كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك

السنة الأولى

مقياس : الاقتصاد الجزئي2

تمارين محلولة و مقترحة حول توازن المؤسسة في سوق احتكار القلة

جمعها لكم:

ا.د/ خليفي عيسى

السنة الجامعية: 2024-2025.

تمارين مختارة حول توازن المؤسسة في سوق احتكار القلة

التمارين المحلولة

✓ **التمرين01:** يتكون سوق سلعة من محتكرين حيث دالة طلب السوق هي:

$$P = 50 - 2Q, \qquad Q = q_1 + q_2$$

دالة التكلفة لكل مؤسسة هي:

$$TC_1 = 2q_1^2$$
$$TC_2 = q_2^2$$

أوجد الكميات التوازنية لكل مؤسسة وفق نموذج كورنو واحسب الربح المحقق.

➢ **بالاعتماد على دالتي رد الفعل م$_1$ و م$_2$ احسب الرح المحقق وفق نموذج ستاكلبرغ.**

✓ **التمرين02:**

لنفترض أن السوق تتكون من منتجين اثنين فقط، $q = q_1 + q_2$:

- المؤسسة (1) تنتج الكمية q_1 وفقا لدالة التكلفة الآتية: $CT_1 = 6\,q_1$
- المؤسسة (2) تنتج الكمية q_2 وفقا لدالة التكلفة الآتية: $CT_2 = 0.6\,q_2^2$

أما السعر الذي يباع به الإنتاج في السوق فتحدده دالة الطلب الآتية: $P = 300 - q$

المطلوب: حساب إنتاج وربح المؤسستين، وسعر السوق وفقا لنموذج كورنو.

➢ **بالاعتماد على دالتي رد الفعل م$_1$ و م$_2$ احسب الربح المحقق وفق نموذج ستاكلبرغ.**

➢ **احسب الربح المحقق وفق نموذج باولي.**

✓ **التمرين03:** انظر إلى الشكل التالي:

لتكن لدينا المعطيات التالية: كل من دالة الطلب الكلية $P = 400 - 2Q$

دالة التكلفة الكلية: $TC = 50 + 10(Q1 + Q2)$

1-حساب توازن المنتج في سوق منافسة تامة.

2-حساب توازن المنتج في سوق منافسة احتكارية، اذكر الخاصية الأساسية للفصل بين السوقين.

3-انطلاقا من دالة الطلب السابقة، نفترض أن المنتج أراد أن يزيد من أرباحه، وكانت دالتي الطلب لسوقين مختلفين كما يلي :

$$Q1 = 40 - 2P1$$
$$Q2 = 20 - P2$$

المطلوب: كمية التوازن لكل سوق مع حساب الربح الإجمالي الذي يحققه المنتج.

4- إذا توفر لديك دالتي التكلفة التاليتين انطلاقا من دالة الطلب الكلية:

$$TC1 = Q1^2$$
$$TC2 = 200Q2$$

المطلوب : احسب ربح كل منتج من خلال نموذج **Cournot** و **Stackelberg مع ذكر** فرضيات كل منهما.

✓ **التمرين04:**

مؤسستان تتقاسمان السوق

لدينا دالة التكلفة الكلية للمؤسسة الأولى $CT_1 = 5q_1$

و دالة التكلفة الكلية للمؤسسة الثانية $CT_2 = \frac{1}{2}q_2^2$

و لدينا دالة الطلب الكلية

$$P = 100 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

و المطلوب

قدر ربح المؤسستين حسب نماذج الاحتكار الثنائي

✓ **التمرين05:**

افترض أن دالة الطلب الموجهة نحو مؤسستين تكتب على الشكل: $P=-3Q+99$

وكانت دوال التكلفة للمؤسستين: $C1=51Q_1$; $C2= 33Q_2$

أوجد توازن المؤسستين حسب نموذج كورنو.

أوجد توازن المؤسستين حسب نموذج ستاكل برغ.

✓ **Exercise06 ;**

Sur un marché caractérisé par un duopole (Nombre d'entreprises n = 2) :

- La demande sur le marché est donnée par : $x(p) = 100 - P$
- Les coûts de production sont : $C(x_1) = 4x_1$ et $C(x_2) = 3x_2$

3) **Déterminez les quantités produites par chaque firme ;**
4) **Déterminez le prix et quantités de Cournot**

✓ Exercise07 ;

Deux entreprises produisent des vêtements de luxe, Pradi et Gucca. Chaque entreprise a la fonction de coût suivante:

$C(q)=30q+1,5q^2$

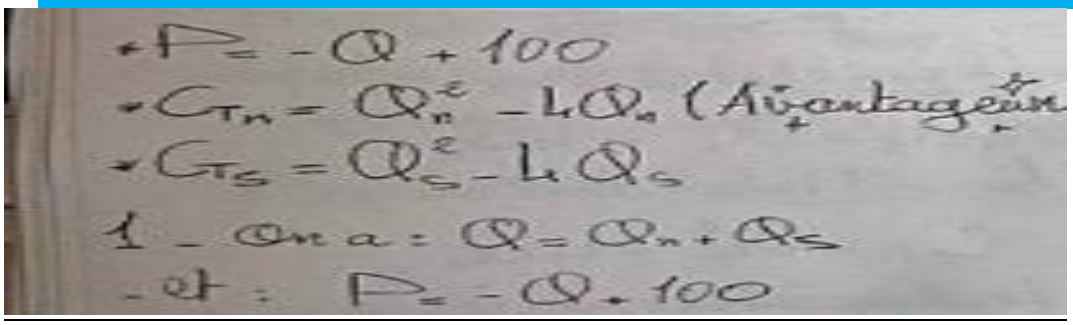
La demande pour les vêtements de luxe est représentée par l'équation de demande inverse suivante:

P=300-3Q

Où $Q=Q_1+Q_2$ est la production totale.

a) **Si chaque entreprise maximise ses profits en prenant la production de sa rivale comme donné (c'est-à-dire si les entreprises se comportent comme dans le modèle de Cournot), quelles seront les quantités de production d'équilibre choisies par chaque entreprise? Quelle est la production totale et le prix du marché? Quels sont les profits réalisés par chaque entreprise?**

✓ Exercise08 ;



Déterminer les nouvelles valeurs d'équilibre selon le duopole de

---

STACKELBERG

تمارين مقترحة

✓ Exercise01 ;

Deux entreprises opèrent sur un marché en produisant un bien X. Les fonctions de coût total des 2 entreprises sont données par les relations :

- CT1 =$20X_1$ (avec X1 qui représente la quantité produite par la firme 1)
- CT 2 = $2X^2$ (avec X2 qui représente la quantité produite par la firme 2)

La demande globale exprimée sur le marché a pour expression :

P= 400 – 2(X1 +X2)

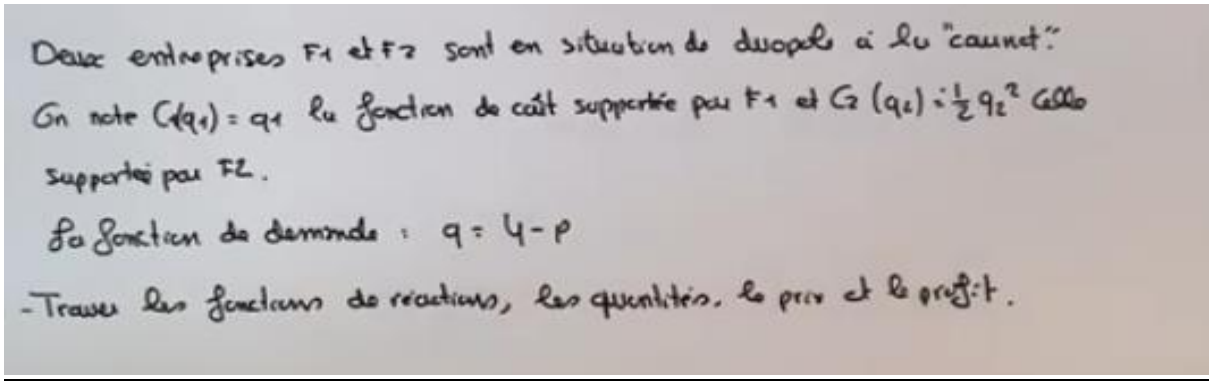
1- Déterminer l'équilibre du marché ainsi que le profit des deux entreprises dans le cas du modèle de Cournot ; Faire la représentation graphique de cette situation

✓ Exercise02 ;

Deux entreprises (A et B) en situation de duopole ont les fonction de coût total suivantes : $C(q_A) = q_A^2$ et $C(q_B) = \frac{1}{2}q_B^2$. La fonction de demande inverse sur ce marché est $P = -q + 100$ où P est le prix de vente du bien produit.

1. Calculez les quantités optimales de l'équilibre de Cournot
2. Calculez les quantités optimales de l'équilibre de Stackelberg

✓ Exercise03 ;



Déterminez le prix et quantités de Cournot

✓ Exercise04 ;

Un duopole assure la production d'un bien X.

Le coût total de l'entreprise 1 est $CT_1 = 0,75q_1^2$ Le coût total de l'entreprise 2 est $CT_2 = q_2^2$

Soit $Q = q1 + q2$

La demande du marché de ce bien est la fonction de la forme $P = -4Q + 100$

1. Calculer la fonction de réaction des deux entreprises dans le cas d'un duopole de Cournot.

✓ Exercise05 ;

Soit un duopole assurant la production d'un bien X.

Le coût total du duopoleur 1 est de : $CT_1 = 40q_1^2 + 100q_1 + 200$ Le coût total du duopoleur 2 est de : $CT_2 = -5q_2^2 + 280q_2 + 400$

Soit $Q = q1 + q2$

La demande totale sur le marché du bien X est de la forme : $P = -10Q + 400$

Déterminer les nouvelles valeurs d'équilibre selon le duopole de Cournot.

