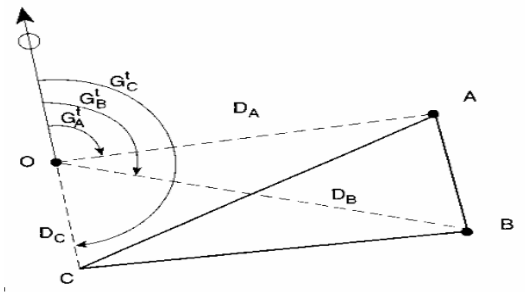
- Le calcul par coordonnées polaire ou par coordonnées rectangulaires.

Le choix de l'une ou l'autre des deux méthodes dépend de la méthode de levé utilisée.

4.2 Calcul par coordonnées polaires

Soit la figure 4.1 ci-après :

Fig. 4.1 : Calcul par coordonnées polaires



D_A, D_B, D_C représentent les distances entre la station O et les points levés ;
G^t_A, G^t_B, G^t_C représentent les gisements correspondants ;

La surface du triangle ABC sera égale à :

$$ABC = OAB + OBC - OAC$$

$$ABC = ½[(D_A \times D_B \times \sin(G^t_B - G^t_A)] + ½[(D_B \times D_C \times \sin(G^t_C - G^t_B)] - ½[(D_A \times D_C \times \sin(G^t_C - G^t_A)]$$

$$ABC = ½[D_A \times D_B \times \sin(G^t_B - G^t_A)] + D_B \times D_C \times \sin(G^t_C - G^t_B)] - D_A \times D_C \times \sin(G^t_A - G^t_C)]$$

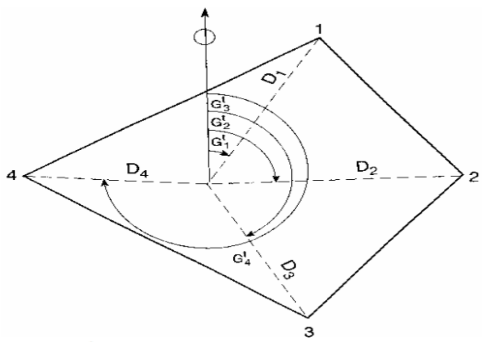
D'une manière générale, on peut écrire :

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; D_i \times D_{i+1} \times \sin(G_{i+1} - G_i)\right]$$
$$\text{avec } i = 1, 2, 3 \ldots n$$

Exemple 1 :

Soit à calculer la surface du quadrilatère représenté à la figure 4.2, en utilisant le calcul par coordonnées polaires.

Fig. 4.2 : exemple de calcul par coordonnées polaires



Distances : D1 = 32.30 m ;
D2 = 49.32 m ;
D3 = 42.14 m ;
D4 = 53.39 m

G^t_1 = 49.12 gr ; G^t_2 = 98.07 gr ; G^t_3 = 131.52 gr ; G^t_4 = 311.10 gr

Solution :

$G^t_2 - G^t_1 = 98.07 - 49.12 = 48.95$ gr

$G^t_3 - G^t_2 = 131.52 - 98.07 = 33.45$ gr

$G^t_4 - G^t_3 = 311.10 - 131.52 = 179.58$ gr

$G^t_1 - G^t_4 = (49.12 - 311.10) + 400 = 138.02$ gr

$32.30 \times 49.32 \times \sin 48.95 = 1107.72\ m^2$

$49.32 \times 42.14 \times \sin 33.45 = 1042.47\ m^2$

$42.14 \times 53.39 \times \sin 179.58 = 709.34\ m^2$

$53.39 \times 32.30 \times \sin 138.02 = 1425.99\ m^2$

$2S = 1107.72 + 1042.47 + 709.34 + 1425.99 = 4285.52\ m^2$

$S = 4285.52/2 = 2142.76\ m^2$

4.3 Calcul par coordonnées rectangulaires

Soit la parcelle de terrain représentée à la figure (4.3). Si l'on projette les points 1, 2, 3 sur les axes x et y et si l'on calcule la surface du triangle de sommets 1, 2, 3, on trouve :

$$S = 1/2[(X_2-X_1) \times (Y_2+Y_1)] + [1/2\ (X_3-X_2) \times (Y_2+Y_3)] - [1/2(X_3-X_1) \times (Y_1+Y_3)]$$

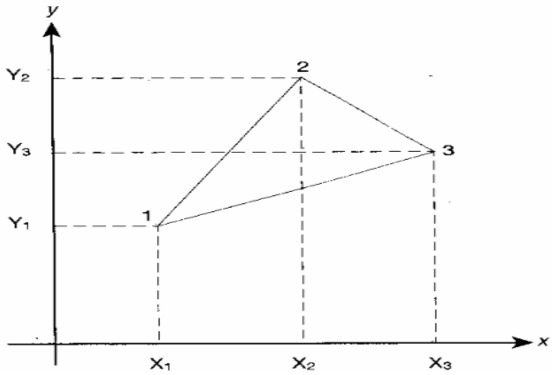


Fig. 4.3 : Calcul par coordonnées rectangulaires

On obtient :

$$S = ½ [Y_1(X_2-X_3) + Y_2\ (X_3-X_1) + Y_3(X_1-X_2)]$$

Ou encore, d'une autre manière :

$$S = ½ [X_1(Y_3-Y_2) + X_2\ (Y_1-Y_3) + X_3(Y_2-Y_1)]$$

Ainsi, d'une manière générale, on aura les formules suivantes :