✓ Exercise06 ;

Deux firmes se partagent le marché d'un bien X.

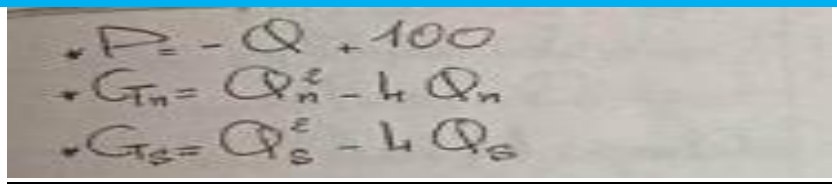
Le coût total du duopoleur 1 est de : $CT_1 = 10q_1$ Le coût total du duopoleur 2 est de : $CT_2 = q_2^2$

Soit $Q = q1 + q2$

La demande totale sur le marché du bien X est de la forme : $Q = -½P + 100$

Déterminer les nouvelles valeurs d'équilibre selon le duopole de Cournot.

✓ Exercise07 ;



Déterminer les nouvelles valeurs d'équilibre selon le duopole de Cournot.

✓ **Exercise08 ;**

Soit un marché en duopole où la fonction de demande est notée $q = 4 - p$ où p est le prix du bien supposé homogène et q désigne la quantité totale demandée. Les fonctions de coût des deux entreprises sont les suivantes:

- pour l'entreprise 1: $C_1(q_1) = q_1$
- pour l'entreprise 2: $C_2(q_2) = 0{,}5\, q_2^2$

L'entreprise 2 est en position de Leader sur le marché: elle choisit la quantité produite la première. La firme 1 (Follower) observe cette quantité et choisit sa production après la firme 2.

1) Déterminer l'équilibre de ce duopole avec leader de Stackelberg.

✓ **Exercise09 ;**

Considèrons un duopole dont la demande inverse est noté $p(Q^d) = 4 - Q^d$, avec $Q^d = q_1^d + q_2^d$ la production totale — supposée homogène — et où les fonctions de coûts total des deux entreprises sont les suivantes :

$C_1(q_1^d) = q_1^d$ où q_1^d est la production de l'entreprise 1

$C_2(q_2^d) = \frac{1}{2}\left[q_2^d\right]^2$ où q_2^d est la production de l'entreprise 2

1. Déterminer l'équilibre de Cournot-Nash de ce marché.

2- Déterminer l'équilibre de ce duopole avec leader de Stackelberg.

✓ **Exercise10 ;**

Exercice 1 Soient deux entreprises en situation de duopole. La fonction du coût total de l'entreprise 1 est: CT1 =10q1 La fonction du coût total de l'entreprise 2 est: CT2 = 0,5q22 La demande au marché de ce bien est: P = -Q + 100 1. Déterminer l'équilibre du duopole dans l'optique de Stackelberg dans le

✓ **Exercise11 ;**

- Soit un duopole où la fonction de demande inverse este notée $P(Q) = 4 - Q$, Q désignant la production totale supposée homogène et où les fonctions de coût total sont les suivantes:

$$\text{Entreprise } \mathbf{1}: \qquad C_1(q_1) = q_1$$
$$\text{Entreprise } \mathbf{2}: \qquad C_2(q_2) = \frac{1}{2}q_2^2$$

q_1, q_2 désignant la production des entrepriss **1** et **2**, avec $Q = q_1 + q_2$.

1. Déterminer l'équilibre de Nash (l'équilibre dite Cournot-Nash).

حلول التمارين

✓ **حل التمرين01:**

إيجاد دالة رد فعل المؤسسة 1:

$$\pi_1 = TR_1 - TC_1 = Pq_1 - TC(q_1)$$
$$\pi_1 = (50 - 2(q_1 + q_2))q1 - 2q_1^2$$
$$\pi_1 = 50q_1 - 2q_1^2 - 2q_1.q_2 - 2q_1^2$$
$$\pi_1 = 50q_1 - 4q_1^2 - 2q_1q_2$$
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 50 - 8q_1 - 2q_2 = 0$$

دالة رد فعل المؤسسة 1 هي:

$$q_1 = \frac{25 - q_2}{4} \qquad (1)$$

إيجاد دالة رد فعل المؤسسة 2:

$$\pi_2 = TR_2 - TC_2 = Pq_2 - TC(q_2)$$
$$\pi_2 = (50 - 2(q_1 + q_2))q_2 - q_2^2$$
$$\pi_2 = 50q_2 - 2q_1.q_2 - 2q_2^2 - q_2^2$$
$$\pi_2 = 50q_2 - 3q_2^2 - 2q_1q_2$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow 50 - 6q_2 - 2q_1 = 0$$

دالة رد فعل المؤسسة 2 هي:

$$q_2 = \frac{25 - q_1}{3} \qquad (2)$$

بتعويض (1) في (2) نجد:

$$q_2 = \frac{25 - \frac{25 - q_2}{4}}{3}$$
$$q_2 = \frac{75 + q_2}{12}$$
$$\Rightarrow 12q_2 = 75 + q_2$$
$$\Rightarrow 11q_2 = 75$$
$$\Rightarrow q_2 = 6.81$$

ومنه:

$$q_1 = \frac{25 - 6.81}{4} = 4.54$$
$$\Rightarrow Q = q1 + q2 = 6.81 + 4.54 = 11.35$$

سعر البيع هو:

$$P = 50 - 2Q = 50 - 2(11.35)$$
$$P = 27.3 \text{ و.ن}$$

حساب الربح المحقق:

$$\pi_1 = Pq_1 - TC(q_1)$$
$$\pi_1 = 27.3(6.81) - 2(6.81)^2$$
$$\pi_1 = 93.15$$

$$\pi_2 = Pq_2 - TC(q_2)$$
$$\pi_2 = 27.3(4.54) - (4.54)^2$$
$$\pi_2 = 103.32$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2$$
$$\pi = 196.47$$

بالاعتماد على المثال (5.4) ودالتي رد الفعل (1)و(2) وبافتراض أن المؤسسة 1 هي القائد والمؤسسة 2 هي التابع، نكتب دالة ربح المؤسسة 1 بدلالة دالة رد فعل المؤسسة2 ونبحث عن القيمة العظمى للربح.

$$\pi_1 = (50 - 2(q_1 + \frac{25 - q_1}{3}))q1 - 2q_1^2$$
$$\pi_1 = 50q_1 - 2q_1^2 - \frac{50}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_1^2 - 2q_1^2$$
$$\pi_1 = \frac{100}{3}q_1 - \frac{10}{3}q_1^2$$

لتعظيم ربح المؤسسة 1:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{100}{3} - \frac{20}{3}q_1 = 0$$
$$\Rightarrow q_1 = 5$$

ومنه:

$$Q = q_1 + q_2 = 5 + 6.66 = 11.66$$ ،

$$q_2 = \frac{25 - 5}{3} = 6.66$$

سعر البيع هو:

$$P = 50 - 2Q = 50 - 2(11.66)$$
$P = 26.68$ و.ن

حساب الربح المحقق لكل مؤسسة:

$$\pi_1 = Pq_1 - TC(q_1)$$
$$\pi_1 = 26.68(5) - 2(5)^2$$
$$\pi_1 = 83.4$$

$$\pi_2 = Pq_2 - TC(q_2)$$
$$\pi_2 = 26.68(6.66) - (6.66)^2$$
$$\pi_2 = 133.32$$

✓ **حل التمرين02:**

من أجل حساب إنتاج وربح المؤسستين، وسعر السوق وفقا لنموذج كورنو فيجب:

- أولا: إيجاد **دالة رد الفعل** الخاصة بكل مؤسسة:

إن الايراد الكلي لكل مؤسسة يعتمد على حجم إنتاجها، وحجم إنتاج منافستها أيضا، حيث:

$$RT_1 = P.q_1 = [300 - (q_1 + q_2)].q_1 = 300\,q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$

$$RT_2 = P.q_2 = [300 - (q_1 + q_2)].q_2 = 300\,q_2 - q_2^2 - q_1q_2$$

وعليه فدالة ربح كل مؤسسة تكون على الشكل الآتي:

المؤسسة 1:

$$\pi_1 = RT_1 - CT_1 = (P.q_1) - (6\,q_1) = [300\,q_1 - q_1^2 - q_1q_2] - [6\,q_1]$$

$$\pi_1 = 294\,q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$

شرط تعظيم الربح هو: $d\pi_1/dq_1 = 0$

$$d\pi_1/dq_1 = 0 \Rightarrow 294 - 2\,q_1 - q_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_1 = 147 - 0.5\,q_2} \qquad \text{دالة رد الفعل المؤسسة (1)}$$

المؤسسة 2:

$$\pi_2 = RT_2 - CT_2 = (P.q_2) - (0.6q_2^2) = [300\,q_2 - q_2^2 - q_1q_2] - [0.6\,q_2^2]$$

$$\pi_2 = 300\,q_2 - 1.6\,q_2^2 - q_1q_2$$

شرط تعظيم الربح هو: $d\pi_2/dq_2 = 0$

$$d\pi_2/dq_2 = 0 \Rightarrow 300 - 3.2\, q_2 - q_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_2 = 93.75 - 0.31\, q_1} \qquad \text{(2) دالة رد الفعل المؤسسة}$$

- **ثانيا:** حساب إنتاج وربح المؤسستين:

ومن خلال دالتي رد الفعل نجد:

$$\begin{cases} q_1 = 147 - 0.5\, q_2 \\ q_2 = 93.75 - 0.31\, q_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_1 = 118.66} \quad , \quad \boldsymbol{q_2 = 56.66}$$

سعر البيع:

$$\boldsymbol{P = 300 - q} = 300 - (q_1 + q_2) = 300 - (118.66 + 56.66) = \boldsymbol{124.68}$$

ربح المؤسسة (1):

$$\pi_1 = 294\,(118.66) - (118.66)^2 - (118.66).(56.66) = \boldsymbol{14082.56}$$

ربح المؤسسة (2):

$$\pi_2 = 300\,(56.66) - 1.6\,(56.66)^2 - (118.66).(56.66) = \boldsymbol{5138.15}$$

توازن كورنو: $q_1=118.66$, $q_2=56.66$, $P=124.68$, $\pi_1=14082.56$, $\pi_2=5138.15$

- **نموذج ستاكلبارغ:**

- **الحالة الأولى: المؤسسة (1) هي المؤسسة القائد**

إذا اتخذت المؤسسة (1) قرار الإنتاج أولا، فإنها تأخذ بعين الاعتبار رد فعل المؤسسة (2)، ويسمى هذا النموذج هنا بنموذج ستاكلبرغ، وهو يختلف عن نموذج كورنو الذي لا تتاح فيه لأي من المؤسستين الفرصة للرد على قرار الأخرى.

لإيجاد التوازن، نلقي أولا نظرة على قرارات إنتاج المؤسسة 2 (التابع)، إذ وبما أنها تتخذ قرارها ثانيا، فهذا يعني أنها ستستخدم كمية إنتاج المؤسسة 1 (القائد) كمعطيات. لذلك، فإن كمية الإنتاج المثلى للمؤسسة (2) ستكون ممثلة من خلال دالة رد فعل التي قمنا بحسابها سابقا في نموذج كورنو:

$q_2 = 93.75 - 0.31\ q_1$ دالة رد الفعل المؤسسة (2)

إذا عدنا للمؤسسة (1)، فإنها تعظم أرباحها إذا تساوى الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية $(Rm_1=Cm_1)$:

الإيراد الكلي للمؤسسة (1):

$$RT_1 = 300\ q_1 - q_1^2 - q_1 q_2$$

وبما أن إيرادات المؤسسة (1) تعتمد على q_2، فيجب عليها أن يستبق قرارها قرار المؤسسة (2)، فهي تعلم أن منافستها ستختار الكمية q_2 بناء على دالة رد الفعل الخاصة بها. وعليه فبتعويض q_2 (دالة رد الفعل المذكورة أعلاه) تكون الإيرادات الكلية للمؤسسة (1) على الشكل الآتي:

$$RT_1 = 300\ q_1 - q_1^2 - q_1(93.75 - 0.31\ q_1)$$
$$RT_1 = 300\ q_1 - q_1^2 - 93.75\ q_1 + 0.31\ q_1^2$$
$$\mathbf{RT_1 = 206.25\ q_1 - 0.69\ q_1^2}$$

الإيراد الحدي:

$$Rm_1 = 206.25 - 1.38\ q_1$$

عند تعظيم أرباح المؤسسة (1): $Rm_1=Cm_1$

$$Cm_1 = dCT_1/dq_1 = 6$$
$$Rm_1=Cm_1 \Rightarrow 206.25 - 1.38\ q_1 = 6$$

$$\Rightarrow 200.25 = 1.38\, q_1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_1 = 145.11} \qquad \textbf{إنتاج المؤسسة (1)}$$

من أجل إيجاد إنتاج المؤسسة (2) نستخدم دالة رد الفعل:

$$q_2 = 93.75 - 0.31\, q_1 = 93.75 - 0.31\,(145.11) = 48.77$$

سعر التوازن:

$$\boldsymbol{P = 300 - q} = 300 - (q_1 + q_2) = 300 - (145.11 + 48.77) = \boldsymbol{106.12}$$

ربح المؤسسة (1):

$$\pi_1 = P.q_1 - CT_1 = [(145.11).(106.12)] - [(6).(145.11)] = \boldsymbol{14528.41}$$

ربح المؤسسة (2):

$$\pi_2 = P.q_2 - CT_2 = [(106.12).(48.77)] - [(0.6).(48.77)^2] = \boldsymbol{3748.36}$$

المؤسسة (1) تسلك سلوك القائد:

$$q_1 = 145.11\ ,\ q_2 = 48.77\ ,\ P = 106.12\ ,\ \pi_1 = 14528.41\ ,\ \pi_2 = 3748.36$$

- **الحالة الثانية: المؤسسة (2) المؤسسة القائد**

$$\boldsymbol{q_1 = 145 - 0.5 q_2} \qquad \text{دالة رد الفعل المؤسسة (1)}$$

المؤسسة (2) تعظم أرباحها إذا تساوى الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية $(Rm_2 = Cm_2)$:

الإيراد الكلي للمؤسسة (2):

$$RT_2 = 300\, q_2 - q_2^2 - q_1 q_2$$

بتعويض q_2 (دالة رد الفعل المذكورة أعلاه) تكون الإيرادات الكلية للمؤسسة (1) على الشكل الآتي:

$$RT_2 = 300\, q_2 - q_2^2 - q_2(145 - 0.5\, q_2)$$

$$RT_2 = 300\, q_2 - q_2^2 - 145\, q_2 + 0.5\, q_2^2$$

$$\boldsymbol{RT_2 = 155\, q_2 - 0.5\, q_1^2}$$

الإيراد الحدي:

$$Rm_2 = 155 - q_2$$

عند تعظيم أرباح المؤسسة (2): $Rm_2=Cm_2$

$$Cm_1 = 1.2\ q_2$$

$$Rm_2=Cm_2 \Rightarrow 155 - q_2 = 1.2\ q_2$$

$$\Rightarrow 155 = 2.2\ q_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{q_2 = 70.45}$$ **إنتاج المؤسسة (2)**

من أجل إيجاد إنتاج المؤسسة (1) نستخدم دالة رد الفعل:

$$\mathbf{q_1 = 145 - 0.5\,q_2} = 145 - 0.5\,(70.45) = \mathbf{109.78}$$

سعر التوازن:

$$\mathbf{P = 300 - q} = 300 - (q_1 + q_2) = 300 - (109.78 + 70.45) = \mathbf{119.77}$$

ربح المؤسسة (1):

$$\pi_1 = P.q_1 - CT_1 = [(119.77).(109.78)] - [(6).(109.78)] = \mathbf{12489.67}$$

ربح المؤسسة (2):

$$\pi_2 = P.q_2 - CT_2 = [(119.77).(70.45)] - [(0.6).(70.45)^2] = \mathbf{5956.19}$$

المؤسسة (2) تسلك سلوك القائد:

$$q_1=109.78\ ,\ q_2=70.45\ ,\ P=119.77\ ,\ \pi_1=12489.67\ ,\ \pi_2=5956.19$$

شرط تعظيم الربح هو: $d\pi_2/dq_2 = 0$

$$d\pi_2/dq_2 = 0 \Rightarrow 300 - 3.2\, q_2 - q_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_2 = 93.75 - 0.31\, q_1} \qquad \text{دالة رد الفعل المؤسسة (2)}$$

- **ثانيا:** حساب إنتاج وربح المؤسستين:

ومن خلال دالتي رد الفعل نجد:

$$\begin{cases} q_1 = 147 - 0.5\, q_2 \\ q_2 = 93.75 - 0.31\, q_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_1 = 118.66} \quad , \quad \boldsymbol{q_2 = 56.66}$$

سعر البيع:

$$\boldsymbol{P = 300 - q} = 300 - (q_1 + q_2) = 300 - (118.66 + 56.66) = \boldsymbol{124.68}$$

ربح المؤسسة (1):

$$\pi_1 = 294\,(118.66) - (118.66)^2 - (118.66).(56.66) = \boldsymbol{14082.56}$$

ربح المؤسسة (2):

$$\pi_2 = 300\,(56.66) - 1.6\,(56.66)^2 - (118.66).(56.66) = \boldsymbol{5138.15}$$

توازن كورنو: $q_1=118.66$, $q_2=56.66$, $P=124.68$, $\pi_1=14082.56$, $\pi_2=5138.15$

- **نموذج باولي:**

في أول الأمر تعتقد كل مؤسسة أنها القائد، فتكون النتيجة:

إنتاج المؤسسة (1) $\boldsymbol{q_1 = 145.11}$

إنتاج المؤسسة (2) $\boldsymbol{q_2 = 70.45}$

سعر التوازن:

$$\boldsymbol{P = 300 - q} = 300 - (q_1 + q_2) = 300 - (145.11 + 70.45) = \boldsymbol{84.44}$$

ربح المؤسسة (1):

$$\pi_1 = 294\, q_1 - q_1^2 - q_1 q_2 = 294\,(145.11) - (145.11)^2 - (145.11)(70.45) = \boldsymbol{11382.43}$$

ربح المؤسسة (2):

$$\pi_2 = 300 q_2 - 1.6\, q_2^2 - q_1 q_2 = 300\,(70.45) - 1.6(70.45)^2 - (145.11)(70.45) = \boldsymbol{2970.87}$$

الربح الكلي:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = 11382.43 + 2970.87 = \boldsymbol{14353.30}$$

في حال اتفاق المؤسستين على تعظيم الربح الكلي فسنحصل على :

$$\pi = RT - CT = P.(q_1 + q_1) - (CT_1 + CT_2)$$

$$\pi = [300 - (q_1 + q_2)](q_1 + q_2) - (6q_1 + 0.6q_2^2)$$

$$\pi = 300\,q_1 + 300\,q_2 - q_1^2 - q_1q_2 - q_1q_2 - q_2^2 - 6q_1 - 0.6q_2^2$$

$$\boldsymbol{\pi = 294\,q_1 + 300\,q_2 - q_1^2 - 1.6q_2^2 - 2\,q_1q_2}$$

وللحصول على الكميات التي تعظم الربح نطبق شرط الدرجة الأولى:

$$\partial\pi/\partial q_1 = 294 - 2\,q_1 - 2\,q_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\partial\pi/\partial q_2 = 300 - 2\,q_1 - 3.2\,q_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من المعادلة (1) نجد:

$$q_1 = 147 - q_2$$

بتعويض q_1 في المعادلة (2) نجد:

$$300 - 2\,(147 - q_2) - 3.2\,q_2 = 0$$

$$\Rightarrow 300 - 294 + 2\,q_2 - 3.2\,q_2 = 6 - 1.2\,q_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_2 = 5}$$

$$\Rightarrow q_1 = 147 - q_2 = 147 - 5 = 142$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q_1 = 142}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{q = q_1 + q_2 = 147}$$