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_{i+1} - X_{i-1})\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_{i+1} - Y_{i-1})\right]$$

Avec i = 1, 2, 3 … n

$$S = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})\right]$$

Avec i = 1, 2, 3 … n

Exemple 2 :

Soit le triangle de sommets 1, 2, 3 de coordonnées respectives :

1(222.64 m, 224.70 m), 2(444.33 m, 628.25 m), 3(650.33 m, 455.70 m)

On demande de calculer la surface délimitée par ce triangle

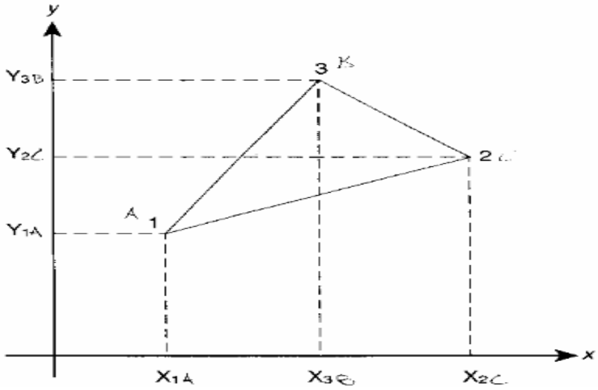


Fig. 4.4 : Exemple de calcul d'une surface par coordonnées rectangulaires

$S = ½ [Y_1(X_2\text{-}X_3) + Y_2 (X_3\text{-}X_1) + Y_3(X_1\text{-}X_2)]$

$S = ½ [224.70 (444.33 - 650.33) +628.25 (650.33\text{-}224.70) + 455.70 (222.64 -444.33)]$

$S = 121383.91/2 = 60691.95\ m^2$

Ou ; $S = 1/2[X_1(Y_3\text{-}Y_2) + X_2(Y_1\text{-}Y_3) + X_3(Y_2\text{-}Y_1)]$

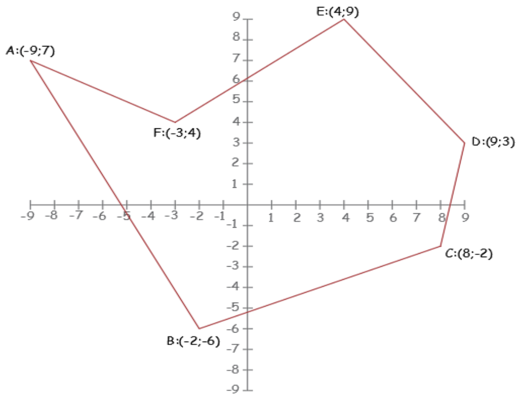
$S = 1/2[222.64\times(455.70 - 628.25) + 444.33\times(224.70 - 455.70) + 650.33\times(628.25 - 224.70)]$

$S = 121383.91/2 = 60691.95\ m^2$

Calcul d'une surface quelconque avec les coordonnées rectangulaires

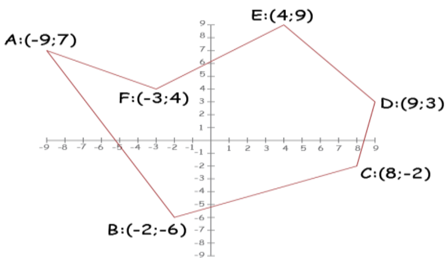
Notez les coordonnées des sommets :

Dans un repère orthonormé, récupérez les coordonnées de chacun des sommets du polygone. En effet, pour ce type de polygone, l'aire peut être calculée à partir des coordonnées des sommets.



Préparez un tableau de coordonnées.
Indiquez tous les sommets et leurs coordonnées x (abscisses) et y (ordonnées) en opérant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Terminez par les coordonnées du premier sommet.

	X	Y
A	-9	7
B	-2	-6
C	8	-2
D	9	3
E	4	9
F	-3	4
A	-9	7



Multipliez l'abscisse d'un sommet par l'ordonnée du suivant.
-9 x -6 = 54
-2 x -2 = 4
8 x 3 = 24
9 x 9 = 81
4 x 4 = 16
-3 x 7 = -21
Additionnez le tout. Dans l'exemple ci-contre, on obtient **<u>158</u>**

	X	Y
A	-9	7
B	-2	-6
C	8	-2
D	9	3
E	4	9
F	-3	4
A	-9	7

Multipliez ensuite l'ordonnée d'un sommet par l'abscisse du suivant.
7 x -2 = -14
-6 x 8 = -48
-2 x 9 = -18
3 x 4 = 12
9 x -3 = -27
4 x -9 = -36
Additionnez le tout. Dans l'exemple ci-contre, on obtient **<u>-131</u>**

	X	Y
A	-9	7
B	-2	-6
C	8	-2
D	9	3
E	4	9
F	-3	4
A	-9	7

Soustrayez la dernière somme de la première.
158 - (-131) = **<u>289</u>**
Divisez alors votre résultat par 2.
289 / 2 = **<u>144.50</u>**
Le polygone étudié a une surface de **<u>144.50 unités carrées</u>**

Si vous prenez les points dans le sens des aiguilles d'une montre, alors qu'il faut les prendre dans le sens contraire, vous allez obtenir la même valeur, mais négative. C'est ainsi que vous pourrez en déduire le sens dans lequel ces points sont organisés. On utilise la méthode analytique.