سعر التوازن:

$$\boldsymbol{P = 300 - q} = 300 - (q_1 + q_2) = 300 - (142 + 5) = \boldsymbol{153}$$

ربح المؤسسة (1):

$$\pi_1 = P.q_1 - CT_1 = [(153).(142)] - [(6).(142)] = \boldsymbol{20874}$$

ربح المؤسسة (2):

$$\pi_2 = P.q_2 - CT_2 = [(153).(5)] - [(0.6).(5)^2] = \boldsymbol{750}$$

الربح الكلي:

$$\pi = 20874 + 750 = \boldsymbol{21624}$$

نموذج بولي:

- قبل الاتفاق:

$q_1 = 145.11$, $q_2 = 70.45$, $P = 84.44$, $\pi_1 = 11382.43$, $\pi_2 = 2970.87$, $\pi_T = 14353.30$

- بعد الاتفاق:

$q_1 = 142$, $q_2 = 5$, $P = 153$, $\pi_1 = 20874$, $\pi_2 = 750$, $\pi_T = 21624$

✓ **حل التمرين03:**

3-حساب توازن المنتج في حالة سوق احتكارية تتميز بتمييز السعر :

➢ **المحتكر الأول Q1**

$$TR1 = (20 - 0.5Q1)Q1 = 20Q1 - 0.5(Q1)^2$$
$$\Rightarrow MR1 = 20 - Q1$$
$$MR1 = MC \Rightarrow 20 - Q1 = 10 \Rightarrow \mathbf{Q1 = 10}$$

➢ ***المحتكر الثاني* Q2**

$$TR2 = (20 - Q2)Q2 = 20Q2 - (Q2)^2$$
$$\Rightarrow MR2 = 20 - 2Q2$$
$$MR2 = MC \Rightarrow 20 - 2Q2 = 10 \Rightarrow \mathbf{Q2 = 5}$$

وعليه فان الربح المحصل من السوقين يساوي الى التالي :

$$\pi = TR1 + TR2 - TC(Q1 + Q2)$$

حيث:

1-حساب التوازن في سوق تنافسية تامة

$$\boldsymbol{P = MC} \Rightarrow P = 10 = 400 - 2Q \Rightarrow Q = 195$$

2-حساب التوازن في سوق احتكارية:

لدينا:

$$MR = MC$$
$$MR = \frac{\partial TR}{\partial Q}$$
$$\boldsymbol{TR = PQ} = (400 - 2Q)Q = 400Q - 2Q^2$$
$$\Rightarrow MR = 400 - 4Q$$

ومنه:

$$MR = MC \Rightarrow 400 - 4Q = 10$$
$$\Rightarrow Q = \frac{400 - 10}{4} \Rightarrow \boldsymbol{Q = 97.5}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{P = 205}$$

$$TR1 = (20 - 0.5Q1)Q1 = (20 - 0.5X10)10 = \mathbf{150}$$
$$TR2 = (20 - Q2)Q2 = (20 - 5)5 = \mathbf{75}$$
$$TC = 50 + 10(Q1 + Q2) = 50 + 10(10 + 5) = 200$$

ومنه:

$$\pi = 150 + 75 - 200 = 25$$
$$\boldsymbol{\pi = 25}$$

4-حساب توازن السوق في حالة احتكار الثنائي ل Cournot

$$\boldsymbol{\pi 1} = \mathrm{f(Q1 + Q2)Q1 - TC1} = 400Q1 - 3Q1^2 - 2Q1Q2$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\pi 1}}{\partial Q1} = 0 \Rightarrow 400 - 6Q1 - 2Q2 = 0 \Longrightarrow Q1 = 66.66 - 0.33Q2$$
$$\boldsymbol{\pi 2} = \mathrm{f(Q1 + Q2)Q2} = [400 - 2(Q1 + Q2)]Q2 - 200Q2$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\pi 2}}{\partial Q2} = 0 \Rightarrow 400 - 2Q1 - 4Q2 - 200 = 0$$
$$\Rightarrow Q2 = 50 - 0.5Q1$$
$$\Rightarrow Q2 = 50 - 0.5(66.66 - 0.33Q2)$$
$$\Rightarrow Q2 = 19.96$$
$$\Rightarrow Q1 = 60.07$$
$$\Rightarrow \pi 1 = 10804.7909$$
$$\Rightarrow \pi 2 = 787.2024$$

- حساب توازن السوق بطريقة Stackelberg

$$\boldsymbol{\pi 1} = \mathrm{f(Q1 + Q2)Q1 - TC1} = [400 - 22(Q1 + Q]Q1 - Q1^2$$

$$\Rightarrow \pi 1 = 400Q1 - 3Q1^2 - 2Q1(50 - 0.5Q1) = 300Q1 - 2Q1^2$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi 1}}{\partial Q1} = 300 - 4Q1 = 0 \Longrightarrow Q1 = 75\,.Q2 = 12.5$$

✓ **حل التمرين04:**

الحالة الأولى : حسب نموذج كورنو

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 100q_1 - \frac{1}{2}q_1(q_1 + q_2) - 5q_1$$

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_2(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}q_2^2$$

شرط تعظيم الربح يقتضي عدم المشتقات الجزئية لدالتي الربح

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 100 - q_1 - \frac{1}{2}q_2 - 5 = 0 \quad . \ . \ . \ (1)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 100 - q_2 - \frac{1}{2}q_1 - q_1 = 0 \quad . \ . \ . \ (2)$$

و من (1) و (2) نحصل على منحنيي رد الفعل

منحنى رد فعل المؤسسة 1

$$q_1 + 95 - \frac{1}{2}q_2 \quad . \ . \ . \ (3)$$

منحنى رد فعل المؤسسة 2

$$2q_2 = 100 - \frac{1}{2}q_1$$

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1 \quad . \ . \ . \ (4)$$

نعيد كتابة (3) و (4) كما يلي :

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2 \ . \ . \ . \ (5)$$

$$\frac{1}{4}q_1 = 50 - q_2 \ . \ . \ . \ (6)$$

بضرب المعادلة (6) بـ $\left(\frac{-1}{2}\right)$ تصبح هاتين المعادلتين كما يلي :

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2$$

و بالجمع نجد

$$-\frac{1}{8}q_1 = -25 + \frac{1}{2}q_2$$

$$0.875q_1 = 70$$

$$q_1 = \frac{70}{0.875} = 80 \text{ وحدة}$$

بالتعويض في المعادلة (4) نجد :

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}(80)$$

و منه

$$q_2 = 30 \text{ وحدة}$$

و الإنتاج الكلي q

$$q = q_1 + q_2 = 80 + 30 = 110$$

و ثمن السلعة بالتعويض في دالة الطلب نجد :

$$P = 100 - \frac{1}{2}(110)$$

$$P = 45 \text{ و . نقدية}$$

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 100(80) - \frac{1}{2}(80)(110) - 5(80)$$

$$= 8000 - 4400 - 400 = 3200 \text{ و . نقدية}$$

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 100(30) - \frac{1}{2}(30)(110) - \frac{1}{2}(30)^2$$

$$= 3000 - 1650 - 450 = 900 \text{ و . نقدية}$$

الحالة الثانية : حسب نموذج ستاكلبرغ

نفترض أن المؤسسة الأولى تسلك سلوك القائد ، و نأخذ بنظر الاعتبار قرار المؤسسة الثانية

منحنى رد المؤسسة الثانية هو :

$$q_2 = 50 - \frac{1}{4}q_1$$

نفترض أن المؤسسة الثانية تسلك سلوك القائد ، و نأخذ بنظر الاعتبار قرار المؤسسة الأولى

منحنى رد فعل المؤسسة الأولى

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}q_2$$

و بالتعويض في دالة ربح المؤسسة الثانية فنحصل على

$$\pi_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_2\left(95 - \frac{1}{2}q_2\right) - \frac{1}{2}q_2^2$$

$$= 100q_2 - \frac{1}{2}q_2^2 - 47.5q_2 + \frac{1}{4}q_2^2 - \frac{1}{2}q_2^2$$

$$= 52.5q_2 - \frac{3}{4}q_2^2$$

تعظيم الربح يقتضي عدم المشتق الأول لدالة الربح

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = 52.5 - \frac{6}{4}q_2 = 0$$

$$= 52.5 - \frac{3}{2}q_2 = 0 \rightarrow 105 = 3q_2$$

$$q_2 = \frac{105}{3} = 35 \text{ وحدة}$$

و بالتعويض في منحنى رد فعل المؤسسة 1 نجد :

$$q_1 = 95 - \frac{1}{2}(85)$$

$$= 95 - 17.5 = 77.5 \text{ وحدة}$$

ربح المؤسسة الأولى

$$\pi_1 = 70(77.5) - \frac{3}{8}(77.5)^2$$

$$= 5425 - 2252.3$$

$$= 3172.7 \text{ وحدة نقدية}$$

ربح المؤسسة الثانية

$$\pi_2 = 52.5(35) - \frac{3}{4}(35)^2$$

$$= 1837.5 - 918.8$$

$$= 918.7 \text{ وحدة نقدية}$$

حسب نموذج بولي

في أول الأمر تعتقد كل مؤسسة أنها القائدة فيكون نتيجة لذلك

$$q_2 = 35 \quad , \; q_1 = 93.33$$

$$\pi_1 = 95q_1 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_1q_2$$

$$\pi_2 = 100q_2 - \frac{1}{2}q_1q_2 - q_2^2$$

و بالتعويض بالكميتين q_1 ، q_2 في معادلتي الربح نجد :

$$\pi_1 = 95(93.33) - \frac{1}{2}(93.33)^2 - \frac{1}{2}(93.33)(35)$$

$$= 8866.4 - 4355.2 - 1633.3$$

$$= 2878 \text{ وحدة نقدية}$$

$$\pi_2 = 100(35) - \frac{1}{2}(93.33)(35) - (35)^2$$

$$= 3500 - 1633.3 - 1225$$

$$= 642 \text{ وحدة نقدية}$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2$$

$$= 2878 + 642$$

$$= 3520$$

و في حال اتفاق المؤسستين على تعظيم الربح الكلي فسنحصل على :

$$\pi = 100(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(q_1 + q_2) - 5q_1 - \frac{1}{2}q_2^2$$

و للحصول على الكميات المعظمة للربح نطبق شرط الدرجة الأولى

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 95 - q_1 - q_2 = 0 \rightarrow q_1 + q_2 = 95 \ldots (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0 \rightarrow q_1 + 2q_2 = 100 \ldots (2)$$

بضرب المعادلة (1) في (-1) نجد :

$$\left.\begin{array}{l} -q_1 - q_2 = 95 \\ \\ q_1 + 2q_2 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow q_2 = 5 \text{ وحدات}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$q_1 + 5 = 95 \rightarrow q_1 = 90 \text{ وحدة}$$

$$q = 90 + 5 = 95 \text{ وحدة}$$

$$P = 100 - \frac{1}{2}(95) \rightarrow P = 52.5 \text{ وحدة نقدية سعر السلعة}$$

$$RT = P.q \text{ الإيراد الكلي}$$

$$= (52.5)(95) = 4987.5 \text{ وحدة نقدية}$$

$$CT = (5)(90) + \frac{1}{2}(5)^2 \text{ التكلفة الكلية}$$

$$= 450 + 12.5$$

$$= 462.5 \text{ وحدة نقدية}$$

$$\text{الربح الكلي} = 4987.5 - 462.5 = 4525 \text{ وحدة نقدية}$$

✓ **<u>حل التمرين05: - نموذج كورنو:</u>**

أ- تشكيل دالة الطلب: بما أن السوق يحتوي على مؤسستين تنتج كل منها كمية معينة فتصبح دالة الطلب السوقية بدلالة الكميات المنتجة من كل مؤسسة على الشكل الآتي: $P=-3(Q1+Q2)+9$

ب- تشكيل دالتي الربح لكل مؤسسة:

$\tau_1=R_1-C_1= Q_1.F(Q_1,Q_2)-C_1 \rightarrow \tau_1=Q_1(-3(Q_1+Q_2)+99)-51Q_1$

$\rightarrow \boldsymbol{\tau_1=-3\ Q_1^2-3Q_1Q_2+48Q_1}$

$\tau_2=R_2-C_2= Q_2.F(Q_1,Q_2)-C_2 \rightarrow \tau_2=Q_2(-3(Q_1+Q_2)+99)- 33Q_2$

$\rightarrow \tau_2 = -3Q_1Q_2 - 3Q_2^2 + 66Q_2$

ت- تحقق المؤسستين أعظم ربح لهما إذا تحقق الشرطين الآتيين:

الشرط الضروري:

$\frac{\partial \tau 1}{\partial Q1} = 0 \rightarrow -6Q_1 - 3Q_2 + 48 = 0$

من هذه المعادلة يمكن كتابة دالة رد فعل المؤسسة (1) من الشكل: $Q_1 = \frac{-Q2}{2} + 8$

$\frac{\partial \tau 2}{\partial Q2} = 0 \rightarrow -3Q_1 - 6Q_2 + 66 = 0$

من هذه المعادلة يمكن كتابة دالة رد فعل المؤسسة (2) من الشكل: $Q_2 = \frac{-Q1}{2} + 11$

يؤدي تقاطع دوال رد الفعل إلى الحل:

$Q_1 = \frac{-(\frac{-Q_1}{2} + 11)}{2} + 8 \rightarrow Q_1 = \frac{Q1}{4} + 2.5 \rightarrow \frac{3Q1}{4} = 2.5 \rightarrow Q_1 = 3.33$

$Q_2 = \frac{-3.33}{2} + 11 \rightarrow Q_2 = 9.33$

الشرط الكافي:

$\frac{\partial^2 \tau 1}{\partial^2 Q1} < 0 \rightarrow -6 < 0$ وهو محقق

$\frac{\partial^2 \tau 2}{\partial^2 Q2} < 0 \rightarrow -6 < 0$ وهو محقق

- **<u>نموذج ستاكلبارغ:</u>**

من حل المثال يمكننا اشتقاق المعطيات الآتية:

دالة رد فعل المؤسسة (1) من الشكل: $Q_1 = \frac{-Q2}{2} + 8$

دالة رد فعل المؤسسة (2) من الشكل: $Q_2 = \frac{-Q1}{2} + 11$

- **في حالة كانت المؤسسة (1) في موقف قيادي:**

من معطيات حل المثال رقم توصلنا إلى أن دالة ربح المؤسسة الأولى يكتب كما يلي:

$\tau_1 = -3\ Q_1^2 - 3Q_1Q_2 + 48Q_1$

ويؤدي استعمال دالة رد الفعل للمؤسسة (2) في حساب ربح المؤسسة الأولى (أي تعويض قيمة Q_2 في دالة ربح المؤسسة 1) كما يأتي.

$$\tau_1=-3\ Q_1^2-3Q_1Q_2+48Q_1 \rightarrow \tau_1=-3\ Q_1^2-3Q_1(\frac{-Q1}{2}+11)+48Q_1$$

$$\tau_1=-3\ Q_1^2+\frac{3Q1^2}{2}-33\ Q_1+48Q_1 \rightarrow \tau_1=\frac{-3Q1^2}{2}+15Q_1$$

تحقق المؤسسة (1) أعظم ربح إذا تحقق الشرطين الضروري والكافي.

الشرط الضروري: $\frac{\partial \tau 1}{\partial Q1}=0 \rightarrow -3Q_1+15=0 \rightarrow \mathbf{Q_1^*=5}$

الشرط الكافي: وهو محقق $\frac{\partial^2 \tau 1}{\partial^2 Q1}<0 \rightarrow -3<0$

وعليه فالمؤسسة (1) تحقق أعظم ربح ببيع إنتاج قدره ($Q_1^*=5$).

وبتعويض قيمة $Q_1^*=5$ في دالة رد فعل المؤسسة الثانية نجد:

$$Q_2=\frac{-5}{2}+11 \rightarrow \mathbf{Q^*_2=8.5}$$

وبالتالي ومن خلال تعويض Q_1 وQ_2 في دوال الربح نصل إلى أن الربح المحقق في المؤسستين يقدر بـ:

$$\tau_1=-3\ Q_1^2-3Q_1Q_2+48Q_1 \rightarrow \tau_1=-3\ (5)^2-3(5)(8.5)+48(5) \rightarrow \mathbf{\tau_1=37.5}$$

$$\tau_2=-3Q_1Q_2-3Q_2^2+66Q_2 \rightarrow \tau_2=-3(5)(8.5)-3(8.5)^2+66(8.5) \rightarrow \mathbf{\tau_2=216.75}$$

- **في حالة كانت المؤسسة (2) في موقف قيادي:**

تكتب دالة الربح للمؤسسة (2) على شكل:

من معطيات حل المثال رقم توصلنا إلى أن دالة ربح المؤسسة الأولى يكتب كما يلي:

$$\tau_2=-3Q_1Q_2-3Q_2^2+66Q_2$$

ويؤدي استعمال دالة رد الفعل للمؤسسة (1) في حساب ربح المؤسسة الثانية (أي تعويض قيمة Q_1 في دالة ربح المؤسسة (2) كما يأتي.

$$\tau_2=-3Q_1Q_2-3Q_2^2+66Q_2 \rightarrow \tau_2=-3(\frac{-Q2}{2}+8)Q_2-3Q_2^2+66Q_2$$

$$\tau_2=\frac{3Q2^2}{2}-24\ Q_2-3Q_2^2+66Q_2 \rightarrow \tau_2=\frac{-3Q2^2}{2}+42Q_2$$

تحقق المؤسسة (2) أعظم ربح إذا تحقق الشرطين الضروري والكافي.

الشرط الضروري: $\frac{\partial \tau 2}{\partial Q2}=0 \rightarrow -3Q_2+42=0 \rightarrow \mathbf{Q_2^*=14}$

الشرط الكافي: وهو محقق $\frac{\partial^2 \tau 2}{\partial^2 Q2}<0 \rightarrow -3<0$

وعليه فالمؤسسة (2) تحقق أعظم ربح ببيع إنتاج قدره ($Q_2^*=14$).

وبتعويض قيمة $Q_2^*=14$ في دالة رد فعل المؤسسة الأولى نجد:

$$Q_1=\frac{-Q2}{2}+8 \rightarrow \mathbf{Q^*_1=1}$$

وبالتالي ومن خلال تعويض Q_1 وQ_2 في دوال الربح نصل إلى أن الربح المحقق في المؤسستين يقدر بـ:

$$\tau_2=-3Q_1Q_2-3Q_2^2+66Q_2 \rightarrow \tau_2=-3(1)(14)-3(14)^2+66(14) \rightarrow \boldsymbol{\tau_2=294}$$

$$\tau_1=-3\,Q_1^2-3Q_1Q_2+48Q_1 \rightarrow \tau_1=-3\,(1)^2-3(1)(14)+48(1) \rightarrow \boldsymbol{\tau_1=3}$$

حسب التحليل والنتائج تفضل كل مؤسسة أن تكون في موقع قيادي وهذه الحالة سوف تؤدي إلى:

- انسحاب المؤسسة الأضعف؛
- أو تفاهم وتحويل إلى مؤسسة احتكارية.

✓ Correction exercise06;

1) Quantités produites par les deux firmes

Entreprise 1	Entreprise 2
$\boldsymbol{\pi_1} = \mathrm{P}.x_1 - \mathrm{C}(x_1)$ $= (100-x)x_1 - 4x_1$ $= (100-(x_1+x_2))x_1 - 4x_1$ $= (100x_1 - x_1^2 - x_1x_2) - 4x_1$	$\boldsymbol{\pi_2} = \mathrm{P}.x_1 - \mathrm{C}(x_2)$ $= (100-x)x_2 - 3x_2$ $= (100-(x_1+x_2))x_2 - 3x_2$ $= (100x_2 - x_2^2 - x_1x_2) - 3x_2$
$\boldsymbol{\pi_1} = -x_1^2 - x_1x_2 + 96x_1$	$\boldsymbol{\pi_2} = -x_2^2 - x_1x_2 + 97x_2$
$\boldsymbol{Max\ \pi_1} = \frac{d\,\boldsymbol{\pi_1}}{d\,x_1} = 0$ $= -2x_1 - x_2 + 96x_1$ $-2x_1 = x_2 - 96x_1$	$\boldsymbol{Max\ \pi_2} = \frac{d\,\boldsymbol{\pi_2}}{d\,x_2} = 0$ $-2x_2 - x_1 + 97 = 0$ $-2x_2 = x_1 - 97 = 0$
$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^{ant} + 48$ **Fonction de réaction 1**	$x_2 = -\frac{1}{2}x_1^{ant} + 48,5$ **f de réaction 2**

A l'équilibre $\begin{cases} x_1^* = x_1^{ant} \\ x_2^* = x_2^{ant} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \mathbf{1)}\ x_1^* = -\frac{1}{2}x_2^{ant} + 48 \\ \mathbf{2)}\ x_2^* = -\frac{1}{2}x_1^{ant} + 48,5 \end{cases}$

On remplace 2 en 1 :

$x_1^* = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x_1^* + 48{,}5) + 48$ <=> $x_1^* = \frac{1}{4}x_1^* - 24{,}25 + 48$

$\frac{3}{4}x_1^* = 23{,}75$ <=> $x_1^* = 31{,}67$ et $x_2^* = 32{,}67$

2) Quantité et prix de Cournot :

$x(p) = 100 - P$ => $P = 100 - x(p)$ => $P = 100 - (32{,}67 + 31{,}67)$ **Pc = 35,66**

$x(p) = 100 - P$ => $x(p) = 100 - 64{,}34$ => **Qc = 64,34**

✓ Correction exercise07;

Dans le cadre du **modèle Cournot** chaque entreprise, lorsqu'elle prend sa décision de production, suppose que la quantité produite par son concurrent est fixée. Pour maximiser son profit, l'entreprise 1 égalise sa recette marginale et son coût marginal.

Sa recette totale RT_1 est donnée par:

$$RT_1 = PQ_1 = (300 - 3Q)Q_1 = 300Q_1 - 3(Q_1 + Q_2)Q_1 = 300Q_1 - 3Q_1^2 - 3Q_2Q_1$$

La recette marginale Rm_1 correspond à la recette supplémentaire résultant de la production supplémentaire de la quantité Q_1:

$$Rm_1 = \frac{\partial RT_1}{\partial Q_1} = 300 - 6Q_1 - 3Q_2$$

Le coût marginal de l'entreprise correspond à:

$$\frac{\partial C(Q_1)}{\partial Q_1} = 30 + 3Q_1$$

En égalisant la recette marginale au coût marginale et en résolvant l'équation en Q1, nous trouverons *la courbe de réaction de l'entreprise 1* qui donne la quantité de production optimale pour l'entreprise 1 en fonction de celle de son concurrent.

$$300 - 6Q_1 - 3Q_2 = 30 + 3Q_1$$

$$-9Q_1 = -270 + 3Q_2$$

Courbe de réaction de l'entreprise 1: $Q_1 = 30 - \frac{1}{3}Q_2$

Nous pouvons faire le même calcul pour l'entreprise 2:

Courbe de réaction de l'entreprise 2: $Q_2 = 30 - \frac{1}{3}Q_1$

A l'équilibre, chaque entreprise décide de sa production en fonction de sa courbe de réaction, et les quantités de production d'équilibre se trouvent par conséquent à l'intersection des deux courbes de réaction.

$$Q_1 = 30 - \frac{1}{3}\left(30 - \frac{1}{3}Q_1\right)$$

$$\frac{8}{9}Q_1 = 20$$

Q_1=22,5

Q_2=30-1/3*22,5=**22,5**

Donc, **équilibre de Cournot**: **Q_1=Q_2=22,5**

La production totale: Q=Q_1+Q_2=22,5+22,5=**45**

Le prix d'équilibre: P=300-3Q=300-3*45=**165**

Le profit de chaque entreprise:

$\pi_1 = \pi_2 = PQ^* - C(Q^*) = 165 * 22,5 - 30 * 22,5 - 1,5(22,5)^2 = 3712,5\text{-}675\text{-}1,5*506,25=$**2278.125**

Méthode 2 pour retrouver la quantité produite de chaque entreprise:

Chaque entreprise va résoudre le problème suivant:

$$\max_{Q_i}\left\{\pi_i = (300 - 3Q)Q_i - \left(30Q_i + 1,5Q_i^2\right)\right\}$$

Pour l'entreprise 1 donc:

$$\max_{Q_1}\left\{(300 - 3Q_1 - 3Q_2)Q_1 - 30Q_1 - 1,5Q_1^2\right\}$$

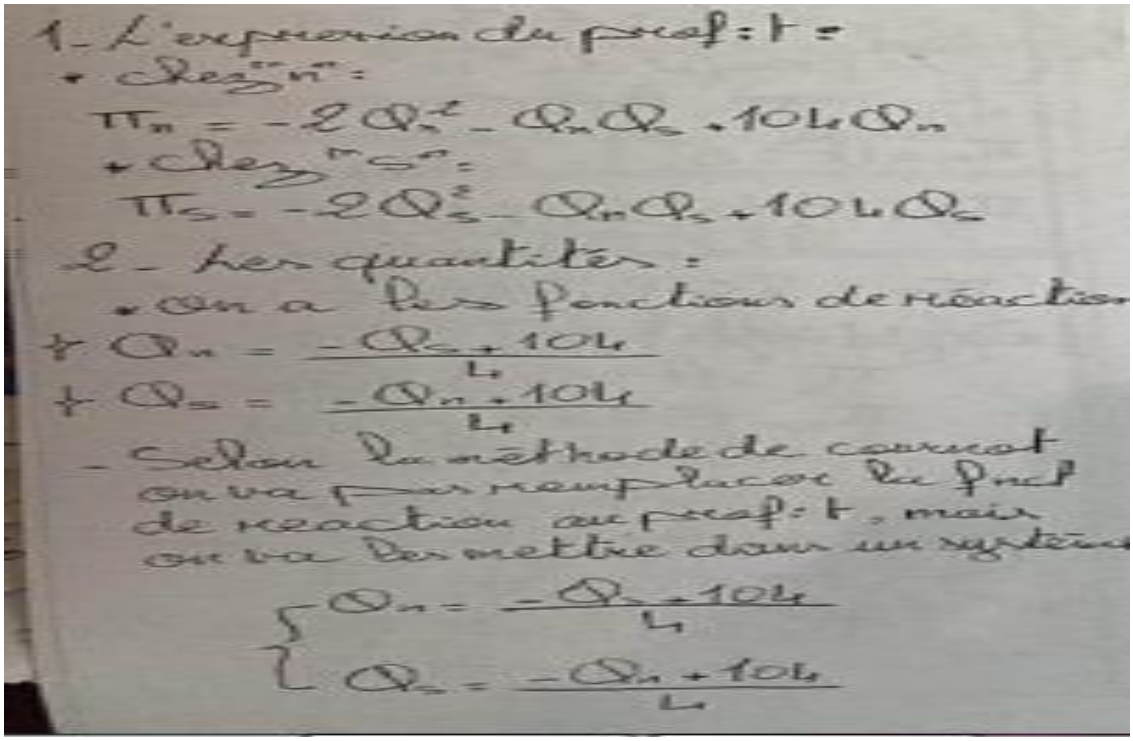
A l'optimum CPO doit être vérifiée:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 300 - 6Q_1 - 3Q_2 - 30 - 3Q_1 = 0$$

Par symétrie, la quantité produite est identique pour chaque firme et on chercher un équilibre de Nash symétrique $q_1^* = q_2^* = q^*$

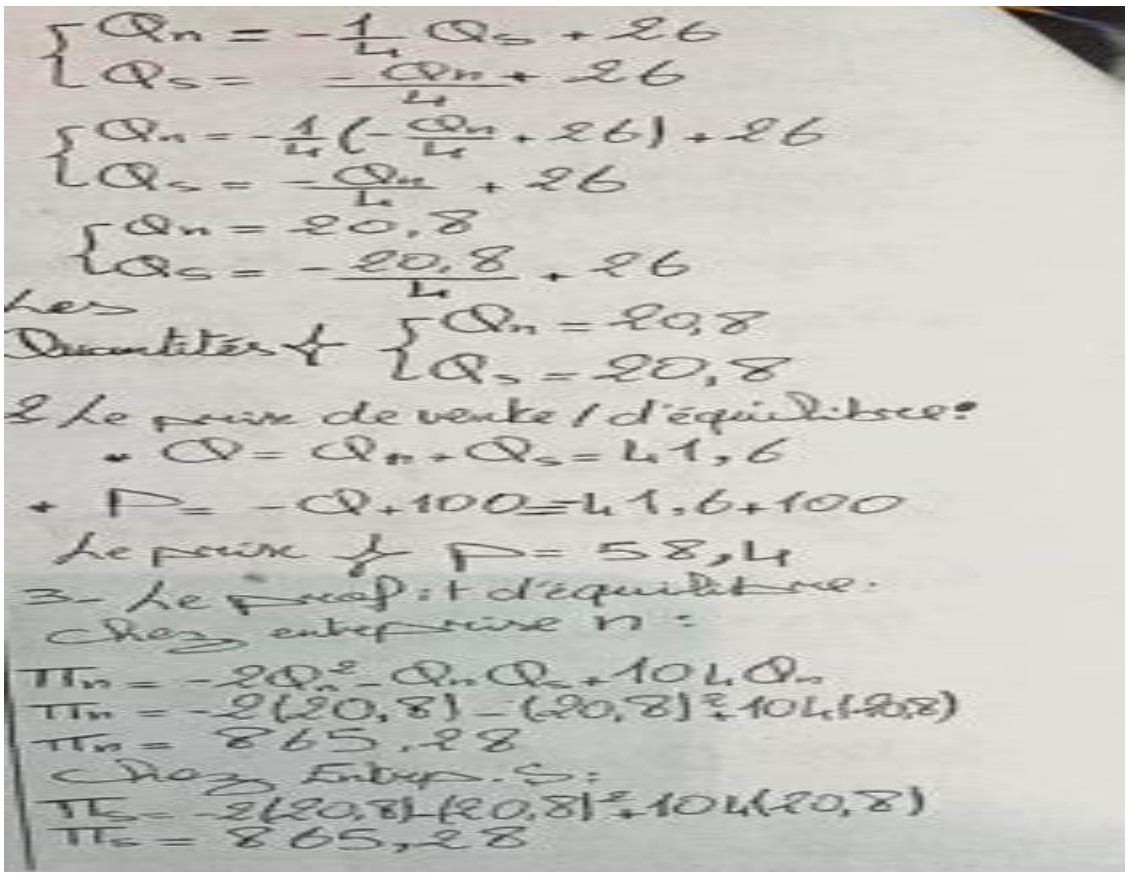
300-6q*-3q*-30-3q*=0
270-12q*=0
Donc, Q_1=Q_2=22,5

✓ **Correction exercise08;**



1- L'expression du profit :
• chez "n" :
$\Pi_n = -2Q_n^2 - Q_nQ_s + 104Q_n$
• chez "s" :
$\Pi_s = -2Q_s^2 - Q_nQ_s + 104Q_s$
2- les quantités :
• on a les fonctions de réaction
$Q_n = \frac{-Q_s + 104}{4}$
$Q_s = \frac{-Q_n + 104}{4}$
- selon la méthode de cournot on va remplacer la fonct de réaction au profit, mais on va les mettre dans un système

$$\begin{cases} Q_n = \frac{-Q_s + 104}{4} \\ Q_s = \frac{-Q_n + 104}{4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} Q_n = -\frac{1}{4}Q_s + 26 \\ Q_s = \frac{-Q_n}{4} + 26 \end{cases}$$

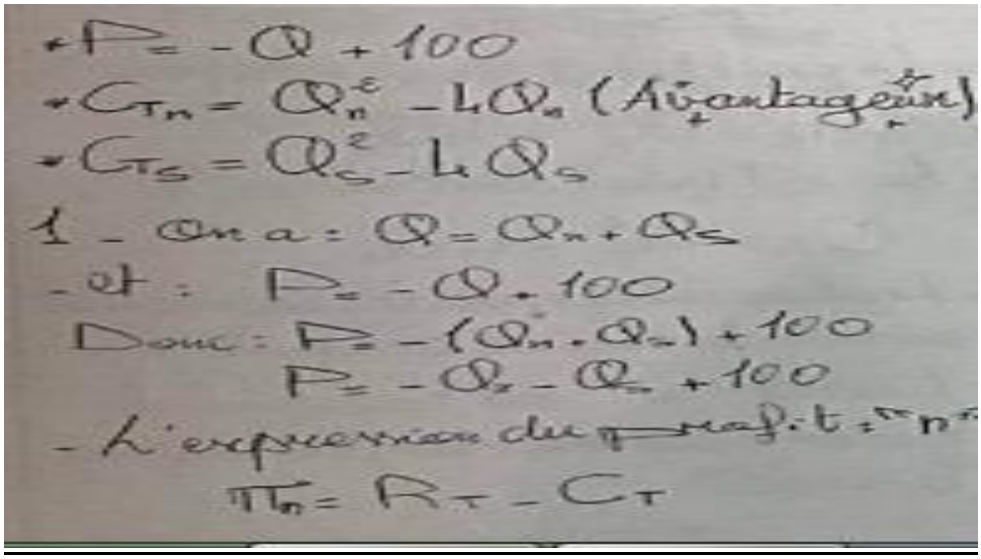
$$\begin{cases} Q_n = -\frac{1}{4}(-\frac{Q_n}{4} + 26) + 26 \\ Q_s = -\frac{Q_n}{4} + 26 \end{cases}$$

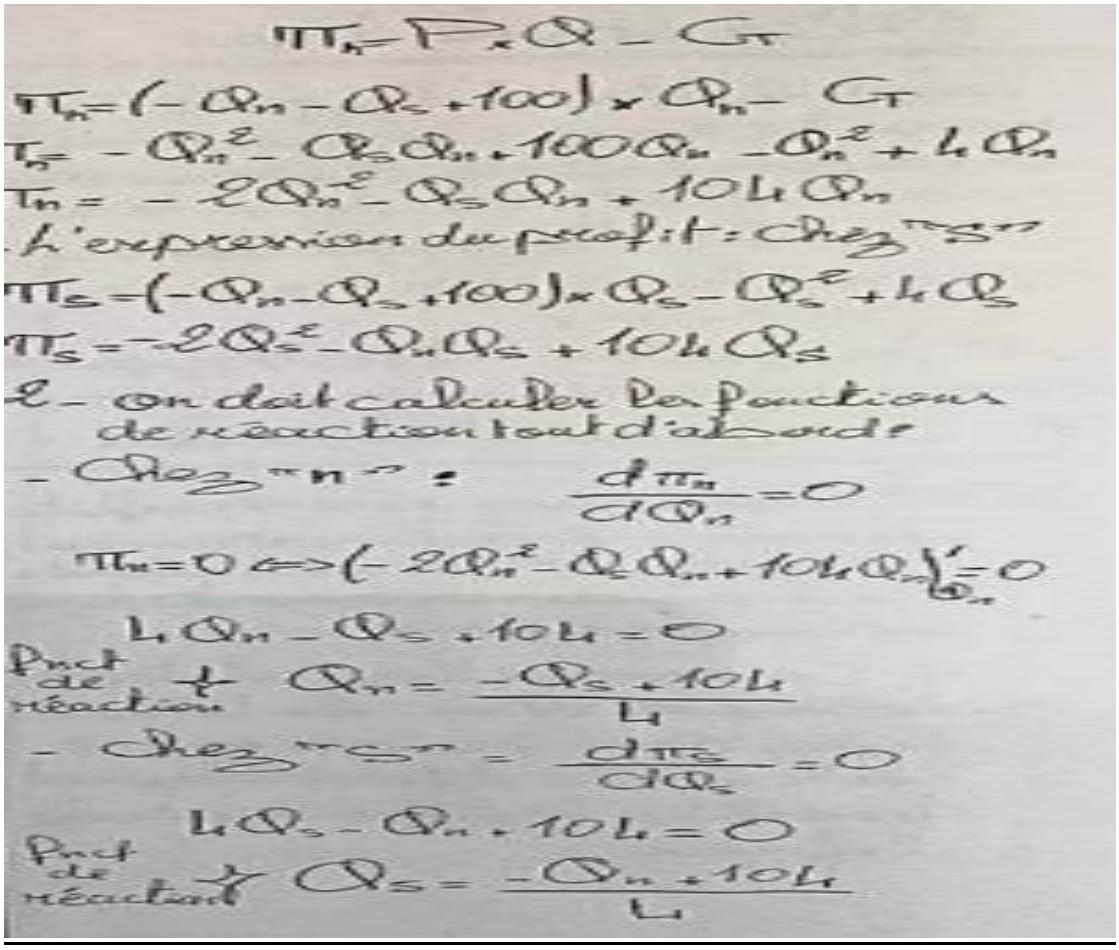
$$\begin{cases} Q_n = 20,8 \\ Q_s = -\frac{20,8}{4} + 26 \end{cases}$$

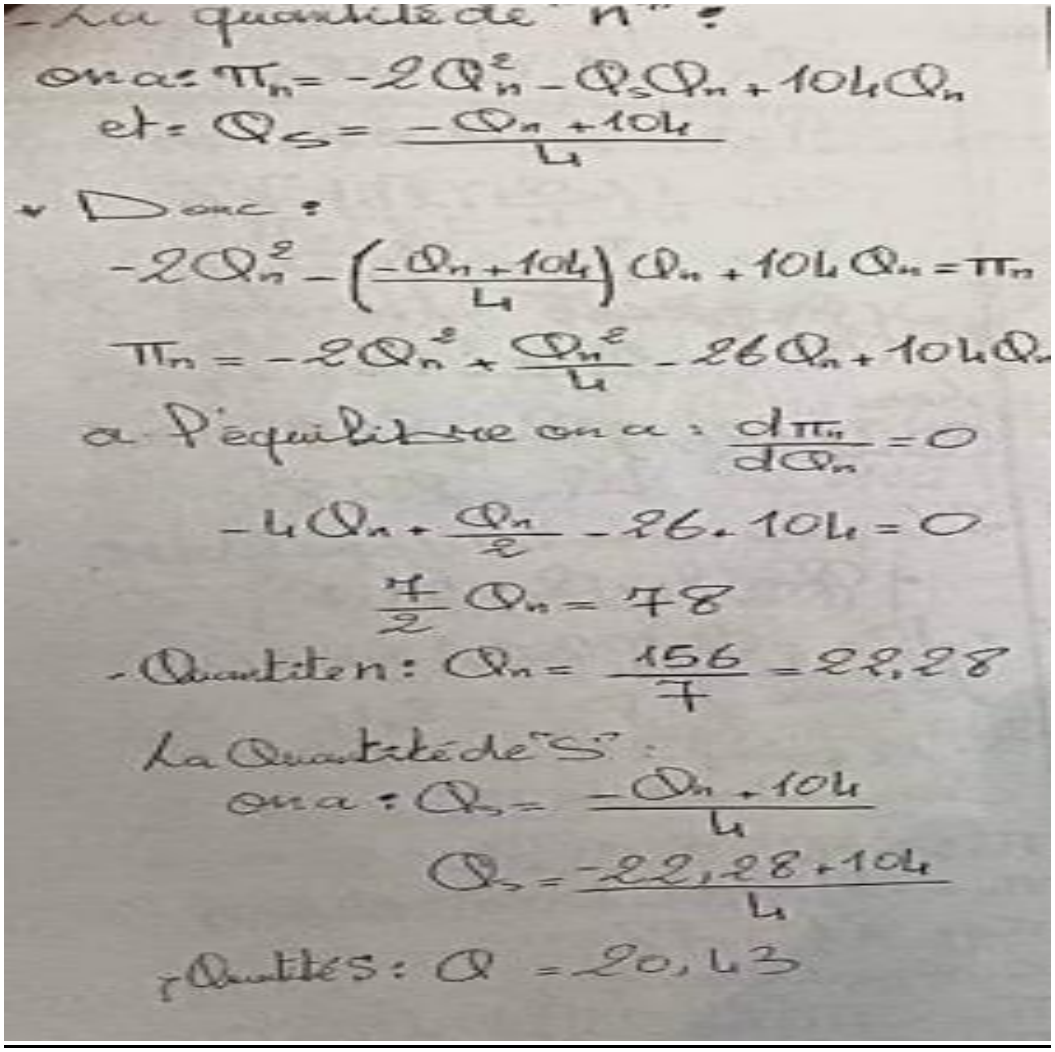
les quantités $\begin{cases} Q_n = 20,8 \\ Q_s = 20,8 \end{cases}$

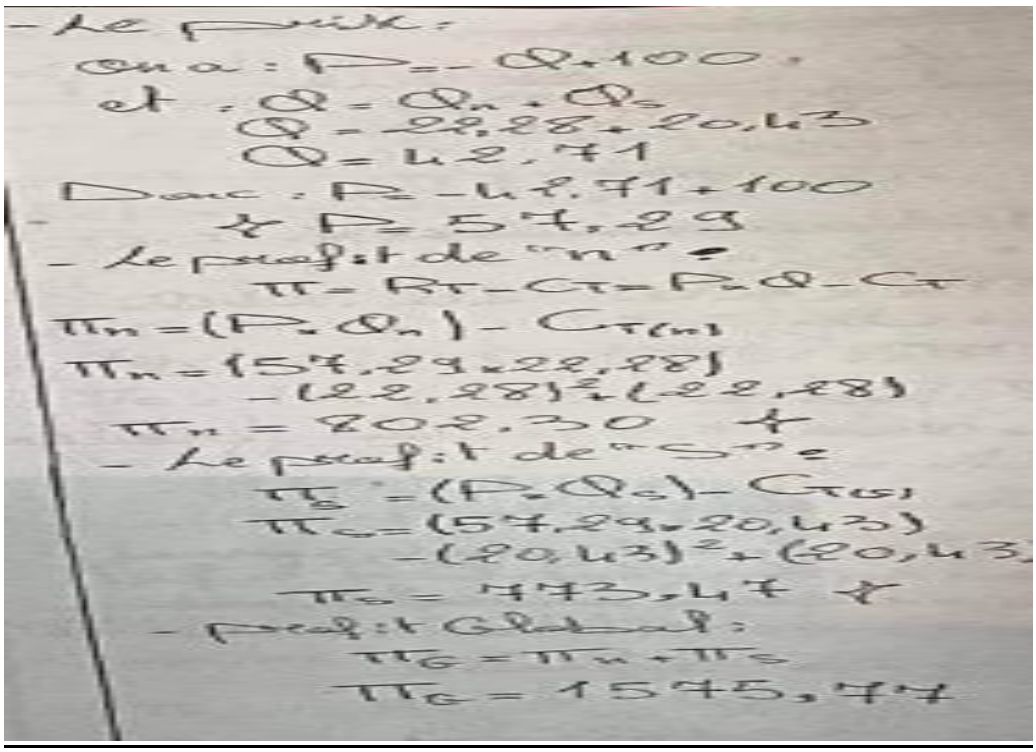
2/ le prix de vente / d'équilibre :
• $Q = Q_n + Q_s = 41,6$
• $P = -Q + 100 = 41,6 + 100$
le prix $P = 58,4$
3- le profit d'équilibre :
chez entreprise n :
$\Pi_n = -2Q_n^2 - Q_nQ_s + 104Q_n$
$\Pi_n = -2(20,8) - (20,8)^2 + 104(20,8)$
$\Pi_n = 865,28$
chez Entrep. S :
$\Pi_s = -2(20,8)(20,8)^2 + 104(20,8)$
$\Pi_s = 865,28$

✓ **Correction exercise09;**






- La quantité de "n" :
on a : $\pi_n = -2Q_n^2 - Q_s Q_n + 104 Q_n$
et : $Q_s = \frac{-Q_n + 104}{4}$
• Donc :
$-2Q_n^2 - \left(\frac{-Q_n + 104}{4}\right) Q_n + 104 Q_n = \pi_n$
$\pi_n = -2Q_n^2 + \frac{Q_n^2}{4} - 26 Q_n + 104 Q_n$
a l'équilibre on a : $\frac{d\pi_n}{dQ_n} = 0$
$-4Q_n + \frac{Q_n}{2} - 26 \cdot 104 = 0$
$\frac{7}{2} Q_n = 78$
- Quantité n : $Q_n = \frac{156}{7} = 22,28$
La Quantité de "S" :
on a : $Q_s = \frac{-Q_n + 104}{4}$
$Q_s = \frac{-22,28 + 104}{4}$
- Quantité S : $Q = 20,43$


- Le prix :
on a : $P = -Q + 100$
et : $Q = Q_n + Q_s$
$Q = 22,28 + 20,43$
$Q = 42,71$
Donc : $P = -42,71 + 100$
$P = 57,29$
- Le profit de "n" :
$\pi = RT - CT = P \cdot Q - CT$
$\pi_n = (P \cdot Q_n) - CT(n)$
$\pi_n = (57,29 \cdot 22,28)$
$-(22,28)^2 + (22,28)$
$\pi_n = 802,30$
- Le profit de "S" :
$\pi_s = (P \cdot Q_s) - CT(s)$
$\pi_s = (57,29 \cdot 20,43)$
$-(20,43)^2 + (20,43)$
$\pi_s = 773,47$
- Profit Global :
$\pi_G = \pi_n + \pi_s$
$\pi_G = 1575,77$

✓ **Correction exercise10;**

L'équilibre du duopole dans le cas où l'entreprise 2 est leader. On détermine les fonctions de réaction des deux entreprises. Π1 = P. q1 - CT1 Π1= (-Q + 100).q1 - 10 q1 Π1 = (- (q1 + q2) + 100). q1 - 10q1 Π1 = - q12 - q1q2 + 100 q1 - 10 q1

Π1 = - q12 — q1q2 + 90 q1 Π1' = 0 = -2 q1 - q2 + 90 = 0 q1

De même pour l'entreprise 2. ∏2 = P. q2 - CT2 ∏2 = (-(q1 +q2) + 100). q2 – 0,5q22 ∏2 = -q1 q2 - q22 + 100 q2 - 0,5q22 ∏2 = -1,5 q22 - q1 q2 + 100q2 ∏'2 = O → 3q2 - q1 + 100 = 0 → q2 On reprend ∏2 et on remplace q1 par sa valeur. ∏2 = -1,5 q22 - q1 q2 + 100q2 ∏2 = -1,5 q22 - q2 (q1

) + 100q2

∏2 = -1,5 q22 + 100q2 – 45q2 + 0,5q22 ∏2 = -q22 + 55q2 D'où ∏'2

= 0 → -2q2 + 55 = 0 →

et q2 = 27,5

Dans ces conditions Q = q1 + q2 = 27,5 + 31,25

→ Q = 58,75

P = -58,75 + 100 → P = 41,25 ∏1 = (41,25 x 31,25) - (1O x 31,25) = 1289,06 - 312,5 ∏1 = 976,56 ∏2 = (41,25 x 27,5) - (0,5 (27,5)2) → ∏2 = 756,25

∏ = ∏1 + ∏2 = 1732,81 2. Cas d'une entente entre les deux

المراجع:

1- عبد الوحيد صرارمة و اخرون، دروس عبر الخط في مقياس الاقتصاد الجزئي، جامعة ام البواقي.

2- خشني سهام، محاضرات في الاقتصاد الجزئي2، جامعة الجزائر3،2021.

3- فالي نبيلة، محاضرات في الاقتصاد الجزئي2، جامعة سطيف1،2023.

4- مرزوق أمال، محاضرات في الاقتصاد الجزئي، جامعة قالمة،2019.

5- كريمة سلطان، محاضرات في الاقتصاد الجزئي2، جامعة سكيكدة،2022.